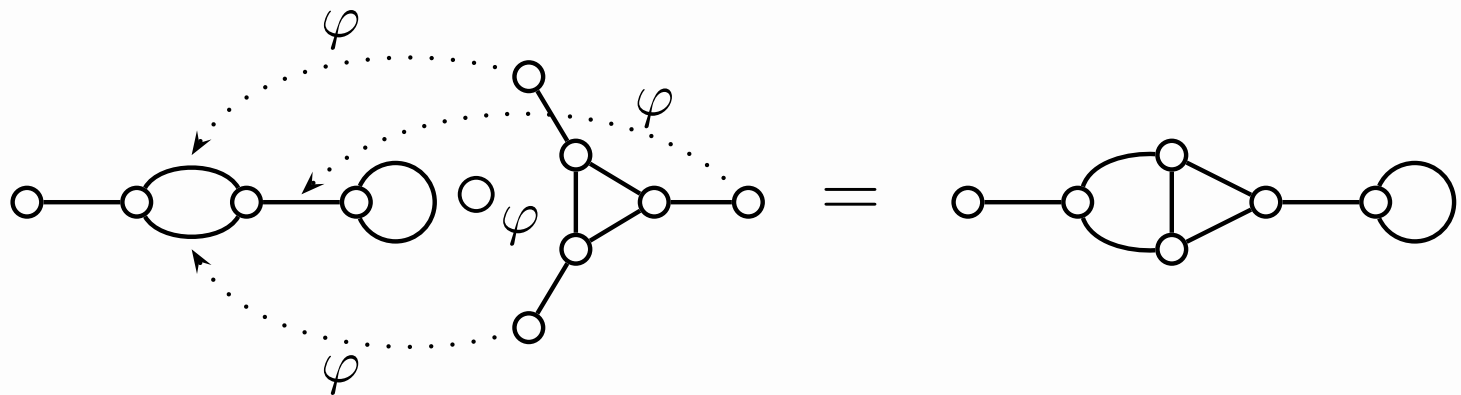


Éléments succincts et élémentaires de théorie des graphes



Jean-Michel Oudom

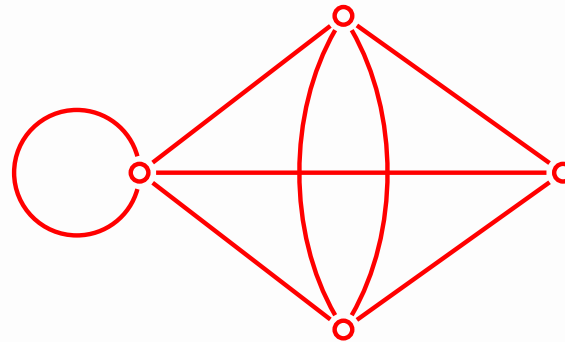
oudom@math.univ-montp2.fr

IUFM de l'Académie de Montpellier

Définition dans le secondaire

Définition 1.

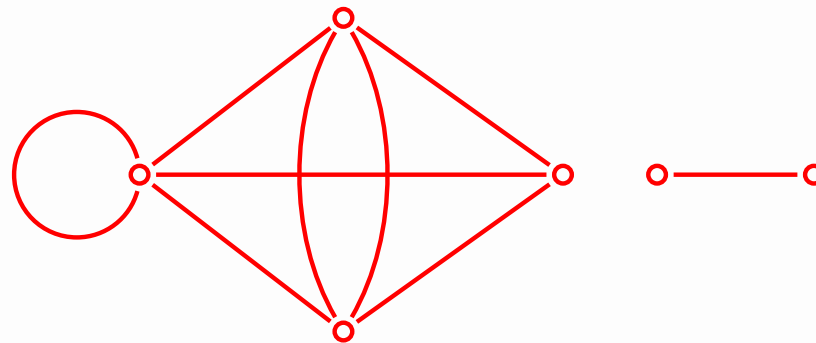
Un graphe $G = (X, A)$ est la donnée d'un ensemble X de sommets et d'un ensemble A d'arêtes reliant certains de ses sommets entre eux.



Définition dans le secondaire

Définition 1.

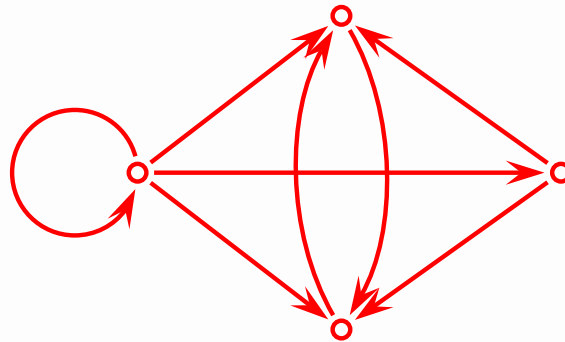
Un graphe $G = (X, A)$ est la donnée d'un ensemble X de sommets et d'un ensemble A d'arêtes reliant certains de ses sommets entre eux.



Définition dans le secondaire

Définition 1.

Un graphe $G = (X, A)$ est la donnée d'un ensemble X de sommets et d'un ensemble A d'arêtes reliant certains de ses sommets entre eux.

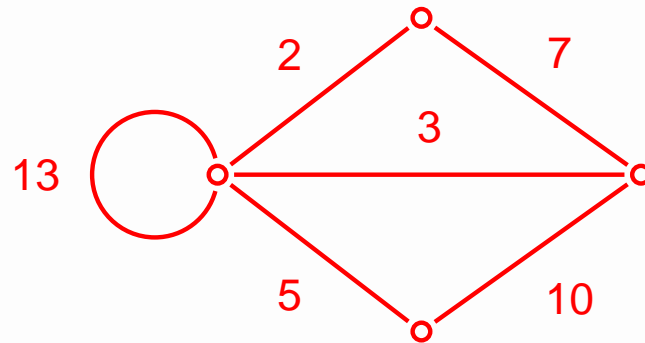


Un graphe orienté est un graphe dont les arêtes sont orientées.

Définition dans le secondaire

Définition 1.

Un graphe $G = (X, A)$ est la donnée d'un ensemble X de sommets et d'un ensemble A d'arêtes reliant certains de ses sommets entre eux.

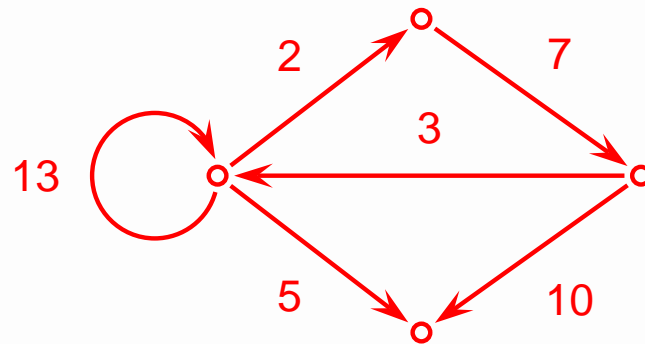


Un graphe pondéré est un graphe aux arêtes duquels on a associé des poids (souvent des réels positifs).

Définition dans le secondaire

Définition 1.

Un graphe $G = (X, A)$ est la donnée d'un ensemble X de sommets et d'un ensemble A d'arêtes reliant certains de ses sommets entre eux.



Un graphe pondéré est un graphe aux arêtes duquels on a associé des poids (souvent des réels positifs).

Il peut bien sûr être orienté.

Définition 2.

Un graphe orienté G est la donnée d'un couple d'ensembles (X, A) et d'une application

$$\varphi : A \longrightarrow X \times X$$

Définition 2.

Un graphe orienté G est la donnée d'un couple d'ensembles (X, A) et d'une application

$$\varphi : A \longrightarrow X \times X$$

A chaque arête a de A , φ associe le couple de $X \times X$ formé par sa source $s(a)$ et son but $b(a)$.

Définition 2.

Un graphe orienté G est la donnée d'un couple d'ensembles (X, A) et d'une application

$$\varphi : A \longrightarrow X \times X$$

Un graphe non orienté G est la donnée d'un couple d'ensemble (X, A) et d'une application φ de A dans l'ensemble des parties de X de moins de 2 éléments.

Définition 2.

Un graphe orienté G est la donnée d'un couple d'ensembles (X, A) et d'une application

$$\varphi : A \longrightarrow X \times X$$

Un graphe non orienté G est la donnée d'un couple d'ensemble (X, A) et d'une application φ de A dans l'ensemble des parties de X de moins de 2 éléments.

Tout graphe orienté a un graphe non orienté sous-jacent.

Définition 2.

Un graphe orienté G est la donnée d'un couple d'ensembles (X, A) et d'une application

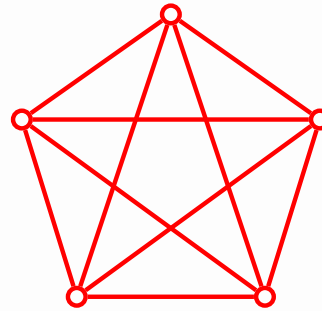
$$\varphi : A \longrightarrow X \times X$$

Un graphe non orienté G est la donnée d'un couple d'ensemble (X, A) et d'une application φ de A dans l'ensemble des parties de X de moins de 2 éléments.

Une pondération d'un graphe $G = (X, A)$ est la donnée d'une application de A dans un ensemble de poids.

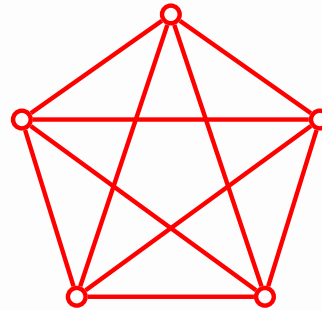
Graphes complets

K_5



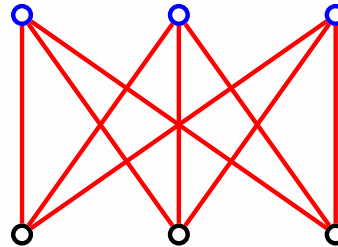
Graphes complets

K_5



Graphes biparties complets

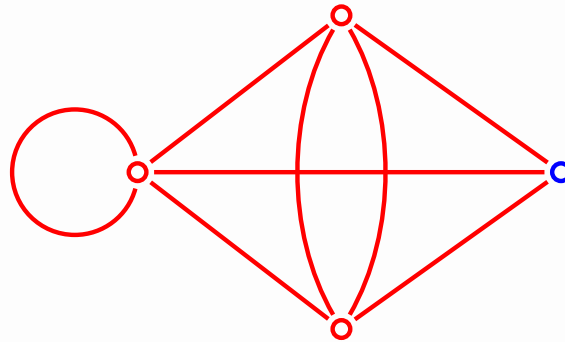
$K_{3,3}$



Degré d'un sommet

Définition 3.

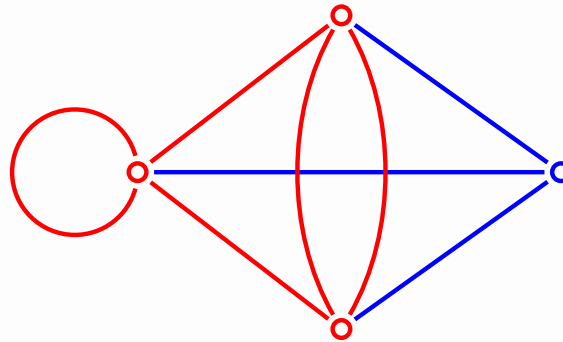
Soit G un graphe non orienté, le degré d'un sommet x de G est le nombre d'arêtes qui possède x comme extrémité.



Degré d'un sommet

Définition 3.

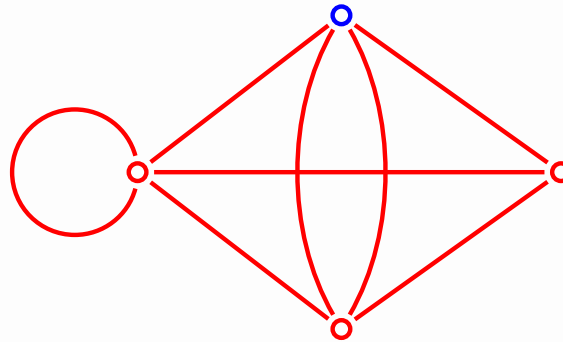
Soit G un graphe non orienté, le degré d'un sommet x de G est le nombre d'arêtes qui possède x comme extrémité.



Degré d'un sommet

Définition 3.

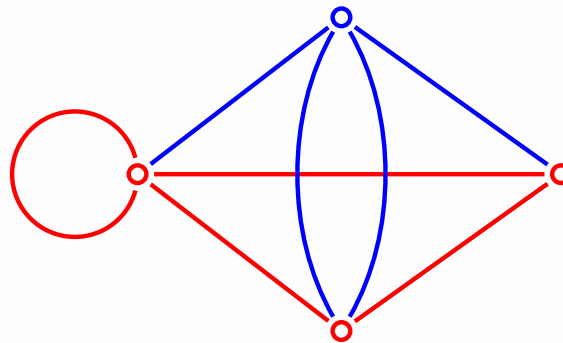
Soit G un graphe non orienté, le degré d'un sommet x de G est le nombre d'arêtes qui possède x comme extrémité.



Degré d'un sommet

Définition 3.

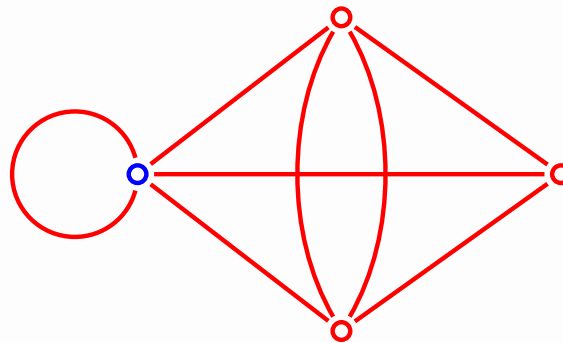
Soit G un graphe non orienté, le degré d'un sommet x de G est le nombre d'arêtes qui possède x comme extrémité.



Degré d'un sommet

Définition 3.

Soit G un graphe non orienté, le degré d'un sommet x de G est le nombre d'arêtes qui possède x comme extrémité.

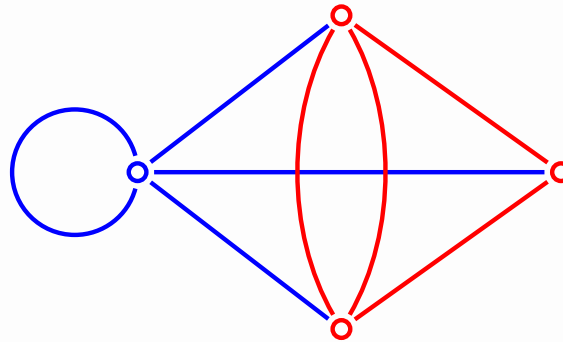


Les boucles comptent deux fois !

Degré d'un sommet

Définition 3.

Soit G un graphe non orienté, le degré d'un sommet x de G est le nombre d'arêtes qui possède x comme extrémité.

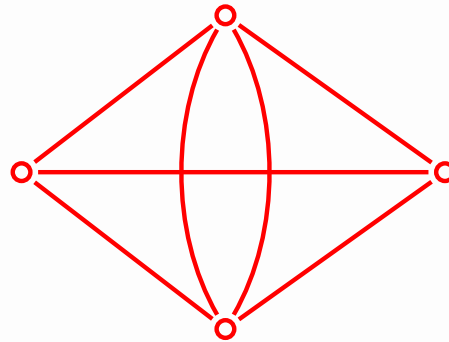


Le degré de ce sommet est 5.

