Feuille d'exercices n° 10

Géométrie

Exercice n° 1 : PLP 1992.

On identifie le plan euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On note $\mathcal{P}^+$ l'ensemble des points dont la partie imaginaire est positive. On se propose d'étudier quelques propriétés de l'application f de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = z^2 + z$.
On désigne par A, B et I les points d'affixes respectives $-1+i$, $-1-i$ et $-1/2$.

1-) Quels sont les points laisser fixes par f ? par $f \circ f$? Déterminer les affixes de A', B' et I', images par f de A, B et I.

2-) Montrer que deux points ayant la même image par f sont confondus ou symétriques par rapport à I.

3-) Montrer que pour tout point M distinct de I,

$$I'M' = IM^2 \quad (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{I'M'}}) \;=\; 2(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{IM}}).$$

En déduire l'image par f du demi-cercle $\mathcal{C}_r^+$ de centre I et de rayon r contenu dans le demi-plan supérieur $\mathcal{P}^+$.

4-) Quelle est l'image par f de la demi-droite D_θ d'origine I formant un angle orienté θ avec (Ox).

5-) Soit M et N deux points de $\mathcal{C}_r^+$. On considère le secteur MIN bordé par l'arc $\widehat{MN}$ et les demi-droites $[IM)$ et $[IN)$.
Déterminer l'image de ce secteur par f.

Exercice n° 2 : PLP 1991.

On identifie le plan euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On se propose d'étudier quelques propriétés de l'application F qui à tout point M d'affixe z non nulle associe le point M' d'affixe $f(z)$ définie par :

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}).$$

On note A et B les points d'affixes 1 et -1.

1-) Soit N un point quelconque de $\mathcal{P}$
a-) Montrer que tout point N de $\mathcal{P}$ possède deux antécédents M_1 et M_2 par F d'affixes z_1 et z_2. Quand M_1 et M_2 sont-ils confondus ?
b-) Quels sont les points fixes de F ?
c-) On suppose que M_1 et M_2 sont distincts. Calculer z_1z_2.
d-)En déduire que $OM_1 \times OM_2 = 1$ et que la droite (AB) est la bissectrice intérieure des demi-droites $[OM_1)$ et $[OM_2)$.

2-) Soit g l'application qui, à tout nombre complexe z différent de -1, associe :

$$g(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

On désigne par h la restriction de g à $\mathbb{C} \setminus \{0, -1\}$.
a-) Montrer que h est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{0, -1\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{-1, +1\}$. Déterminer h^{-1}.
b-) Montrer que si z est distinct de zéro et -1 alors $f(z) \neq -1$.
c-) En déduire que $g \circ f \circ h^{-1}$ est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. Déterminer cette application.

3-) Soit $\mathcal{C}$ de demi-cercle de diamètre $[A, B]$ contenu dans le demi-plan supérieur et privé de A et B.
a-) Caractériser l'argument de $\frac{z-1}{z+1}$ lorsque M décrit $\mathcal{C}$.
b-) A l'aide du 2°c) montrer que :

$$\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} = \frac{f(z)-1}{f(z)+1}.$$

c-) En déduire l'image de $\mathcal{C}$ par F.
d-) Trouver de même l'image par F d'un arc de cercle passant par A et B et limité par ces deux points en les excluant.

Exercice n° 3 : PLPA 1996.
On identifie le plan euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Soit a un nombre réel tel que $|a| > 1$ et F_a l'application qui à tout point d'affixe z différente de a associe le point M' d'affixe $f_a(z)$ définie par :

$$f_a(z) = \frac{az-1}{a-z}.$$

On désigne par A, B, I et J les points d'affixes respectives a, $-a$, 1 et -1.

1-) Déterminer l'ensemble des points fixes de F_a.

2-) Montrer que F_a est une bijection de $\mathcal{P} \setminus \{A\}$ dans $\mathcal{P} \setminus \{B\}$ et que $F_a^{-1} = F_{-a}$.

