

Une démonstration de la décomposition de Dunford inspiré de l'algorithme de Newton.

1 Introduction

À un candidat qui avait donné la démonstration usuelle, sur \mathbb{C} , de la décomposition de Dunford,

$$u = d + n,$$

un membre du jury a posé, sans succès, la question suivante :

Peut-on calculer d et n sans connaître les valeurs propres de u ?

Il s'avère que oui ! En fait, une adaptation de la méthode de Newton pour l'approximation des racines conduit à une démonstration effective (i.e. transformable, en un algorithme qui a le bon goût d'être très rapide).

2 Algorithme de Newton

L'algorithme de Newton est un algorithme itératif sensé converger vers une solution d'une équation du type $f(x) = 0$ avec f dérivable et de dérivé jamais nulle. On définit une suite par récurrence par la formule :

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n).$$

Dans les bons cas x_n converge ; la limite est alors une solution de $f(x) = 0$.

3 Décomposition de Dunford

On a l'énoncé suivant:

Théorème 1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé.*

Alors, il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes de E tels que d est diagonalisable, n est nilpotent, d et n commutent et $u = d + n$.

De plus, d et n sont des polynômes en u .

Démonstration. Commençons par montrer l'existence. Pour cela on va exhiber une « équation » satisfaite par d et vérifier que l'algorithme de Newton converge pour cette équation.

Le point de départ est donc la constatation que les racines du polynôme minimal de d sont simples et sont les valeurs propres de u . Notons P_u le polynôme caractéristique de u . Posons :

$$Q = \frac{P_u}{P_u \wedge P'_u}.$$

On aura

$$Q(d) = 0.$$

Considérons donc la suite d'endomorphismes suivante :

$$\begin{aligned} u_0 &= u, \\ u_{n+1} &= u_n - Q(u_n) * Q'(u_n)^{-1}. \end{aligned}$$

Justifions tout d'abord que $Q'(u_n)$ est bien inversible. On montre d'abord que pour tout $v = C(u) \in k[u]$ (avec $C \in k[X]$), $Q'(v)$ est inversible. Comme les racines de Q sont simples, Q' est premier avec Q et le polynôme minimal μ_u de u et donc avec celui de v noté μ_v . Mais alors, le théorème de Bezout dit qu'il existe deux polynômes A et B tels que $A.Q' + B.\mu_v = 1$. On conclut que $A(v) \circ Q'(v) = \text{Id}$.

On montre alors dans une même récurrence que pour tout n , u_n est dans l'algèbre $k[u]$ engendrée par u et que $Q'(u_n)$ est inversible.

Il s'agit de montrer que la suite u_n stationne, c'est-à-dire que $Q(u_n)$ est nul pour n assez grand. Pour cela, on va montrer par récurrence que

$$Q(u_n) \in Q(u)^{2^n} k[u]. \quad (1)$$

Pour $n = 0$ c'est évident. Supposons que $Q(u_n) \in Q(u)^{2^n} k[u]$. Pour évaluer $Q(u_{n+1})$ utilisons la formule de Taylor suivante pour les polynômes :

Proposition 2. *Pour tout polynôme R il existe un polynôme en deux variables S tel que :*

$$R(X + Y) = R(X) + YR'(X) + Y^2S(X, Y).$$

On obtient qu'il existe $v \in k[u]$ tel que $Q(u_{n+1}) = Q(u_n)^2 Q'(u_n)^{-1} v$. On conclut grâce à l'hypothèse de récurrence.

Comme μ_u divise une puissance de Q , la propriété (1) implique que $Q(u_n)$ est nul pour n assez grand et donc que u_n est stationnaire. Notons d l'endomorphisme sur lequel u_n stationne. On a $Q(d) = 0$; donc d est diagonalisable.

Il nous reste à voir que $u - d$ est nilpotente. Or, d'après ce qui précède, $u - d = (u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + \dots + (u_{n-1} - u_n)$ (si $d = u_n$) est de la forme $Q(u).v$ pour un v dans $k[u]$. On en déduit qu'il est nilpotent. \square