Degré d'un sommet

Définition 3.

Soit G un graphe non orienté, le degré d'un sommet x de G est le nombre d'arêtes qui possède x comme extrémité.



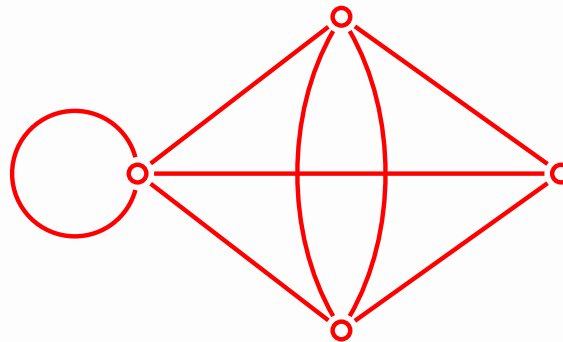
Proposition 4.

Soit $G = (X, A)$ un graphe non orienté sans boucle.
Alors :

$$\sum_{x \in X} d^{\circ}(x) = 2 \times \#A$$

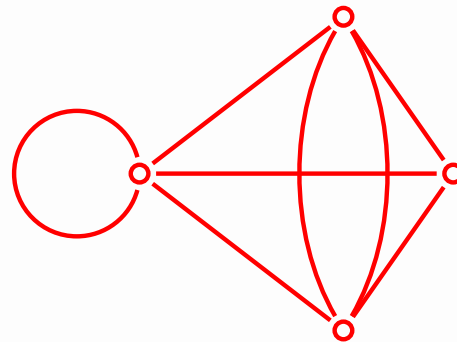
Définition 5.

Un graphe G est planaire si il possède une représentation dans le plan telle que ses arêtes ne se coupent pas.



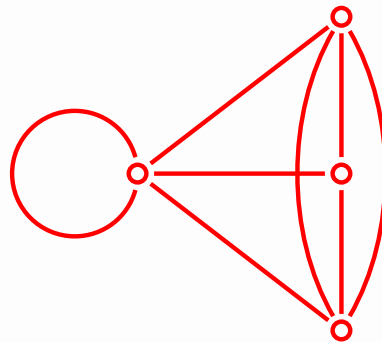
Définition 5.

Un graphe G est planaire si il possède une représentation dans le plan telle que ses arêtes ne se coupent pas.



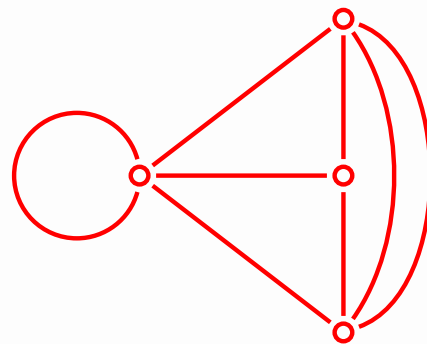
Définition 5.

Un graphe G est planaire si il possède une représentation dans le plan telle que ses arêtes ne se coupent pas.



Définition 5.

Un graphe G est planaire si il possède une représentation dans le plan telle que ses arêtes ne se coupent pas.



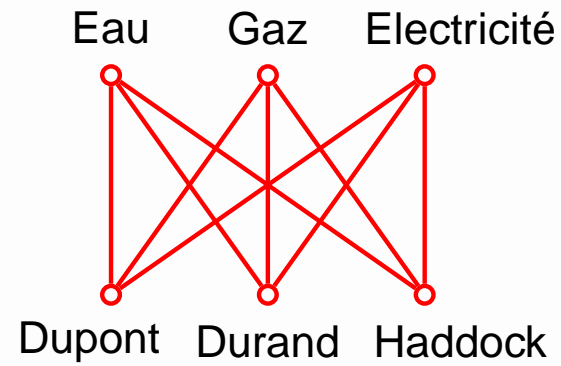
Théorème 6. Soit G un graphe planaire connexe.

Alors :

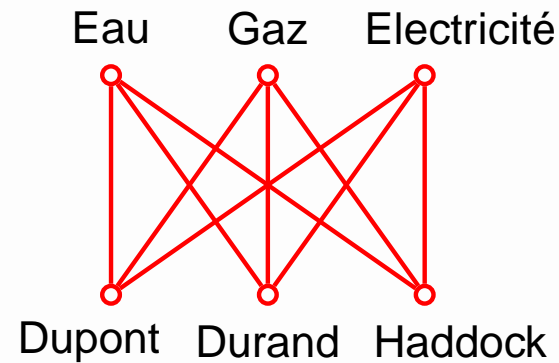
$$s + f - a = 1$$

où s et a désignent respectivement le nombre de sommets et le nombre d'arêtes de G et f désigne le nombre de faces d'une représentation de G dans la plan.

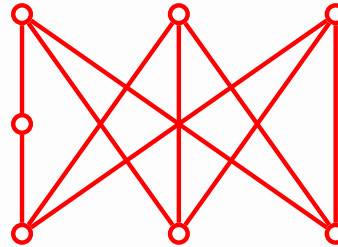
Eau, gaz et électricité



Eau, gaz et électricité

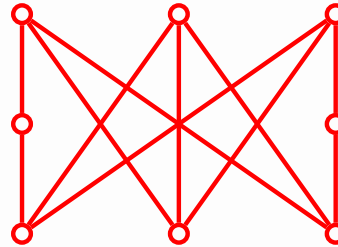


Proposition 7. Les graphes $K_{3,3}$ et K_5 ne sont pas planaires.



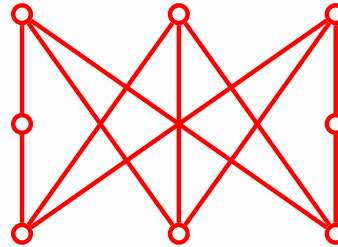
Proposition 7. Les graphes $K_{3,3}$ et K_5 ne sont pas planaires.

Un graphe G est dit être une subdivision élémentaire d'un graphe H si H peut être obtenu par contraction d'une arête de G .



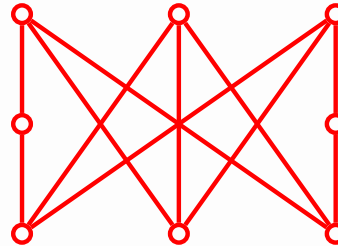
Proposition 7. Les graphes $K_{3,3}$ et K_5 ne sont pas planaires.

Un graphe G est dit être une subdivision d'un graphe H si il existe une suite finie G_0, \dots, G_n tel que $G_0 = H$, $G_n = G$ et pour tout indice i , G_{i+1} est une subdivision élémentaire de G_i .



Proposition 7. Les graphes $K_{3,3}$ et K_5 ne sont pas planaires.

Un sous-graphe d'un graphe $G = (X, A)$ est un graphe dont les sommets et les arêtes constituent des sous-ensembles de X et A .



Proposition 7. Les graphes $K_{3,3}$ et K_5 ne sont pas planaires.

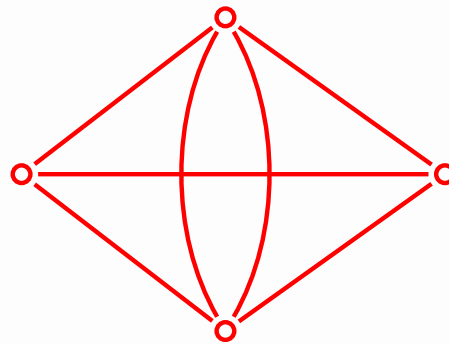
Théorème 8. (K. Kuratowski 1930)

Un graphe G est planaire si et seulement si il ne possède pas de sous-graphe qui soit une subdivision de $K_{3,3}$ et K_5 .

Nombre chromatique

Définition 9.

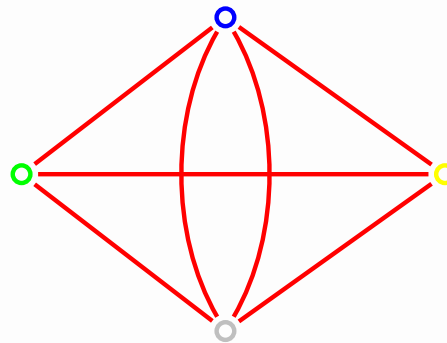
Soit G un graphe non orienté sans boucle. Le nombre chromatique de G est le nombre minimal $\chi(G)$ de couleurs qu'il faut pour colorer ses sommets de telle sorte que deux sommets adjacents soient de couleurs différentes.



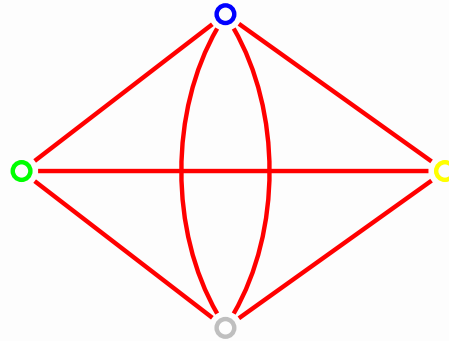
Nombre chromatique

Définition 9.

Soit G un graphe non orienté sans boucle. Le nombre chromatique de G est le nombre minimal $\chi(G)$ de couleurs qu'il faut pour colorer ses sommets de telle sorte que deux sommets adjacents soient de couleurs différentes.



Nombre chromatique



Proposition 10. Soit G un graphe non orienté, sans boucle, d'ordre n . On note :

- $\omega(G)$ l'ordre du plus grand sous-graphe de G qui est un graphe complet,
- $\Delta(G)$ le plus grand des degrés des sommets de G .

Alors :
$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1 \leq n.$$

Preuve de la proposition 10

On construit itérativement des parties S_i de X comme suit :

Preuve de la proposition 10

On construit itérativement des parties S_i de X comme suit :

(i) On pose $S_0 = \emptyset$, $X_0 = X$, $i = 0$.

Preuve de la proposition 10

On construit itérativement des parties S_i de X comme suit :

- (i) On pose $S_0 = \emptyset$, $X_0 = X$, $i = 0$.
- (ii) On choisit $x_i \in X_i$ et on choisit une partie stable S_{i+1} contenue dans X_i , maximale (pour l'inclusion) et contenant x_i ,

Preuve de la proposition 10

On construit itérativement des parties S_i de X comme suit :

- (i) On pose $S_0 = \emptyset$, $X_0 = X$, $i = 0$.
- (ii) On choisit $x_i \in X_i$ et on choisit une partie stable S_{i+1} contenue dans X_i , maximale (pour l'inclusion) et contenant x_i ,
- (iii) On pose $X_{i+1} = X_i \setminus S_{i+1}$, on incrémente i de 1 et on retourne au point (i).

Preuve de la proposition 10

On construit itérativement des parties S_i de X comme suit :

(i) On pose $S_0 = \emptyset$, $X_0 = X$, $i = 0$.

(ii) On choisit $x_i \in X_i$ et on choisit une partie stable S_{i+1} contenue dans X_i , maximale (pour l'inclusion) et contenant x_i ,

(iii) On pose $X_{i+1} = X_i \setminus S_{i+1}$, on incrémente i de 1 et on retourne au point (i).

Comme X est fini, le processus s'arrête et on obtient une partition $X = S_1 \cup \dots \cup S_k$. Comme les S_i sont stables, il faut moins de k couleurs pour colorier X :

$$\chi(G) \leq k$$

Preuve de la proposition 10

On construit itérativement des parties S_i de X comme suit :

(i) On pose $S_0 = \emptyset$, $X_0 = X$, $i = 0$.

(ii) On choisit $x_i \in X_i$ et on choisit une partie stable S_{i+1} contenue dans X_i , maximale (pour l'inclusion) et contenant x_i ,

(iii) On pose $X_{i+1} = X_i \setminus S_{i+1}$, on incrémente i de 1 et on retourne au point (i).

Soit $x \in S_k$. Par maximalité des S_i pour $i < k$, x est adjacent à au moins un sommet de S_i . Donc x est de degré supérieur à $k - 1$. On a donc :