Soit M un point d'affixe z non situé sur l'axe réel et M' d'affixe z' son image par F_a.

3-) Vérifier que $(z' + a)(z - a) = 1 - a^2$.

4-) Soit $\mathcal{C}$ un cercle, N un point n'appartenant pas à $\mathcal{C}$ et K un point de $\mathcal{C}$. La droite (KN) coupe le cercle $\mathcal{C}$ en un deuxième point L éventuellement confondu avec K. Montrer que $\overline{NK}\,\overline{NL}$ est un réel indépendant du point K (On pourra introduire le point H de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à K).

5-) Soit $\mathcal{C}$ passant par M, I et de centre situé sur la droite imaginaire. La droite (AM) coupe $\mathcal{C}$ en un deuxième point N, éventuellement confondu avec M. Montrer que $\overline{AM}\,\overline{AN} = 1 - a^2$. En déduire que M' est le symétrique de N par rapport à l'axe des ordonnées.

6-) A l'aide de ce qui précède, donner une construction géométrique de M' à partir de la donnée d'un point M non situé sur l'axe réel.

7-) Soit Γ le cercle de centre O et de rayon 1. Montrer que l'image de Γ par F_a est Γ.

7-) Indiquer d'autres cercles que F_a laisse globalement invariant.

8-) Pour a positif, tracer l'image par F_a du demi-cercle Γ^+ constitué des éléments de Γ d'ordonnée positive ou nulle.

9-) On considère g_a la fonction de $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ définie par :

$$g_a(x) \;=\; \frac{ax-1}{a-x}.$$

a-) Etudier le sens de variation de g_a et ses limites aux bornes des intervalles $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$.
b-) Déterminer l'image par F_a du segment $[J, I]$.
c-) Quel est l'image par F_a de l'axe réel privé de A.

10-) On désigne par C le point d'affixe $-1/a$.
a-) Soit θ un nombre réel. Rappeler quel est la nature de l'ensemble des points M, distincts de B et C tels que :

$$(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}}) = \theta \bmod(2\pi).$$

b-) Soit z un nombre complexe non nul différent de a. Montrer que :

$$\text{si } a > 0,\ \arg\Big(\frac{f_a(z) + \dfrac{1}{a}}{f_a(z) + a}\Big) \;=\; \arg(z) \bmod(2\pi)$$

$$\text{si } a < 0,\ \arg\Big(\frac{f_a(z) + \dfrac{1}{a}}{f_a(z) + a}\Big) \;=\; \arg(z) + \pi \bmod(2\pi).$$

c-) Montrer que l'image par F_a d'une droite passant par O autre que l'axe des abscisses est un cercle passant par B et C privé du point B.

11-) Déterminer l'image par F_a du cercle de centre O et de rayon $|a|$ privé de A.

Exercice n° 4 : PLP 1997.
Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$; l'axe des abscisses est noté Ox, celui des ordonnées Oy.
On désigne par A le point de coordonnées $(-1, 0)$ et par $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. On considère une droite D passant par A distincte de Ox et non parallèle à Oy. La droite D et le cercle $\mathcal{C}$ ont deux points d'intersection, le point A et un autre, noté B. On désigne par H l'orthocentre du triangle AOB.

Soit Γ la courbe décrite par le point H lorsque la droite D pivote autour du point A.

1-) Donner sans démonstration une équation du cercle $\mathcal{C}$ et une équation de la droite D en fonction de son coefficient directeur t. En déduire que les coordonnées de B en fonction de t sont :

$$B\,(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$$

2-) Montrer que les coordonnées de H en fonction de t sont :

$$H\,(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{t^2-1}{t(1+t^2)})$$

La courbe Γ est donc la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x = f(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = g(t) = \dfrac{t^2-1}{t(1+t^2)} \end{cases}$$

3-) Etudier le sens de variations des fonctions f et g sur $]0,+\infty[$ et déterminer les limites en 0 et $+\infty$.

4-) Montrer que la courbe Γ admet un axe de symétrie que l'on précisera. Quel est le point d'intersection de Γ avec cet axe ?