$$k \leq \Delta(G) + 1$$

Illustration de la preuve

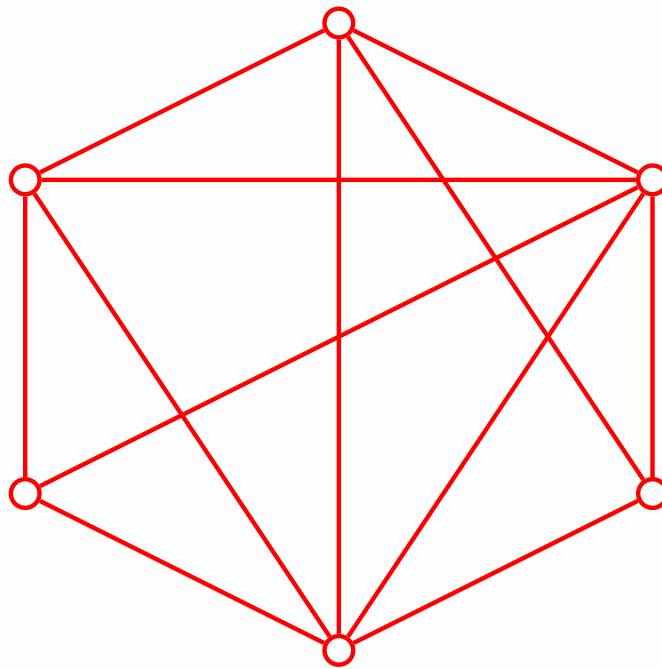


Illustration de la preuve

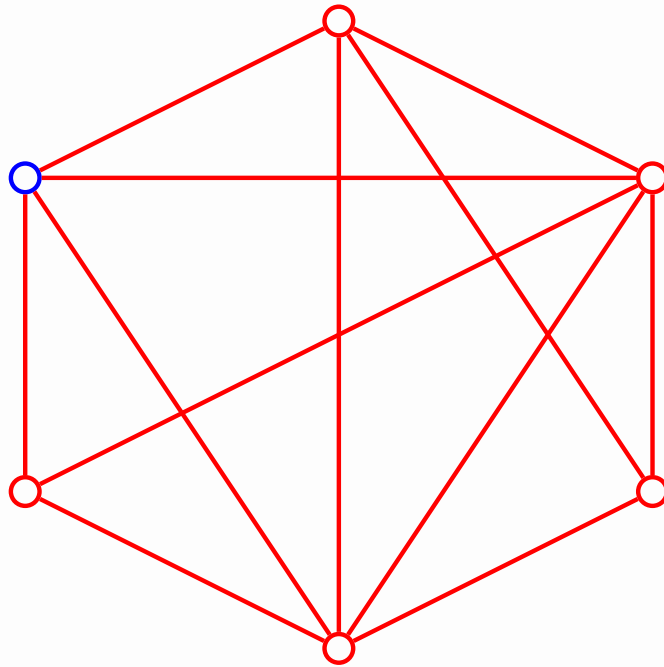


Illustration de la preuve

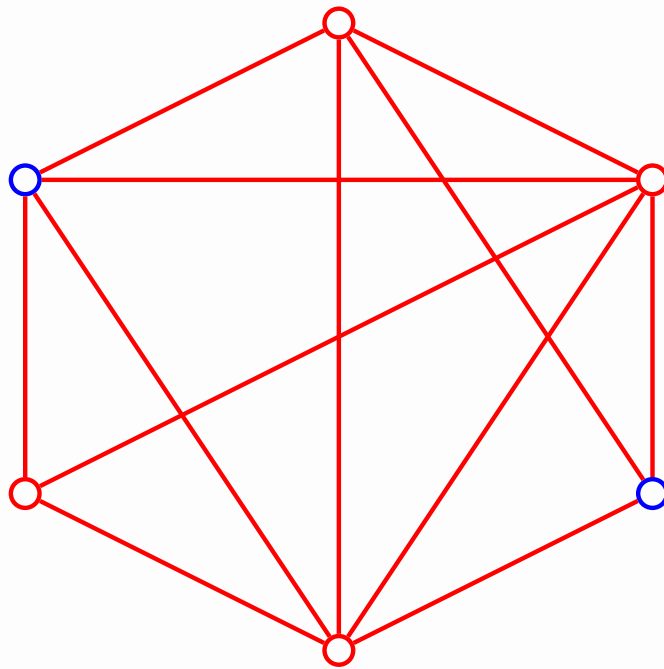


Illustration de la preuve

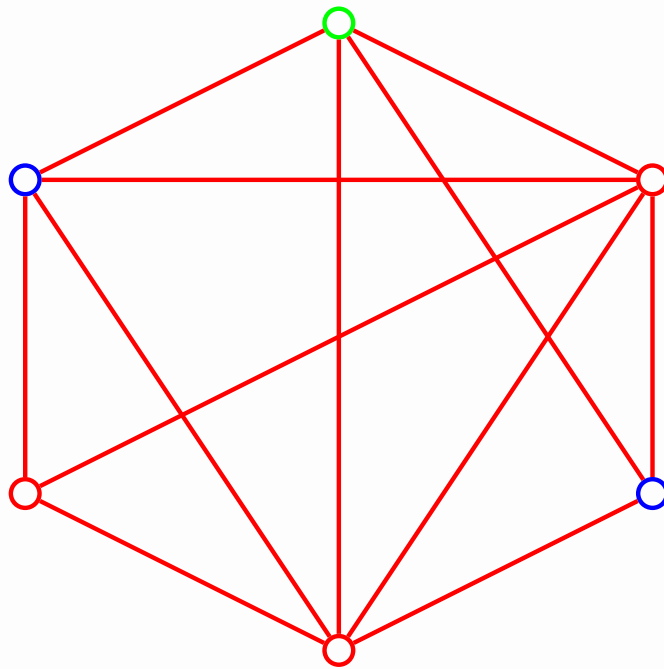


Illustration de la preuve

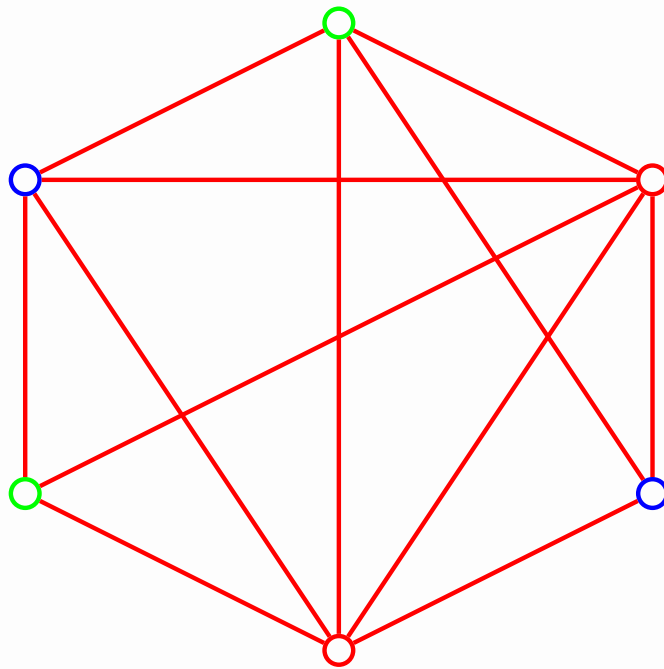
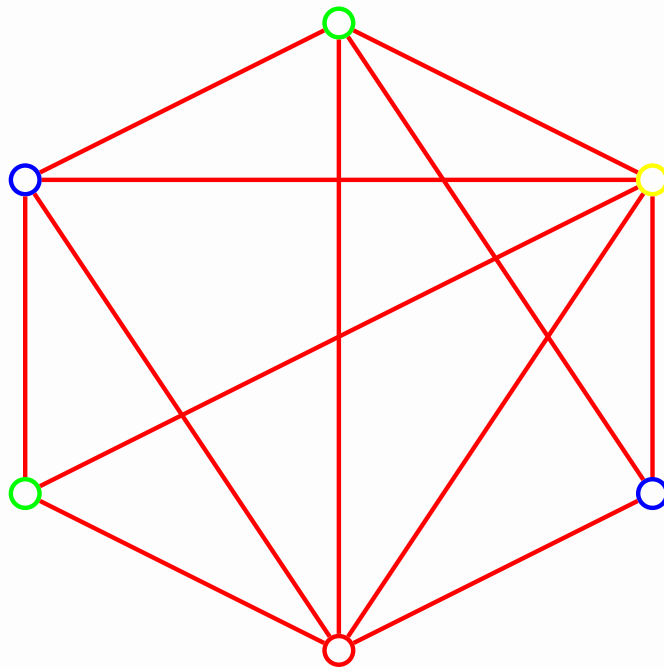


Illustration de la preuve



Graphes d'incompatibilité

On veut organiser un examen comportant, outre les matières communes, six matières d'option : Français, Anglais, Mécanique, Dessin, Informatique et Sport. Chaque épreuve nécessite une demi-journée et les profils des étudiants sont :

FAM DS IS IM

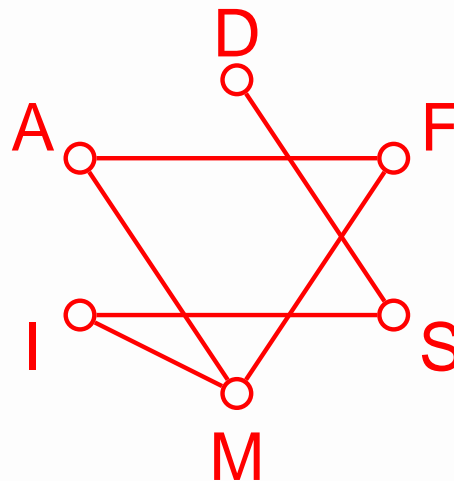
Combien faut-il de demi-journées ?

Graphes d'incompatibilité

On veut organiser un examen comportant, outre les matières communes, six matières d'option : Français, Anglais, Mécanique, Dessin, Informatique et Sport. Chaque épreuve nécessite une demi-journée et les profils des étudiants sont :

FAM DS IS IM

Combien faut-il de demi-journées ?

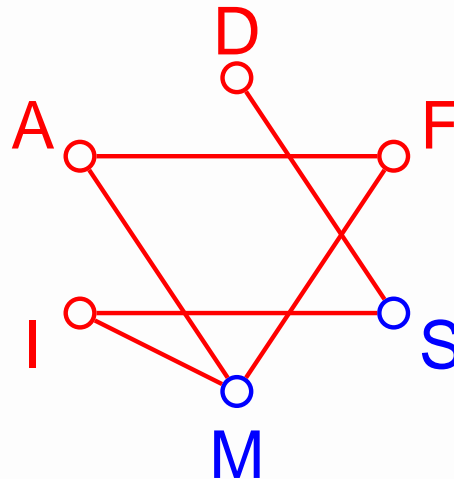


Graphes d'incompatibilité

On veut organiser un examen comportant, outre les matières communes, six matières d'option : Français, Anglais, Mécanique, Dessin, Informatique et Sport. Chaque épreuve nécessite une demi-journée et les profils des étudiants sont :

FAM DS IS IM

Combien faut-il de demi-journées ?

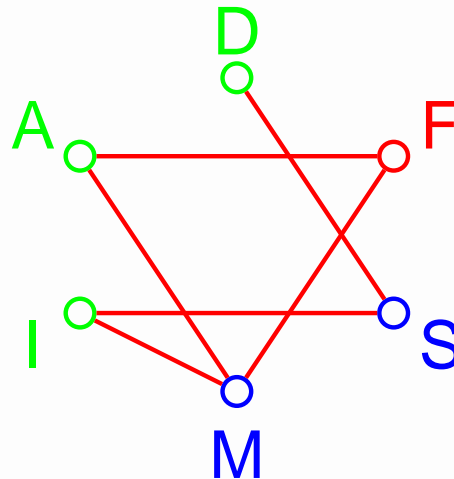


Graphes d'incompatibilité

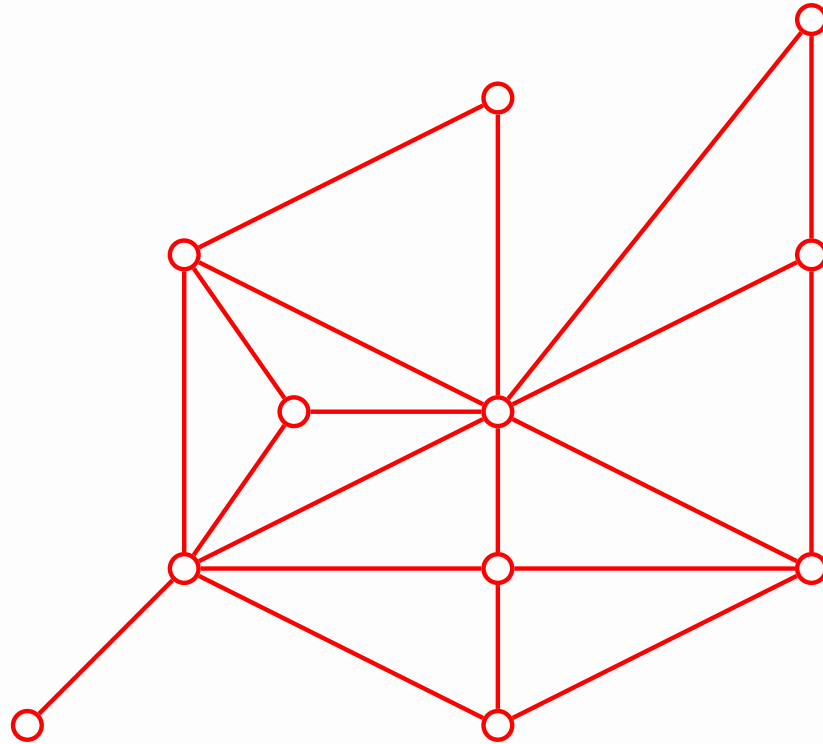
On veut organiser un examen comportant, outre les matières communes, six matières d'option : Français, Anglais, Mécanique, Dessin, Informatique et Sport. Chaque épreuve nécessite une demi-journée et les profils des étudiants sont :

FAM DS IS IM

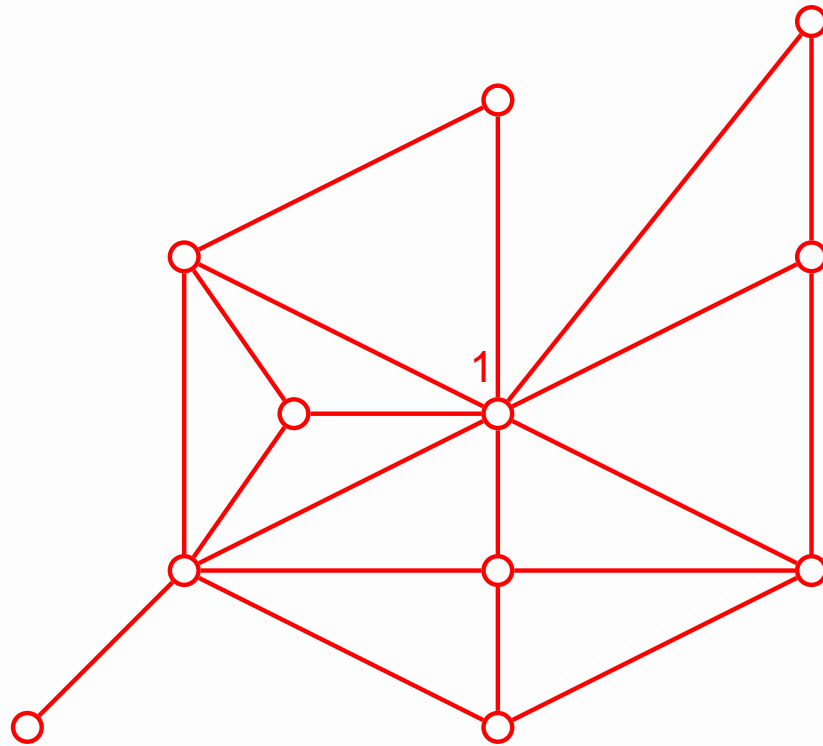
Combien faut-il de demi-journées ?



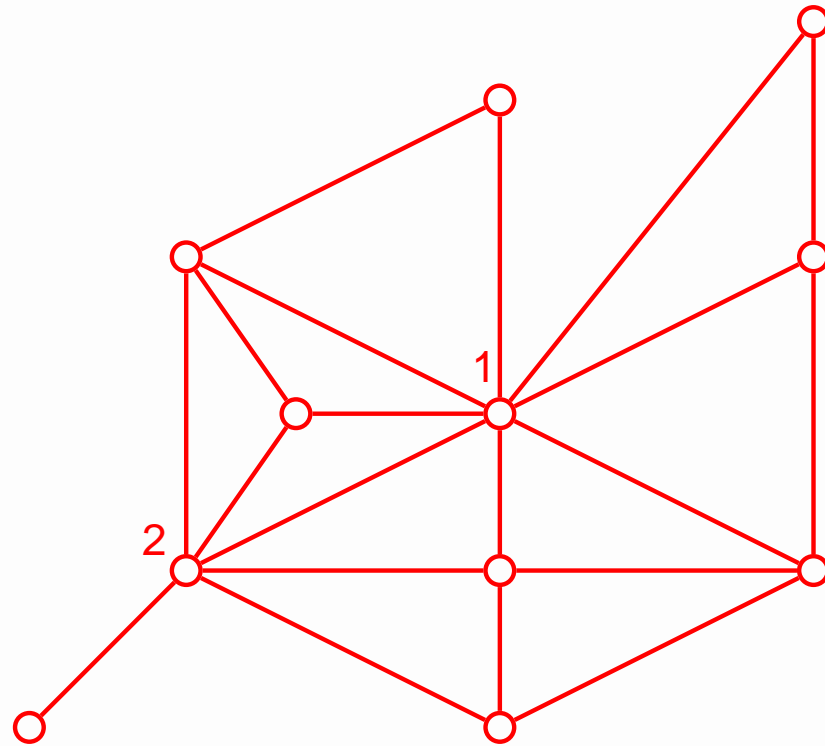
Algorithme de coloriage



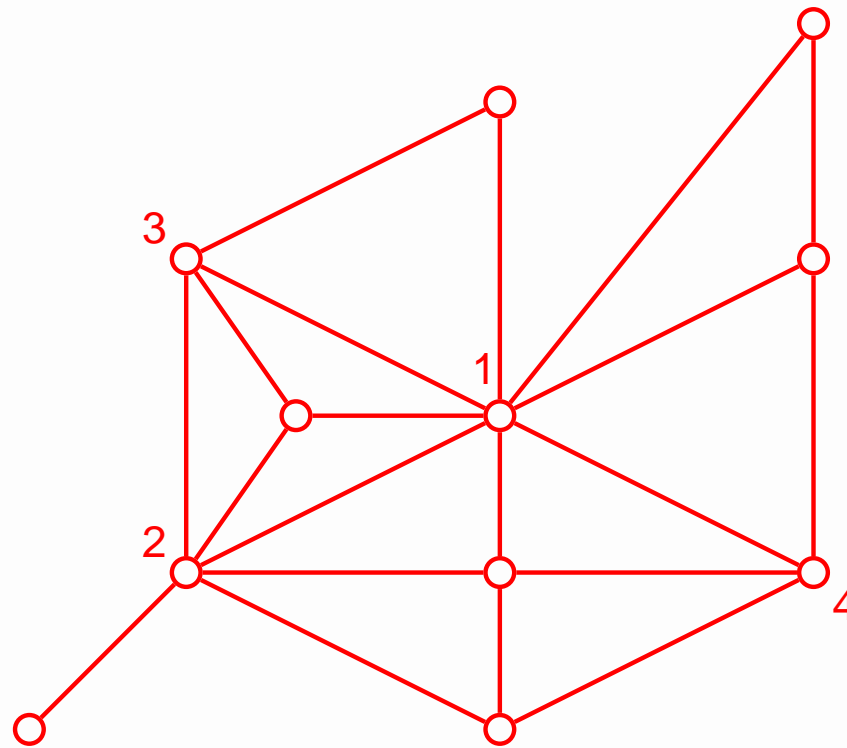
Algorithme de coloriage



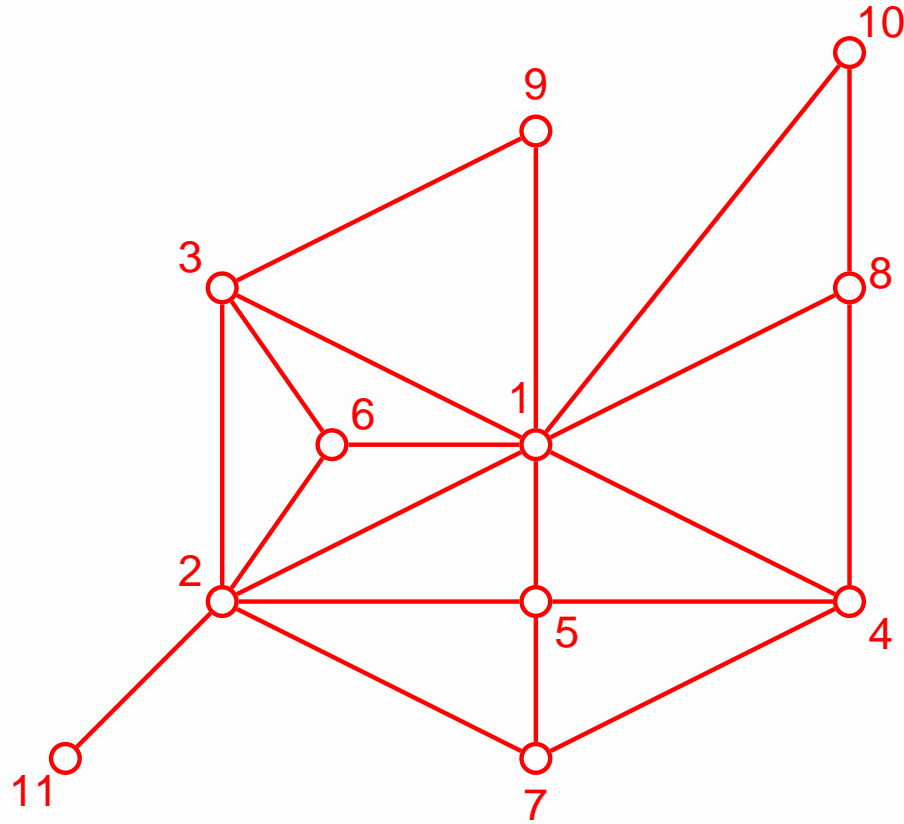
Algorithme de coloriage



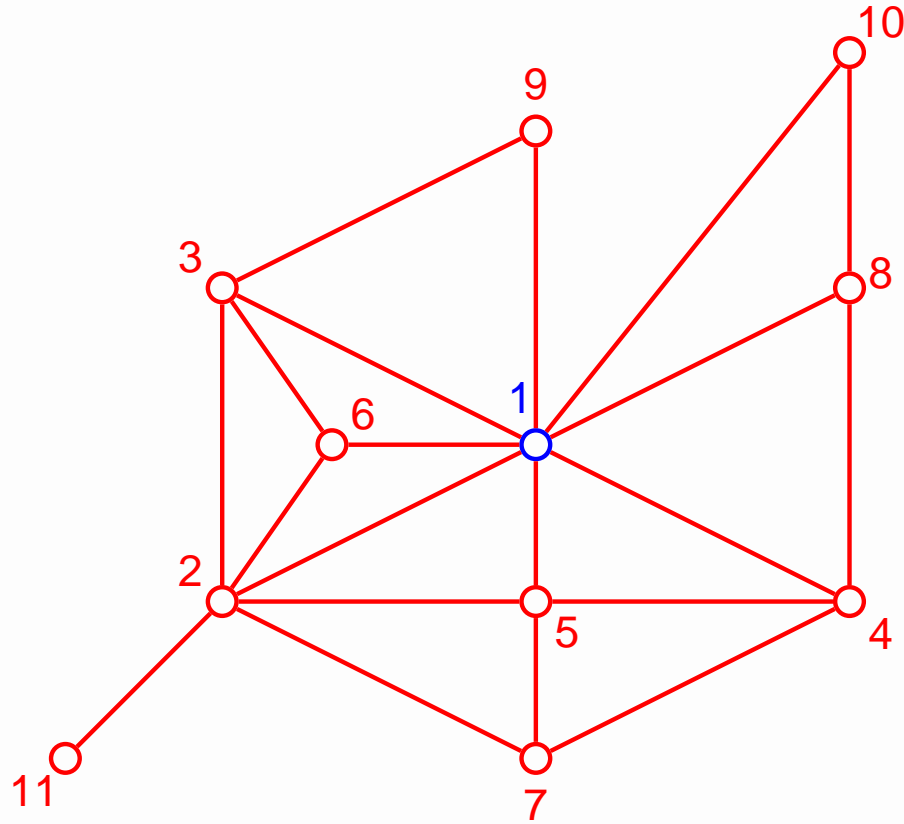
Algorithme de coloriage



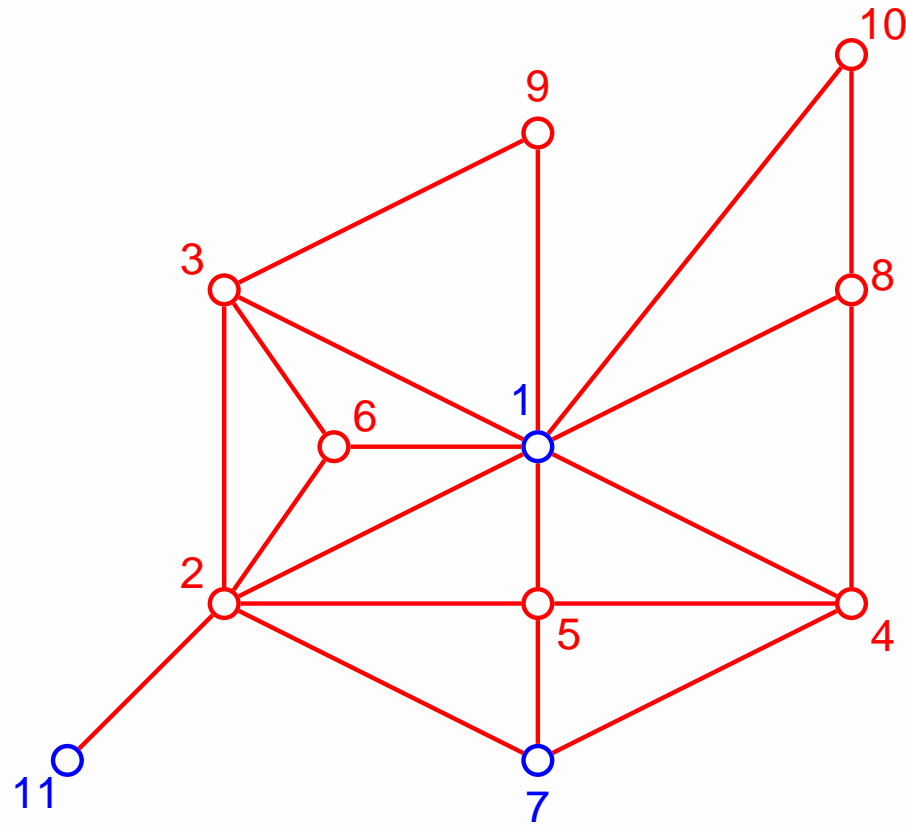
Algorithme de coloriage



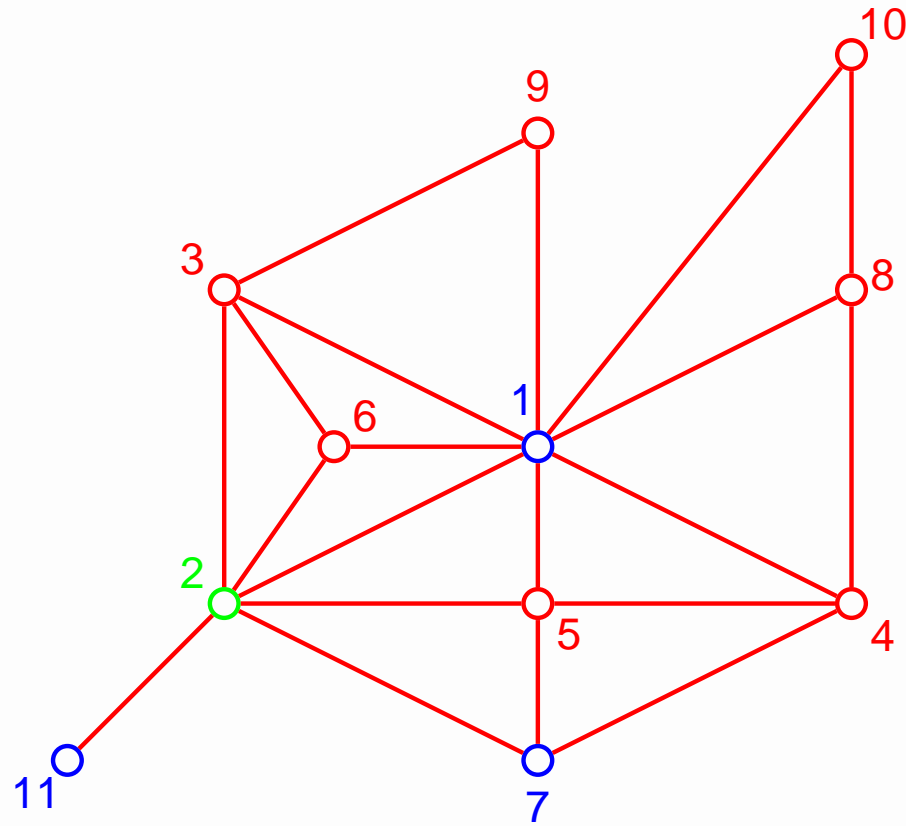
Algorithme de coloriage



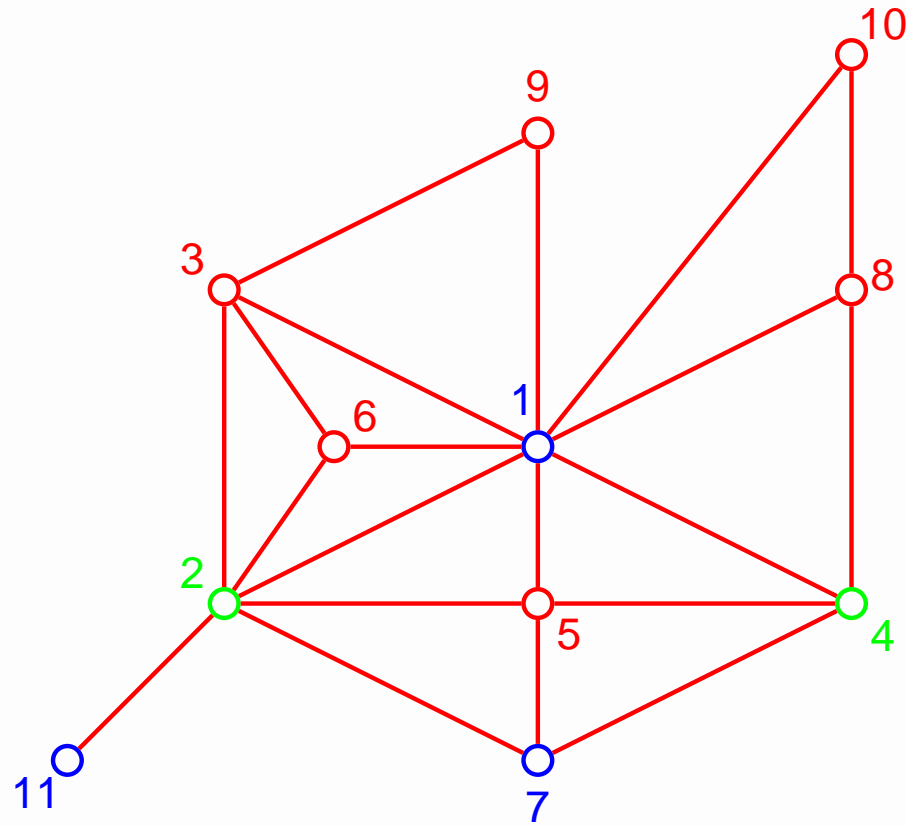
Algorithme de coloriage



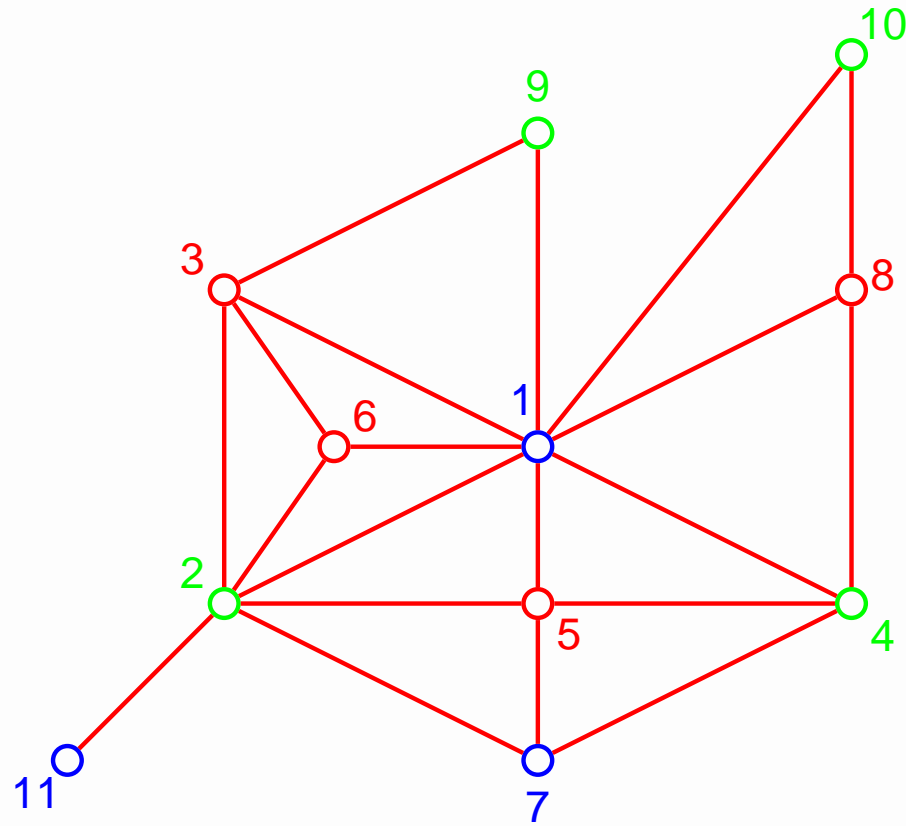
Algorithme de coloriage



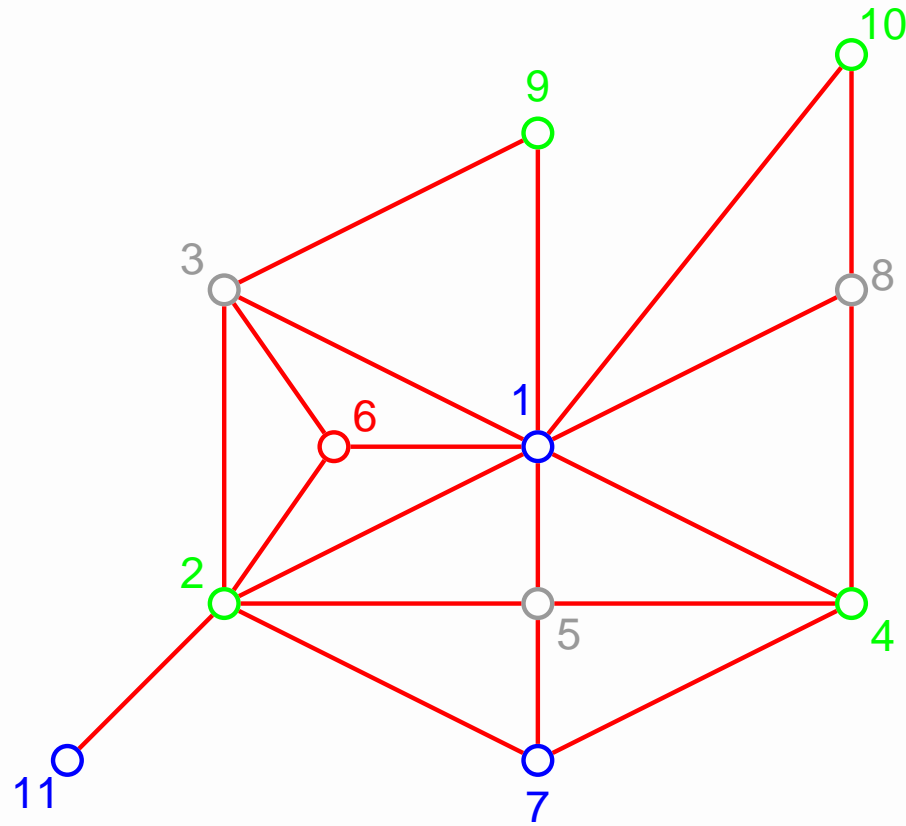
Algorithme de coloriage



Algorithme de coloriage



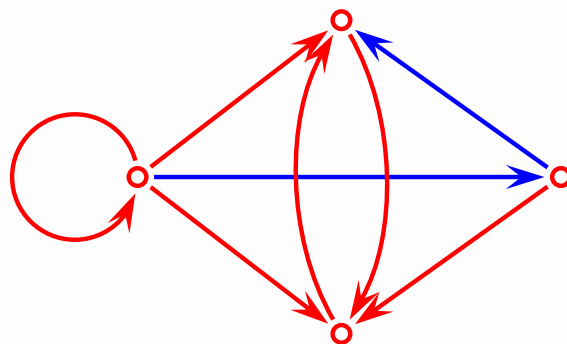
Algorithme de coloriage



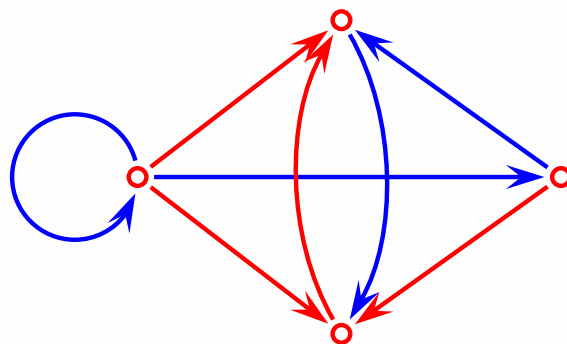
Théorème des quatre couleurs

Théorème 11. (K. Appel et W. Haken 1976)

Soit G un graphe planaire non orienté sans boucle.
Alors son nombre chromatique $\chi(G)$ est inférieur ou égal à 4.



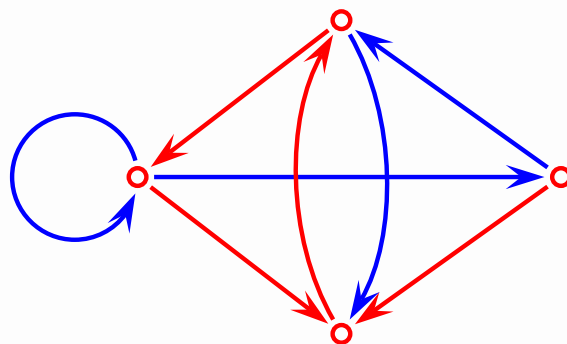
Définition 12. Soit G un graphe orienté et a et b deux arêtes de G . On dit que a est composable avec b si son but est la source de a .



Définition 12. Soit G un graphe orienté et a et b deux arêtes de G . On dit que a est composable avec b si son but est la source de a .

Une chaîne de G est une suite d'arêtes $\gamma = a_1 \cdots a_m$ de G telle que pour tout i , a_i est composable avec a_{i+1} .

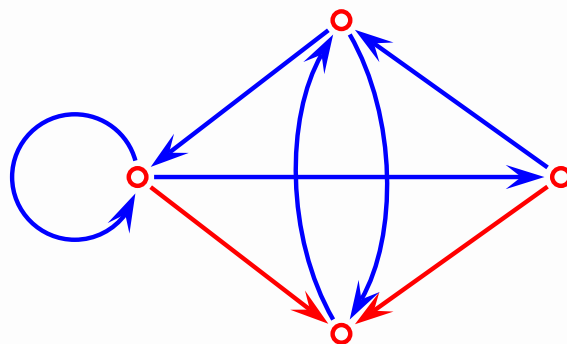
Chaines et cycles



Définition 12. Soit G un graphe orienté et a et b deux arêtes de G . On dit que a est composable avec b si son but est la source de a .