5-) Montrer que Γ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

6-) Tracer la courbe Γ en prenant pour unité $4cm$. Sur le dessin, on placera Δ, la tangente à Γ en O et les tangentes à Γ aux points correspondant aux valeurs $-\sqrt{2+\sqrt{5}}$ et $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ du paramètre t.

Exercice n° 5 : PLP 2002.

Le plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Le point de coordonnées (x, y) est caractérisé par son affixe, le nombre complexe $z = x + iy$.

Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère le carré $OABC$ tel que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{v}$.

L'objet du problème est de déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des isobarycentres des triangles équilatéraux qui ont leurs sommets appartenant aux cotés du carré $OABC$.

Les dessins destinés à accompagner la résolution des questions de cet exercice seront réalisés en prenant 10cm comme unité graphique.

1- Démontrer qu'il n'existe pas de triangle équilatéral ayant ses sommets appartenant aux cotés du carré $OABC$, avec deux sommets sur le même coté de ce carré.

2- On considère les point M N et P tels que M, d'affixe m, appartient au segment $[OA]$, N d'affixe, $1 + in$, appartient à la demi-droite $[AB)$ et P, d'affixe ip, appartient à la demi-droite $[OC)$.

a. Démontrer que le triangle MNP est équilatéral si et seulement si :

$$n = \frac{1}{\sqrt{3}}(1+m) \qquad \text{et} \qquad p = \frac{1}{\sqrt{3}}(2-m)$$

En déduire que, pour tout point M, il existe un unique couple (N, P) tel que le triangle MNP soit équilatéral.

b. On note S le milieu du segment $[NP]$ et on suppose que le triangle MNP est équilatéral.

Démontrer que le point S est indépendant du point M. En déduire, pour tout point M, une méthode de construction géométrique des points N et P, à la règle (non graduée) et au compas.

Exercice n° 6 : PLP 2001.

Dans le plan affine euclidien orienté (l'unité de mesure des angle étant le radian), on considère trois points A_1, A_2 et A_3 non alignés et un point M distinct des précédents.

On désigne par s_1, s_2, s_3 les symétries orthogonales d'axes respectifs (A_2A_3), (A_1A_3), (A_1A_2) et M_1, M_2, M_3 les symétriques respectifs de M par s_1, s_2 et s_3.

1-) Réaliser une figure, à compléter au fur et à mesure de l'avancement dans les questions.

2-) Démontrer que les points M_1, M_2 et M_3 sont distincts deux à deux.

3-) On désigne par Δ_1, Δ_2 et Δ_3 les médiatrices respectives de $[M_2M_3]$, $[M_1M_3]$ et $[M_1M_2]$.

a. Vérifier que A_1, A_2 et A_3 appartiennent respectivement à Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

b. Indiquer une raison pour laquelle, si M_1, M_2 et M_3 ne sont pas alignés, alors les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont concourantes.

c. Démontrer l'égalité de mesures d'angles orientés de droites suivante :

$$(\widehat{M_3M_1, M_3M_2}) + (\widehat{\Delta_1, \Delta_2}) = 0 \quad mod(\pi).$$

d. On désigne par s'_1, s'_2 et s'_3 les symétries orthogonales d'axes respectifs Δ_1, Δ_2 et Δ_3. On pose $S_1 = s_3 \circ s'_1 \circ s_2$, et $S_2 = s_1 \circ s'_2 \circ s_3$.

i) Vérifier que S_1 et S_2 sont les symétries orthogonales d'axes respectifs (MA_1) et (MA_2). En déduire que la transformation $S_2 \circ S_1$ est une rotation, dont on déterminera les éléments caractéristiques (centre et angle).

ii) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations $s'_1 \circ s_2$ et $s_1 \circ s'_2$.

iii) Démontrer l'égalité de mesures d'angles orientés de droites suivante :

$$(\widehat{MA_1, MA_2}) = (\widehat{A_1A_3, \Delta_1}) - (\widehat{A_2A_3, \Delta_2}) \quad mod(\pi).$$

e. Démontrer l'égalité de mesures d'angles orientés de droites suivante :

$$(\widehat{MA_1, MA_2}) = (\widehat{A_3A_1, A_3A_2}) + (\widehat{M_3M_1, M_3M_2}) \quad mod(\pi).$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur M pour que les points M_1, M_2 et M_3 ne soient pas alignés.