Une chaîne de G est une suite d'arêtes $\gamma = a_1 \cdots a_m$ de G telle que pour tout i , a_i est composable avec a_{i+1} .

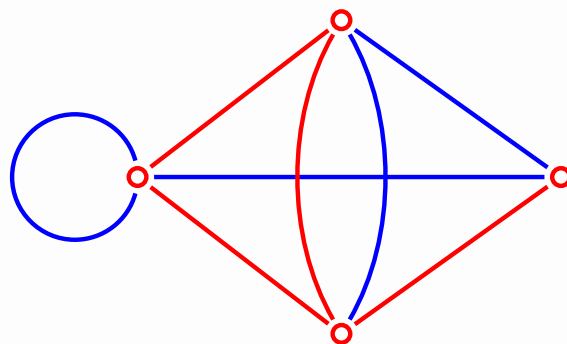
La source de γ est celle a_1 et son but est celui de a_m .



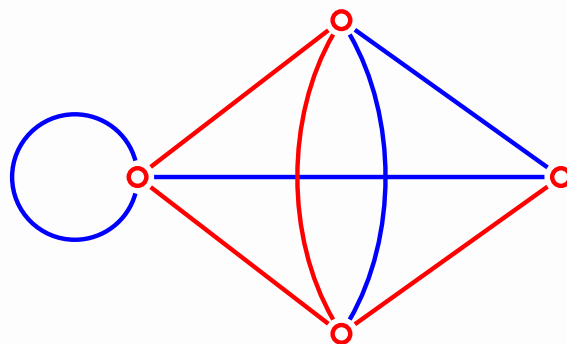
Définition 12. Soit G un graphe orienté et a et b deux arêtes de G . On dit que a est composable avec b si son but est la source de a .

Une chaîne de G est une suite d'arêtes $\gamma = a_1 \cdots a_m$ de G telle que pour tout i , a_i est composable avec a_{i+1} .

Un cycle de G est un chaîne dont la source et le but sont égaux.



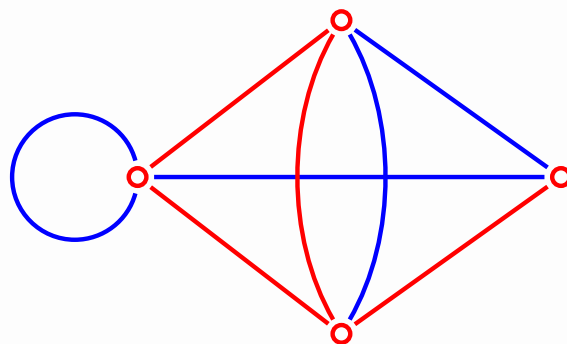
Définition 13. Soit G un graphe non orienté. Une chaîne (resp. un cycle) de G est une suite d'arêtes $\gamma = a_1 \cdots a_m$ de G telle qu'il existe une orientation de G pour laquelle γ est une chaîne (resp. un cycle).



Définition 13. Soit G un graphe non orienté. Une chaîne (resp. un cycle) de G est une suite d'arêtes $\gamma = a_1 \cdots a_m$ de G telle qu'il existe une orientation de G pour laquelle γ est une chaîne (resp. un cycle).

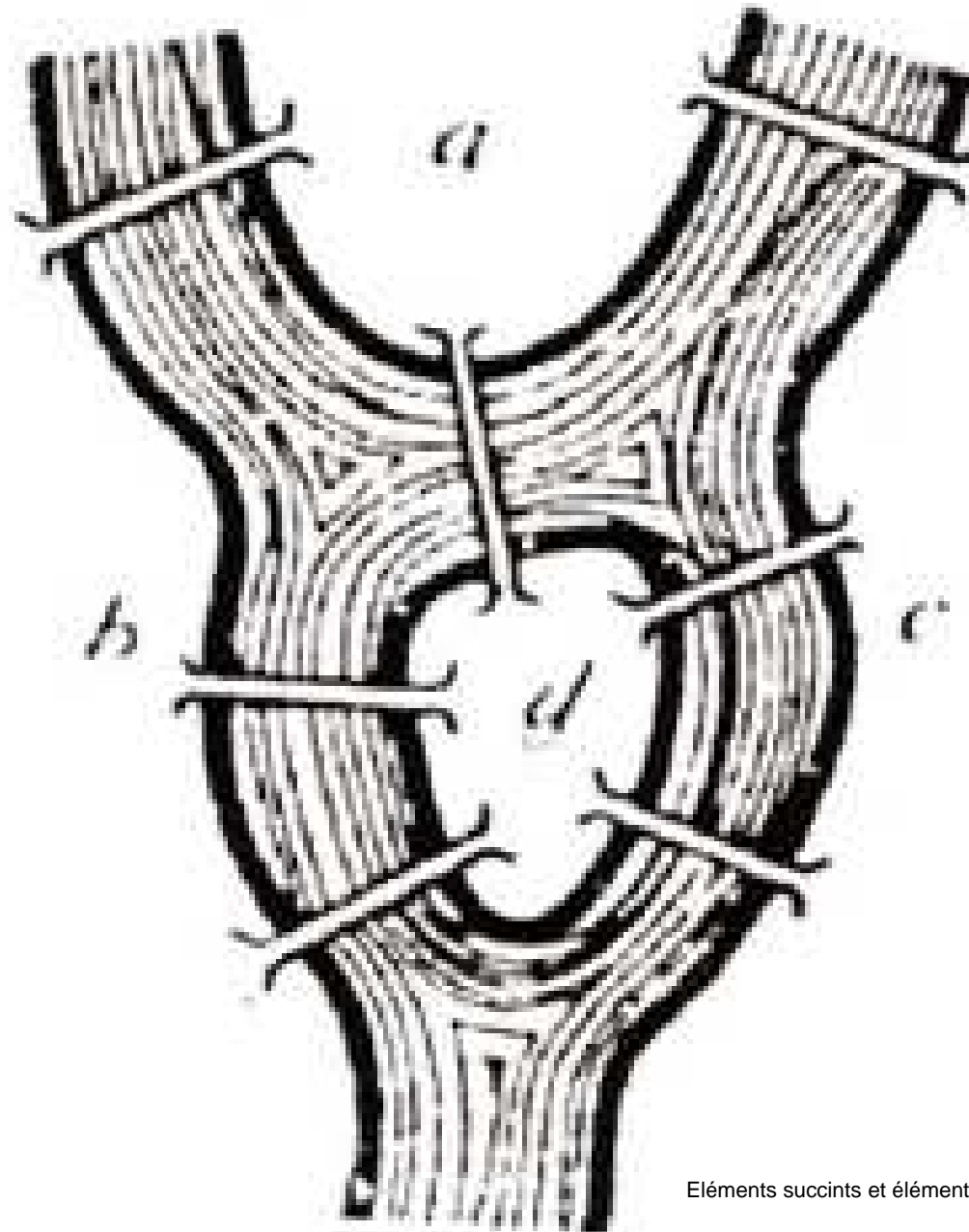
Une chaîne (resp. un cycle) est dite simple si elle parcourt au plus une fois tout arête du graphe.

Chaines et cycles



Une chaîne (resp. un cycle) est dite simple si elle parcourt au plus une fois tout arête du graphe.

Une chaîne (resp. un cycle) est dite eulérienne si elle parcourt exactement une fois chaque arête.

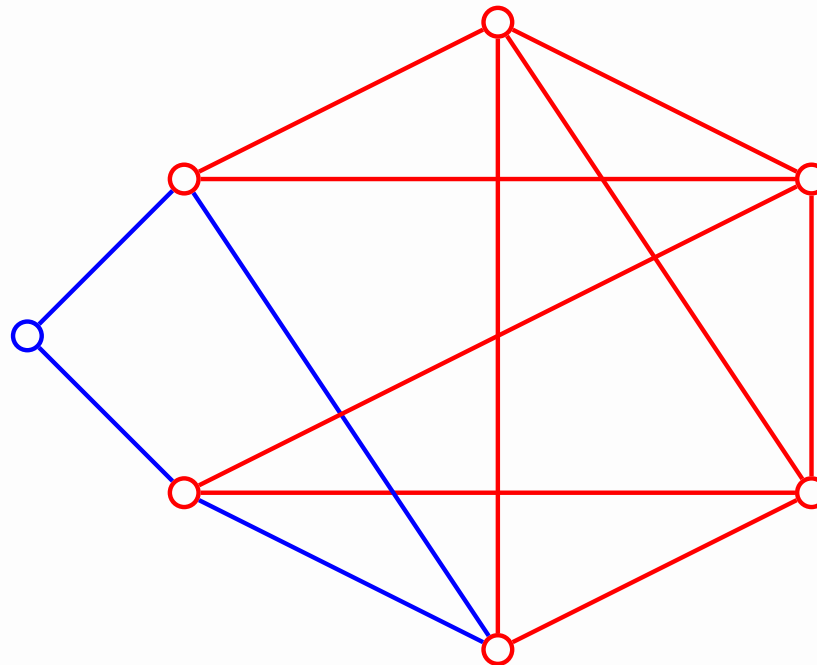


Théorème 14. (Euler 1776)

Un graphe non orienté connexe possède un cycle eulérien si et seulement si les degrés de tous ses sommets sont pairs.

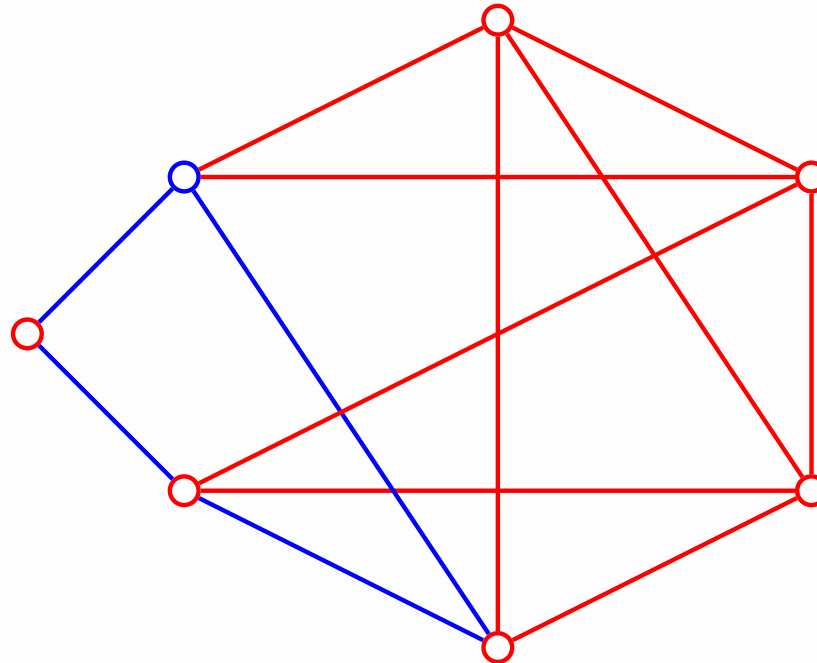
Théorème 14. (Euler 1776)

Un graphe non orienté connexe possède un cycle eulérien si et seulement si les degrés de tous ses sommets sont pairs.



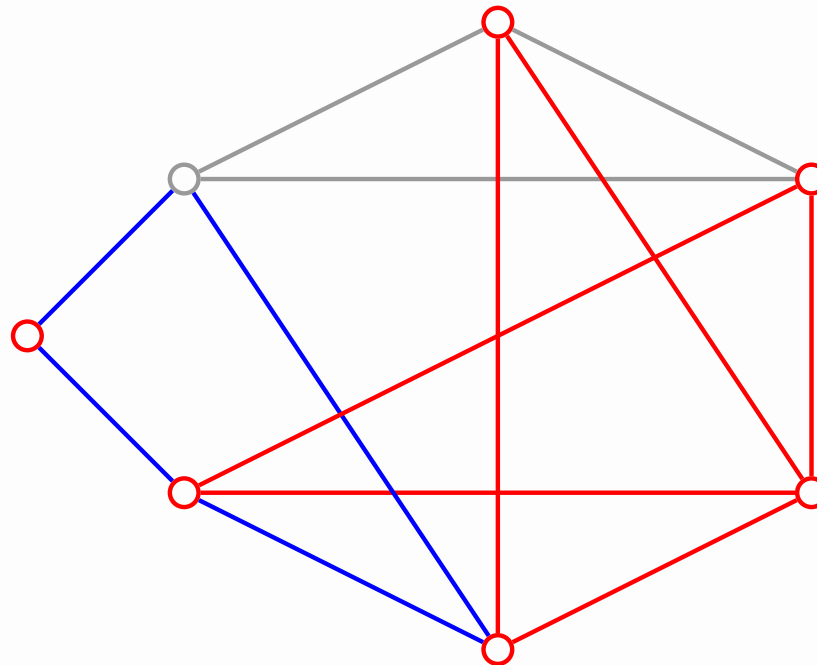
Théorème 14. (Euler 1776)

Un graphe non orienté connexe possède un cycle eulérien si et seulement si les degrés de tous ses sommets sont pairs.



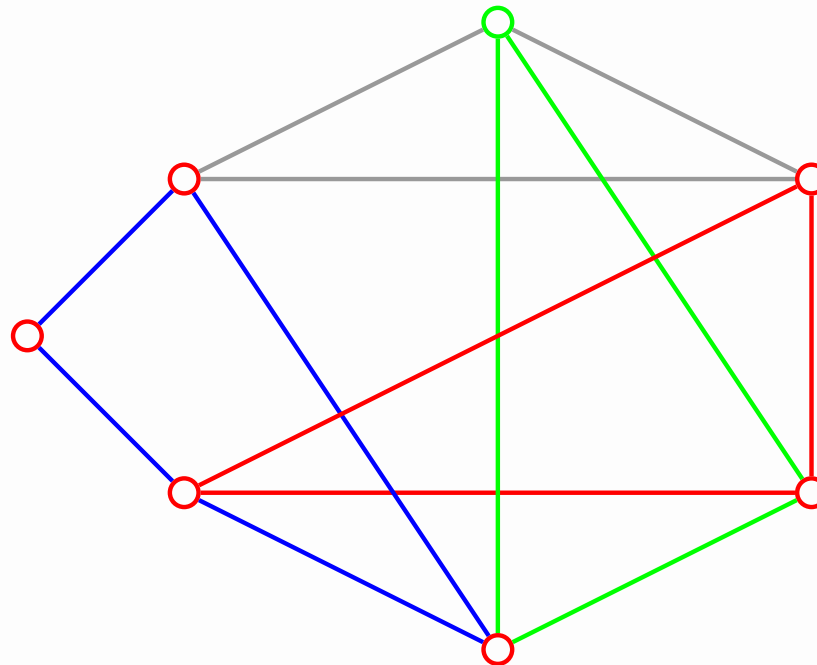
Théorème 14. (Euler 1776)

Un graphe non orienté connexe possède un cycle eulérien si et seulement si les degrés de tous ses sommets sont pairs.



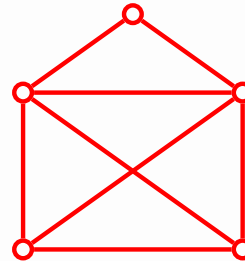
Théorème 14. (Euler 1776)

Un graphe non orienté connexe possède un cycle eulérien si et seulement si les degrés de tous ses sommets sont pairs.



Théorème 14. (Euler 1776)

Un graphe non orienté connexe possède un cycle eulérien si et seulement si les degrés de tous ses sommets sont pairs.

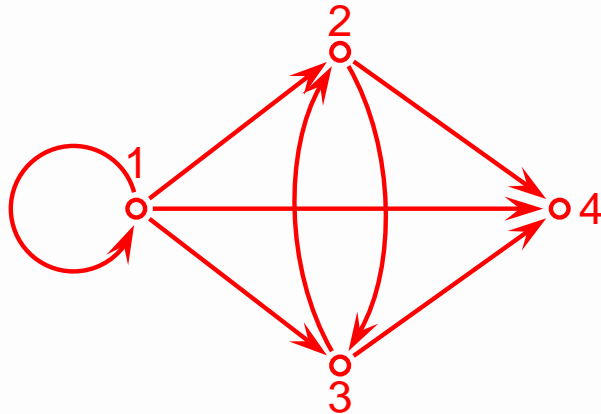


Corollaire 15. Un graphe non orienté possède une chaîne eulérienne si et seulement si il a exactement deux sommets de degrés impairs.

Matrice d'un graphe

Définition 16.

La matrice d'un graphe **orienté** dont les sommets sont numérotés de 1 à n est la matrice $n \times n$ dont chaque coefficient $a_{i,j}$ est le nombre d'arêtes allant de i vers j .

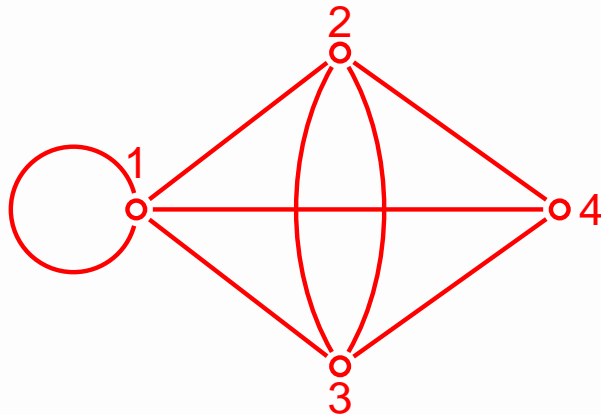


$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice d'un graphe

Définition 16.

La matrice d'un graphe **non orienté** dont les sommets sont numérotés de 1 à n est la matrice $n \times n$ dont chaque coefficient $a_{i,j}$ est le nombre d'arêtes joignant i et j .

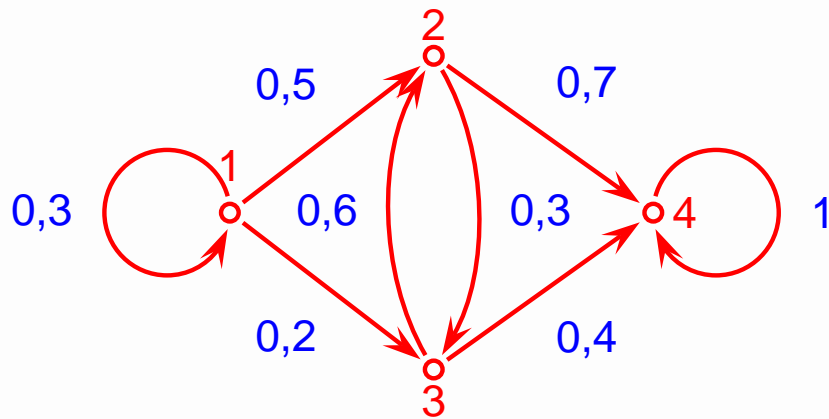


$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice d'un graphe

Définition 16.

La matrice d'un graphe **probabiliste** dont les sommets sont numérotés de 1 à n est la matrice $n \times n$ dont chaque coefficient $a_{i,j}$ est nul ou égal au poids de l'arête allant de i vers j , si elle existe .



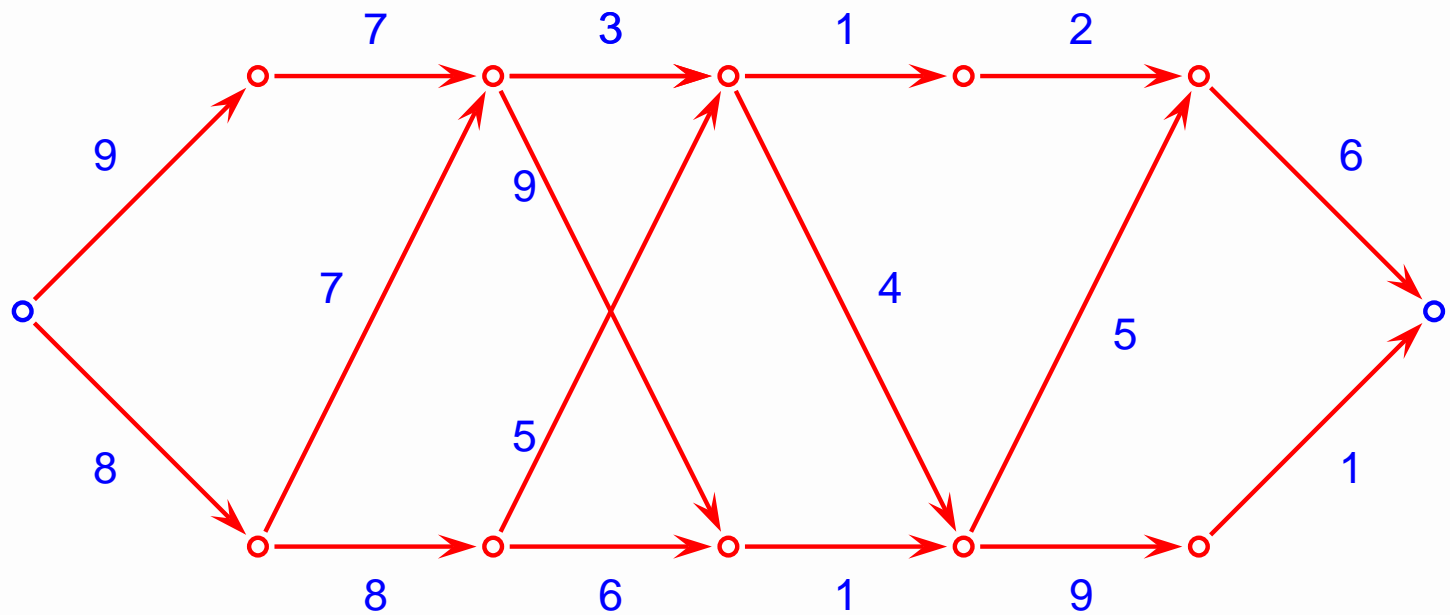
$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Algorithme de Dijkstra

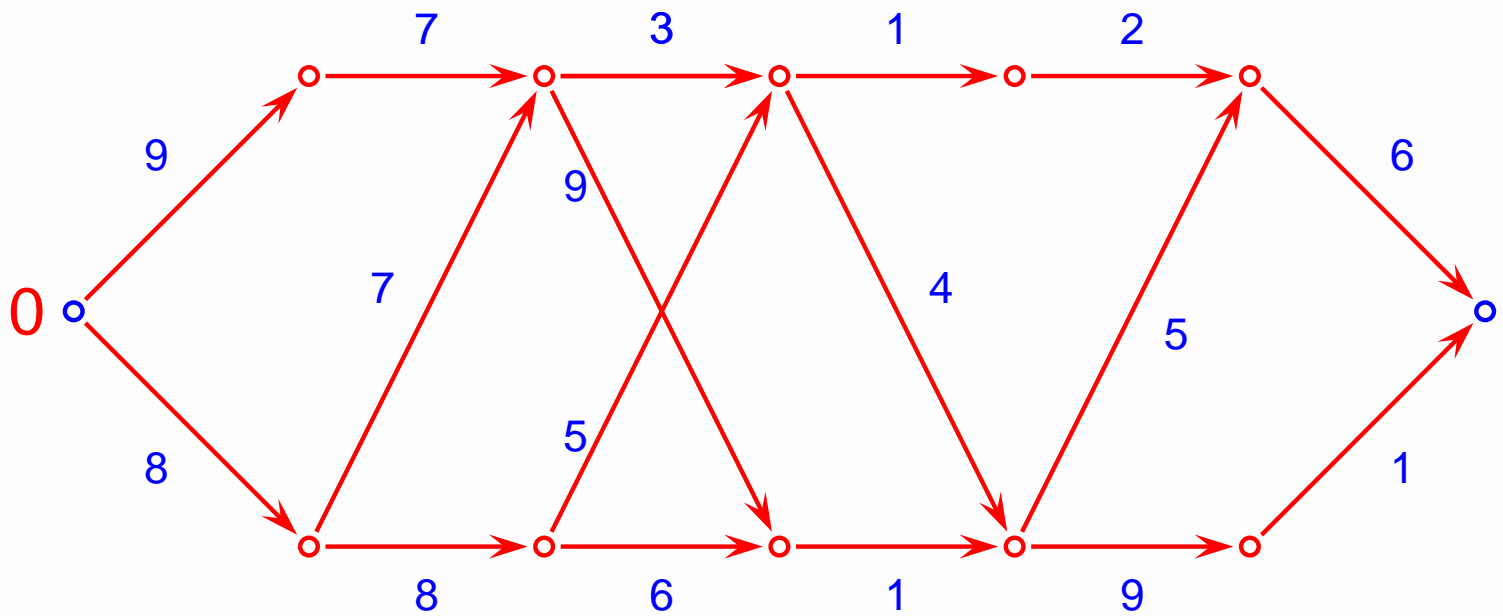
Exercice : (Bréal TES, 58 page 250)

Partant de Moscou, Michel Strogoff doit rejoindre Irkoutsk. A chaque liaison entre deux villes, il évalue ses risques d'échec sur 10. Ignorant le calcul de probabilité, il choisit son itinéraire en minimisant la somme globale des risques.