Exercice n° 7 : PLP 1996.

Ce problème est consacré à l'étude de propriétés de symétries obliques particulières du plan dans lui-même.

On se place dans le plan euclidien orienté. Les mesures des angles sont exprimées en radians.

On considère quatre points A, B, C et D du plan tels que $AB = AC = AD = 3$, $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \pi/2$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) = \pi/4$.

La symétrie oblique d'axe (AB) et de direction celle de (AD), notée s, est l'application qui, à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{HM'} = \overrightarrow{MH}$, où H est le projeté de M sur la droite (AB) parallèlement à la droite (AD).

La partie I du problème porte sur l'étude de quelques propriétés de l'application s.
Dans la partie II, on étudie des compositions de symétries obliques d'axes parallèles à (AB).
La partie III propose la détermination de l'image d'un cercle par s.

PARTIE I

I.1. Réaliser une figure en y plaçant les points A, B, C et D, ainsi que les points C' et D' images respectives de C et D par s.

I.2. a. Déterminer l'application composée $s \circ s$.
b. En déduire que s est une bijection du plan sur lui-même.

I.3. Déterminer l'ensemble des points invariants par s.

PARTIE II

II.1. Soit (d) une droite parallèle à la droite (AB). On désigne par σ la symétrie oblique d'axe (d) et de direction celle de (AD).
On considère l'application composée $\sigma \circ s$. Pour tout point M, on note M'' son image par cette application.

a. Compléter la figure de la partie I en prenant la droite (d) passant par le point P tel que $\overrightarrow{AP} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AD}$ et en y plaçant les points A'' et D''.

b. Montrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{AA''}$. En déduire la nature de l'application $\sigma \circ s$.

II.2. Soit t une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AD}$.

a. Prouver qu'il existe une symétrie oblique σ_t et une seule d'axe parallèle à la droite (AB) et de direction celle de la droite (AD) et telle que $t = \sigma_t \circ s$ (préciser la position de l'axe de σ_t en donnant l'un de ses points).

b. Montrer que l'application composée $s \circ \sigma_t$ est une translation et préciser son vecteur. On notera t' cette translation.

c. Vérifier que l'on a $s \circ t = t' \circ s$.

PARTIE III

III.1. Pour tout point M du plan, on note (x, y) ses coordonnées dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ et (α, β) ses coordonnées dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. On note M' l'image de M par s.

a. Montrer que $\alpha = x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}y$.

b. Exprimer les coordonnées (x', y') de M' dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ à l'aide de x et y.

c. On note (α', β') les coordonnées de M' dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Montrer que $\alpha' = \alpha - 2\beta$ et $\beta' = -\beta$.

III.2. Soit r un nombre réel strictement positif. On désigne par (c) le cercle de centre A et de rayon r. On note (c') l'ensemble image de (c) par la symétrie oblique s.

a. Donner une équation du cercle (c) dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
A l'aide de la question III.1., montrer que (c') admet pour équation $\alpha'^2 + k\beta'^2 + l\alpha'\beta' = r^2$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, où k et l sont deux nombres réels que l'on déterminera.

b. Soit γ un nombre réel. On pose :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}_\gamma &= \cos\gamma\overrightarrow{AB} + \sin\gamma\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{v}_\gamma &= -\sin\gamma\overrightarrow{AB} + \cos\gamma\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