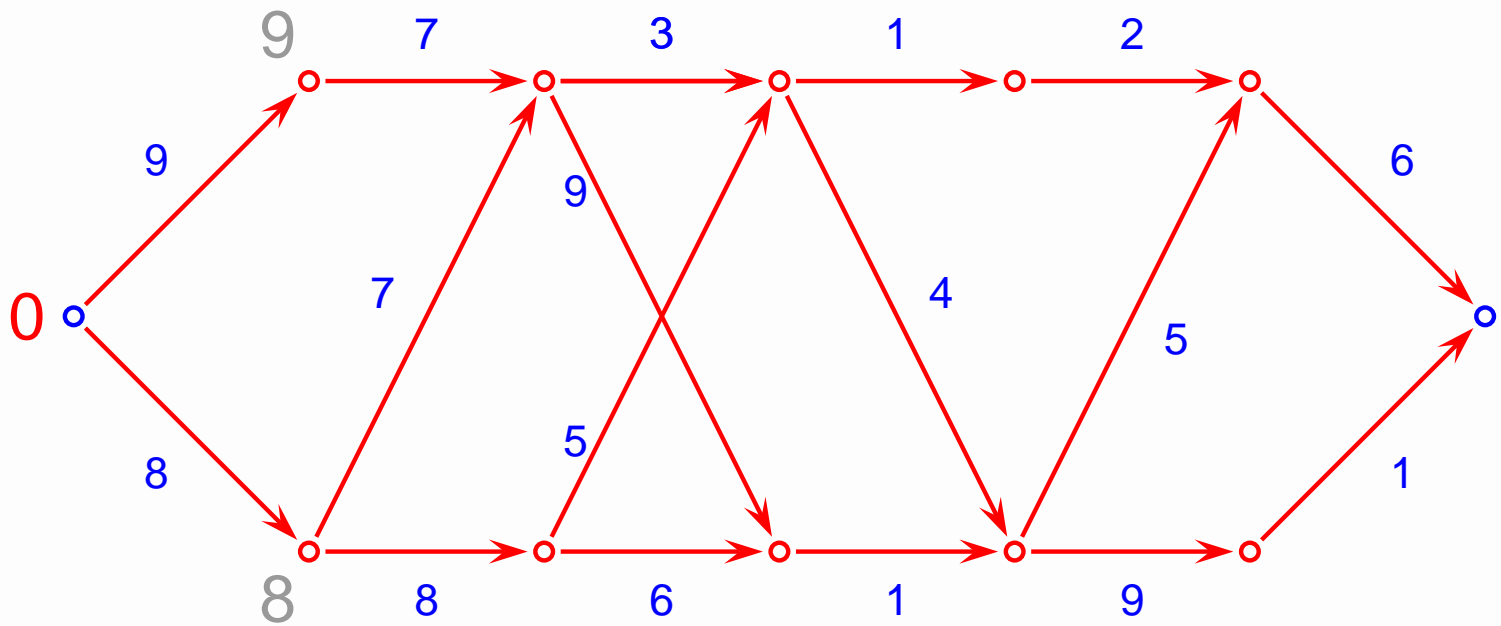
Algorithme de Dijkstra



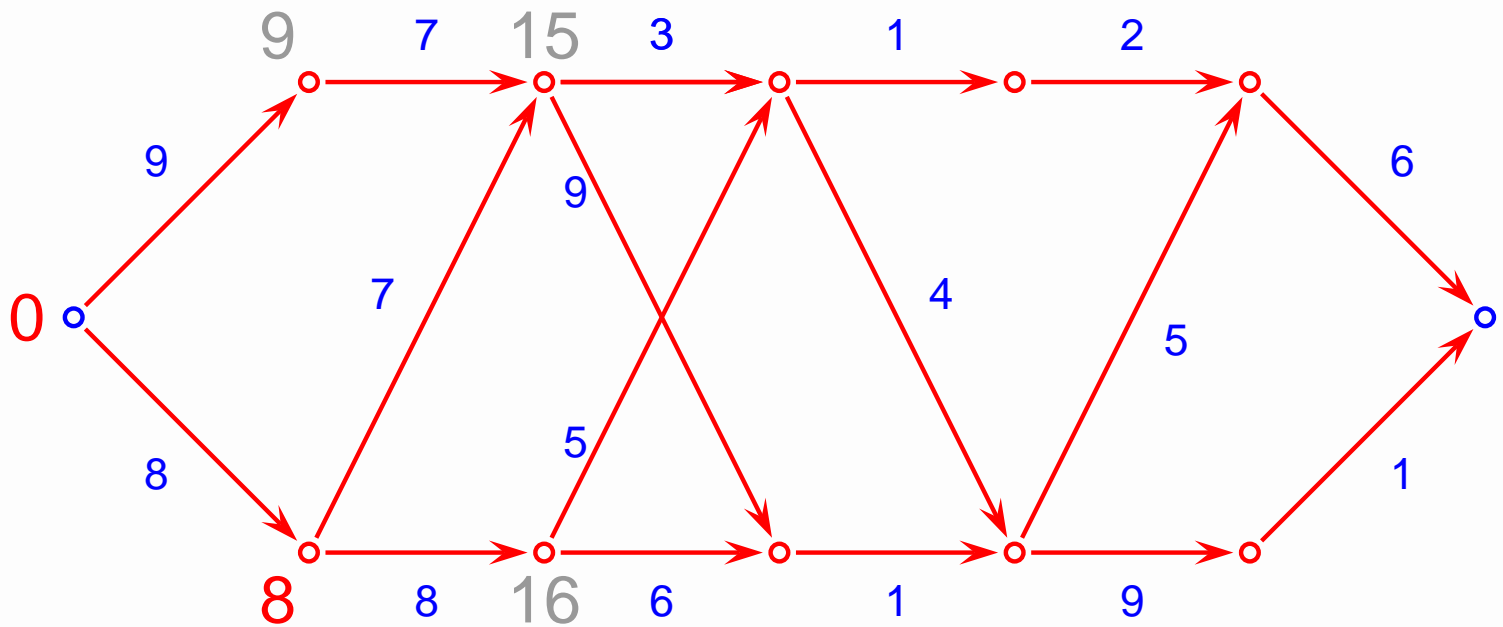
Algorithme de Dijkstra



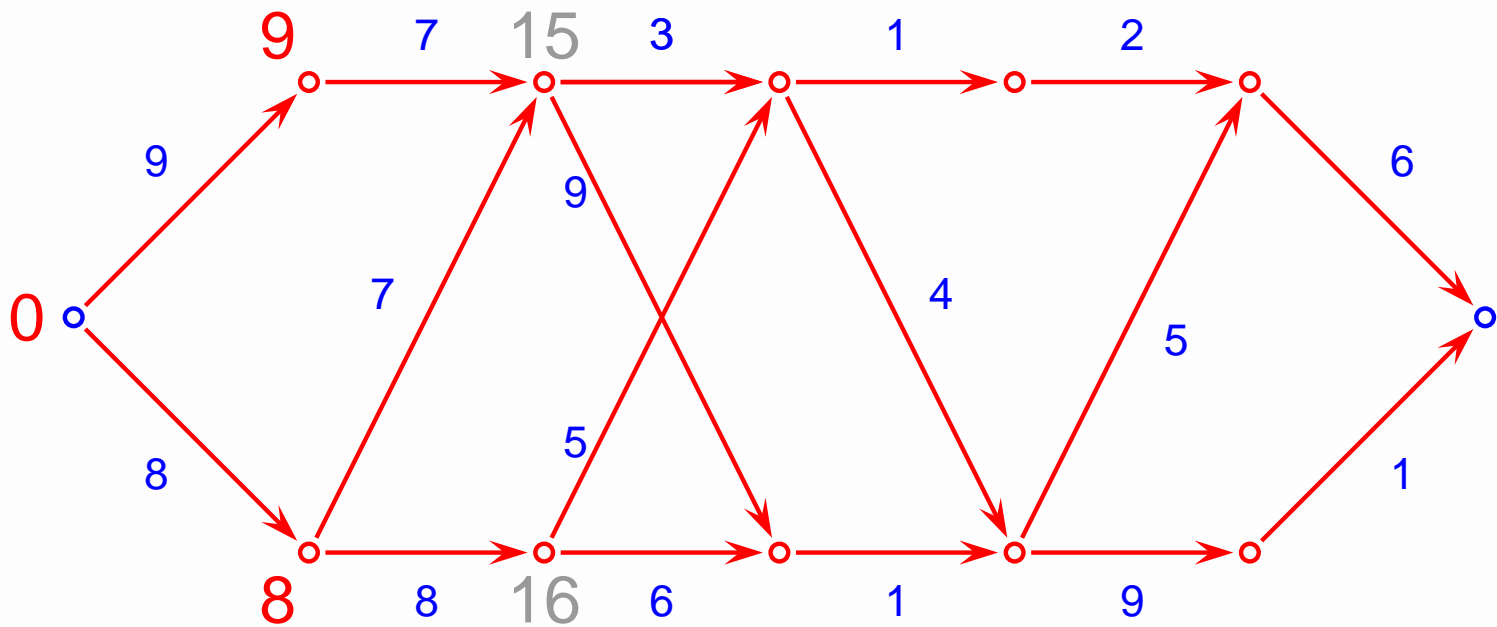
Algorithme de Dijkstra



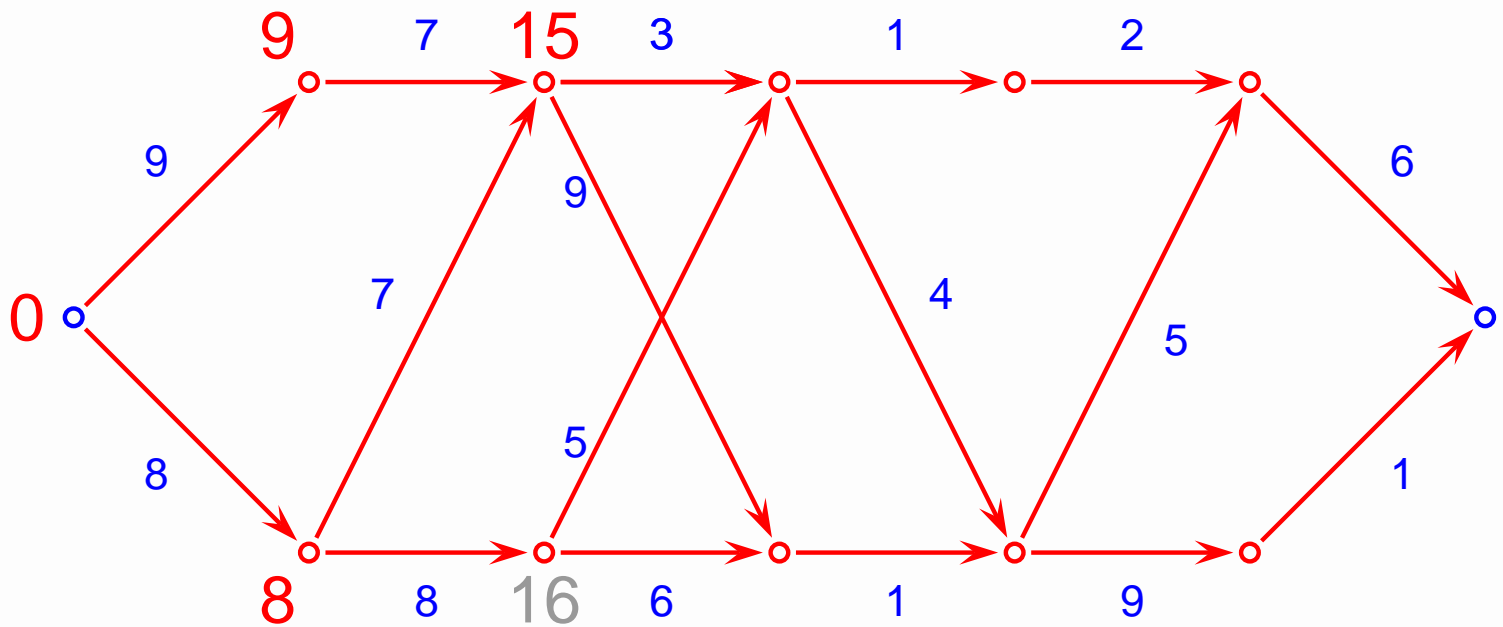
Algorithme de Dijkstra



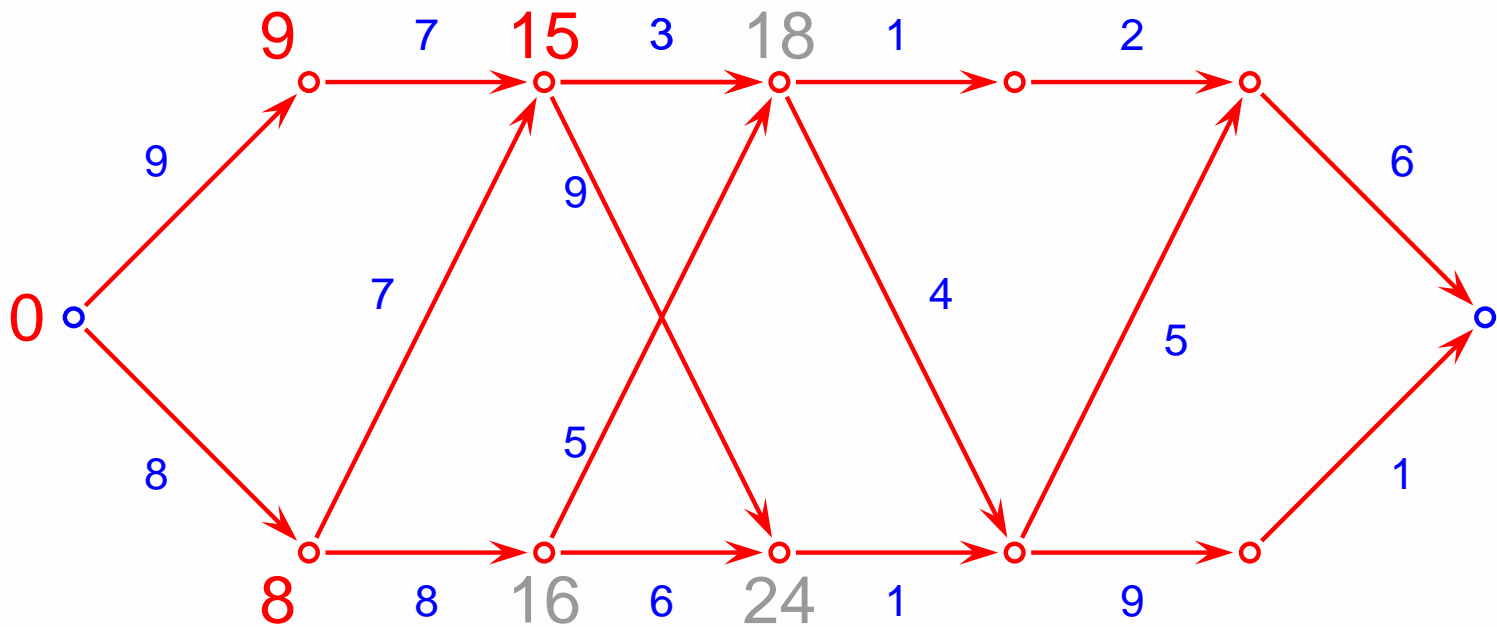
Algorithme de Dijkstra