On note (a', b') les coordonnées de M' dans le repère $(A, \overrightarrow{u}_\gamma, \overrightarrow{v}_\gamma)$.
Montrer que (c') admet pour équation $ma'^2 + nb'^2 + 4(\sin(2\gamma) - \cos(2\gamma))a'b' = r^2$ dans le repère $(A, \overrightarrow{u}_\gamma, \overrightarrow{v}_\gamma)$, où m et n sont deux réels que l'on exprimera en fonction de γ.

c. En déduire que l'on peut choisir une valeur particulière de γ pour laquelle (c') a pour équation $ma'^2 + nb'^2 = r^2$ dans le repère $(A, \overrightarrow{u}_\gamma, \overrightarrow{v}_\gamma)$ (préciser la valeur de γ choisie).
Donner la nature de (c'). Compléter la figure de la partie I par les ensembles (c) et (c') dans le cas où $r = 3$.

Exercice n° 8 : PLP 1995.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On désigne par A et B les points de coordonnées respectives $(1, 0)$ et $(-1, 0)$, par Δ et Δ' les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = -1$ et par d la droite portant l'axe des abscisses. On note P^* le plan privé de Δ, Δ' et d. Une droite D (resp. une courbe C) du plan P étant donnée, on désigna par D^* (rsp. C^*) la droite D privée de ses éventuelles intersections avec Δ, Δ' et d (resp. la courbe C privée de ses éventuelles intersections avec Δ, Δ' et d).
On se propose d'étudier la transformation F du plan qui à tout point M de P^* de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') définies par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& x\\ y' &=& \dfrac{1 - x^2}{y}\end{array}\right.$$

On étudie notamment les transformées de droites et de certains cercles ou de certaines coniques de P^*.

PREMIÈRE PARTIE : Etude géométrique de F

I.1. Premières propriétés de F.

a. Prouver que la transformation F est bien définie sur P^* et que l'image de cette transformation est P^*.

b. Prouver que F est bijective de P^* dans lui-même, de réciproque elle même.

I.2. Transformées de cercles passant par A et B.

a. Soit C^* le cercle de diamètre $[AB]$ privé de ses deux points A et B. Donner une équation de ce cercle et prouver que tous ses points sont invariants par F.

b. Plus généralement, soit C un cercle passant par A et B. Montrer qu'un équation de C peut s'écrire $x^2 - 1 + y^2 - 2ay = 0$ où a est un réel. Montrer que l'image de C^* par F est C_1^* où C_1 est le cercle d'équation :

$$x^2 - 1 + y^2 + 2ay = 0$$

Quelle remarque peut-on faire sur les cercles C et C_1 ?

I.3. Nature géométrique de F.
Soit M un point de P^* non invariant par F. On désigne par C le cercle circonscrit au triangle AMB et C_1 son symétrique par rapport à l'axe des abscisses d.
Le point M_1, symétrique de M par rapport à d, étant situé sur C_1, on désigne par N, soit le point M si (MM_1) est tangente au cercle C, soit le point d'intersection autre que M de la droite (MM_1) avec le cercle C lorsque (MM_1) n'est pas tangente au cercle C. On demande une figure soignée de cette configuration.

a. Prouver que le transformé M' de M par F est le symétrique de N par rapport à d.

b. Prouver que, les angles étant des angles orientées de droites, que $(AB, AM') = (MN, MB)$ et en déduire que la droite (AM') est perpendiculaire à (MB).

c. Déduire de ce qui précède que M' est l'orthocentre du triangle AMB. Cette propriété est-elle encore valable dans le cas où M est sur le cercle de diamètre $[AB]$?

DEUXIÈME PARTIE : Transformation de droites et coniques

II.1. Transformation de droites de P^*

a. Soit D une droite d'équation $x = a$ avec $a \neq 1$ et $a \neq -1$. Quelle est l'image de D^* par F.

b. Soit D une droite d'équation $y = b$ avec $b \neq 0$. Montrer que l'image de D^* par F peut être désignée par $\mathcal{P}^*$ où $\mathcal{P}$ est un parabole passant par A et B dont on précisera géométriquement l'axe et le sommet. Réciproquement, que peut-on dire de l'image par F d'une parabole passant par A et B et dont le sommet est situé sur l'axe des ordonnées ?

c. Soit D une droite issue de A (ou B) distincte de Δ et d. Déterminer géométriquement l'image de D^*.

d. Soit D la droite d'équation $y = mx+p$ où $m \neq 0$. Déterminer géométriquement l'image de D^*.

e. On considère, en particulier, la droite D d'équation $y = x$. On pose $\alpha = -1 - \sqrt{2}$, d'où $1/\alpha = 1 - \sqrt{2}$. Vérifier que l'équation de l'image de D^* peut s'écrire :

$$(y - \alpha x)^2 - (y + \frac{1}{\alpha}x)^2 \;=\; K$$

où K est une constante que l'on déterminera. En déduire que l'image de D^* est la courbe $\mathcal{H}^*$ où $\mathcal{H}$ est une hyperbole dont on précisera les caractéristiques.

II.2. Transformations de coniques.
Soit Γ une conique bifocale de sommets A et B.

a. Montrer qu'une équation de Γ peut s'écrire :

$$\frac{y^2}{b^2} = \pm(1 - x^2)$$

b. Déterminer la nature de l'image de Γ^*.

Exercice n° 9 : PLP 2003.

Définitions et notations

On désigne par $\mathcal{P}$ le plan affine muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.
$\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note respectivement $\overline{z}$, $Re(z)$, $Im(z)$ son conjugué, sa partie réelle et sa partie imaginaire.
$M(z)$ désigne le point de $\mathcal{P}$ d'affixe z. $(\vec{U}, u)$ désigne le vecteur d'affixe u. $S_{/PQ}$ désigne la symétrie orthogonale par rapport à la droite (PQ).

1- Dans cette question, on établit une formule donnant la mesure $f(u, v)$ de l'aire algébrique du triangle de sommet A, B, C d'affixes respectifs a, b, c en fonction de $u = b - a$ et $v = c - a$, les affixes des vecteurs $\vec{U} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{V} = \overrightarrow{AC}$. Par convention, la valeur de l'aire algébrique est positive lorsque les sommets A, B et C, pris dans cet ordre, sont dans le sens direct ; la valeur de l'aire est négative dans le cas contraire. On procède par conditions nécessaires.

a) Calculer $f(1, i)$.

b) Justifier la relation $f(u, v) = -f(v, u)$.

c) Justifier la relation $f(wu, wv) = w\overline{w}f(u, v)$, pour u, v, w quelconques.

d) Justifier la relation $f(u, t_1v_1 + t_2v_2) = t_1f(u, v_1) + t_2f(u, v_2)$ pour u, v_1, v_2 quelconques et t_1 et t_2 réels.

e) Prouver que $f(u, v) = \dfrac{1}{4i}(\overline{u}v - u\overline{v})$.

2- Soit $\mathcal{D}$ la droite de $\mathcal{P}$ passant par le point P d'affixe p, orthogonale au vecteur $\vec{N}$ d'affixe n. Soit z et z' les affixes respectifs de deux points M et M' symétriques par rapport à la droite $\mathcal{D}$. Montrer la relation $\overline{n}z' = \overline{n}p - n\overline{z} + n\overline{p}$.

3- Dans cette question et dans la suivante, les points A et B ont pour affixes respectifs $1 + i$ et 2. Soient M_1, M_2 et M_3 les symétriques de $M(z)$ par rapport aux droites (OA), (OB) et (AB).

a) Déterminer en fonction de z les affixes z_1, z_2 et z_3 de M_1, M_2 et M_3.

b) Montrer que, pour que l'aire du triangle $M_1M_2M_3$ soit égale en valeur absolue à celle du triangle OAB, il faut et il suffit que l'on ait $|\overline{z} + z - \overline{z}z| = 1$.

4- Construire sur la même figure le triangle OAB et l'ensemble des points dont l'affixe satisfait à la condition $|\overline{z} + z - \overline{z}z| = 1$.