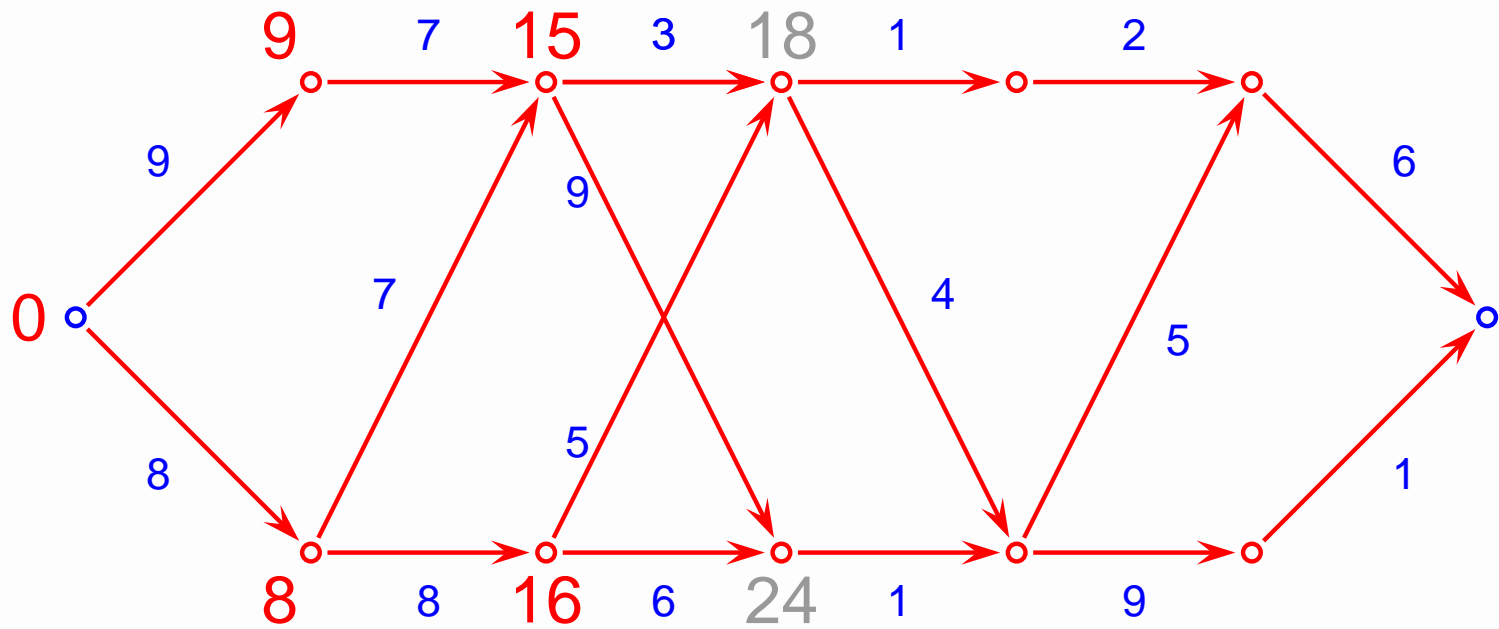
Algorithme de Dijkstra



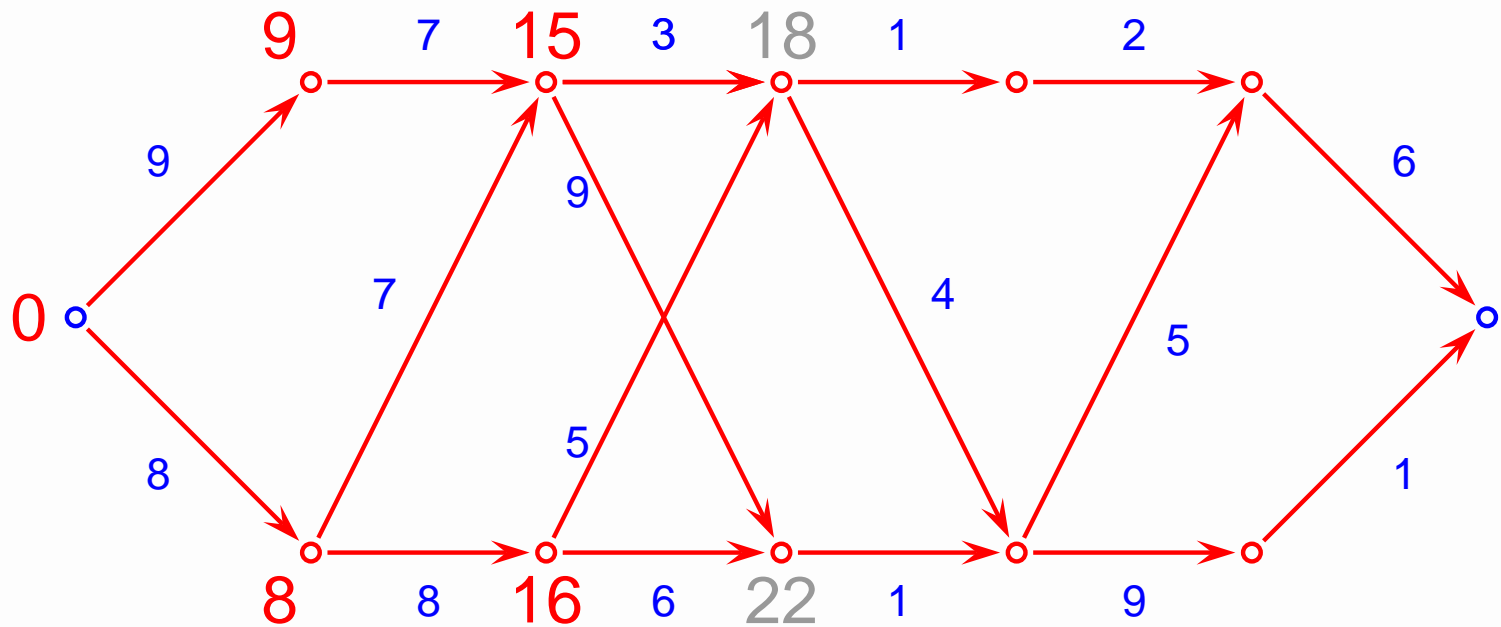
Algorithme de Dijkstra



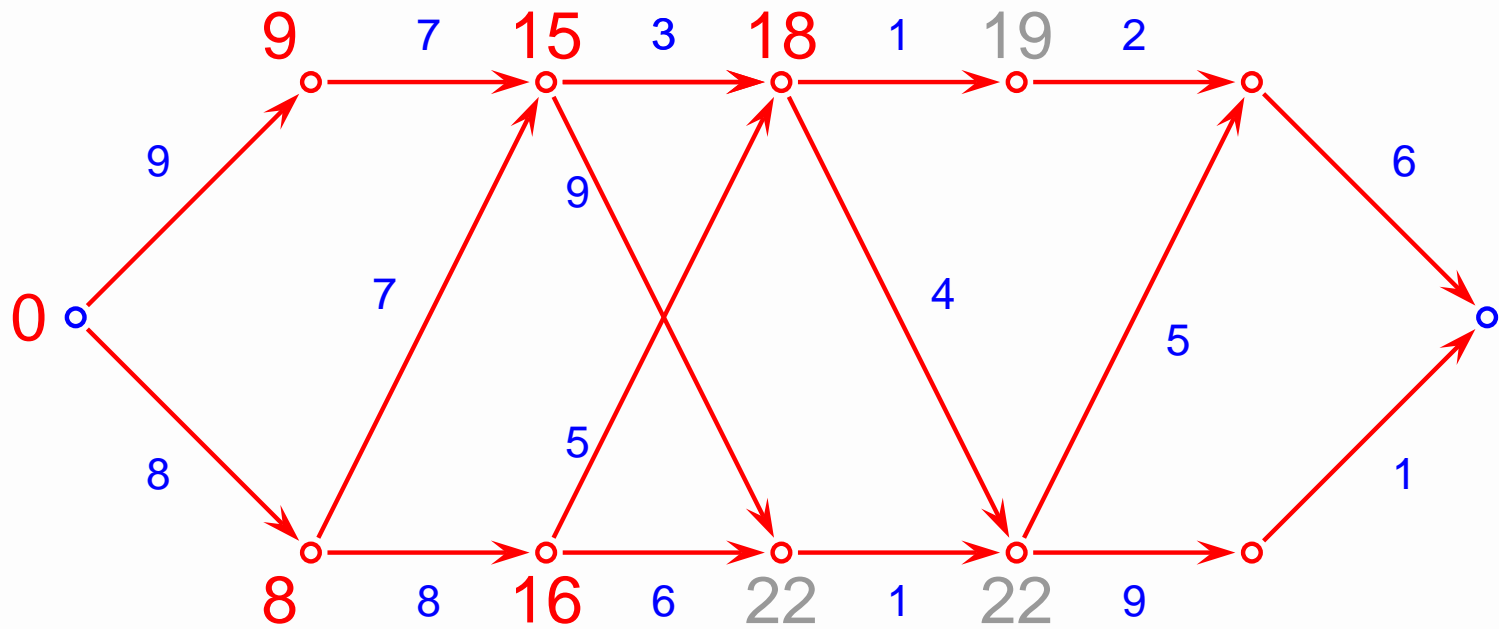
Algorithme de Dijkstra



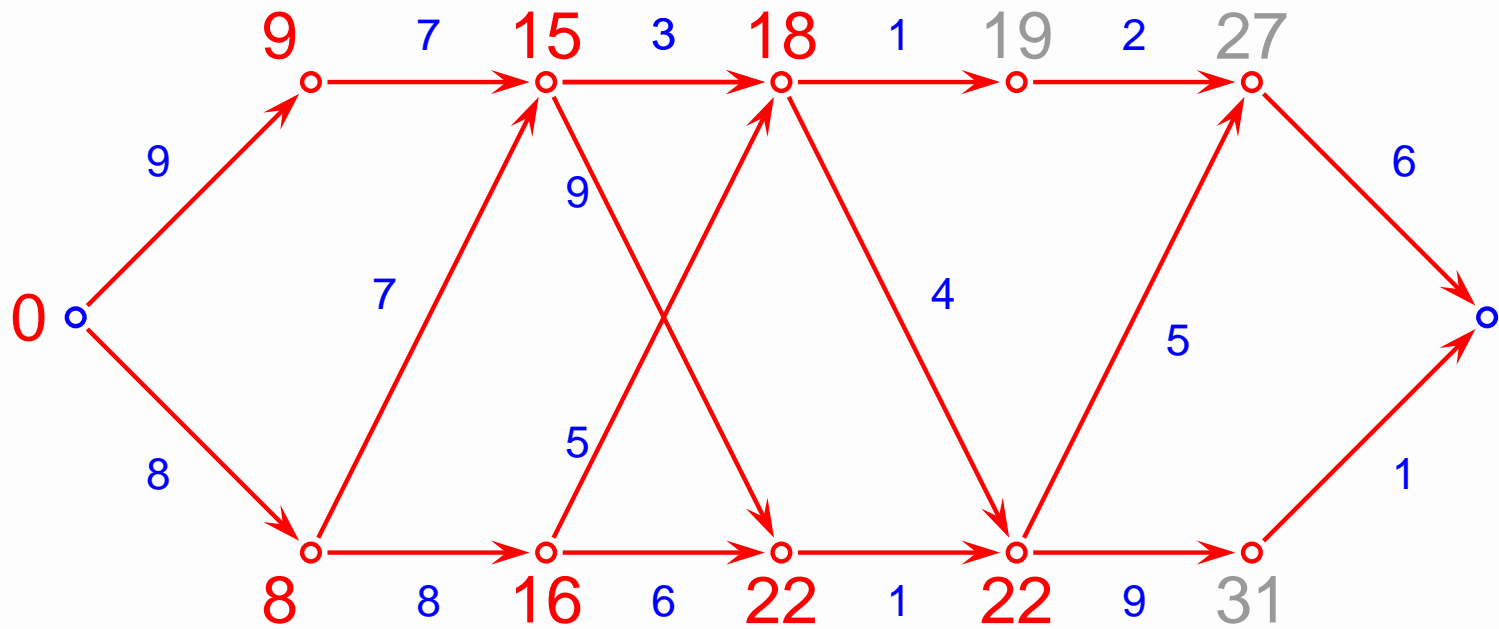
Algorithme de Dijkstra



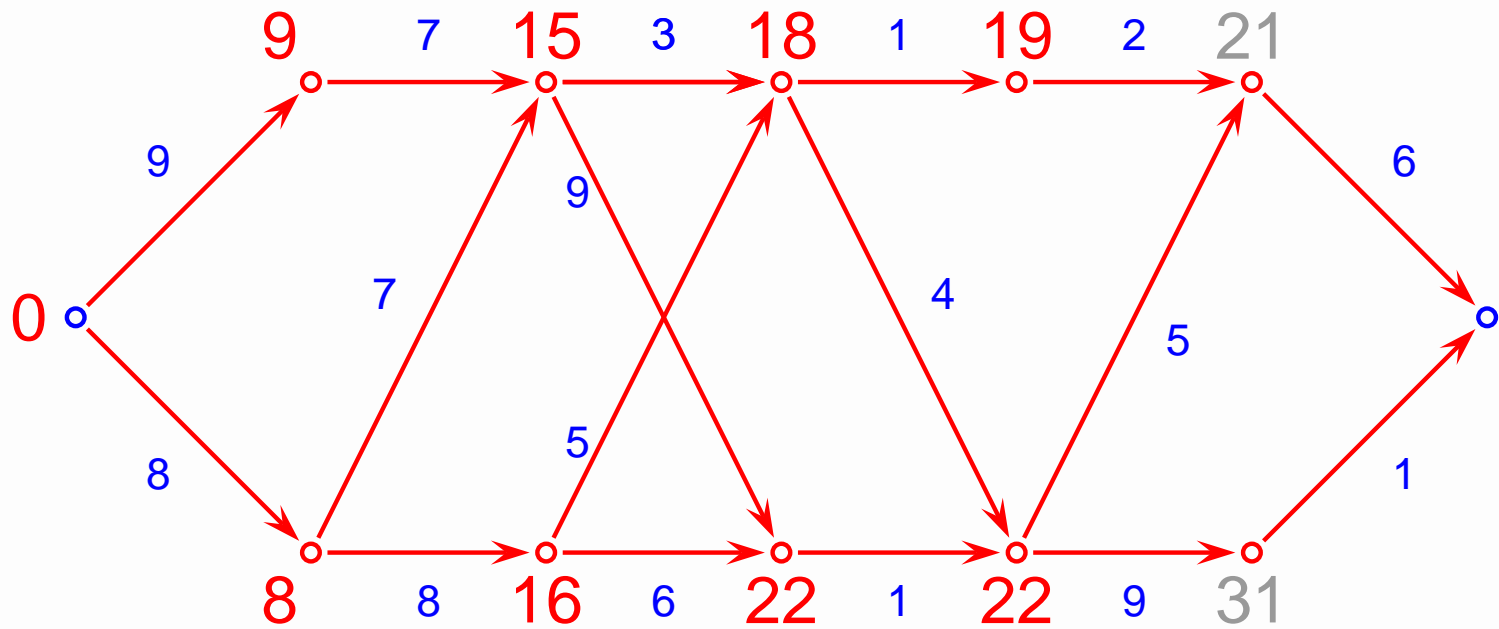
Algorithme de Dijkstra



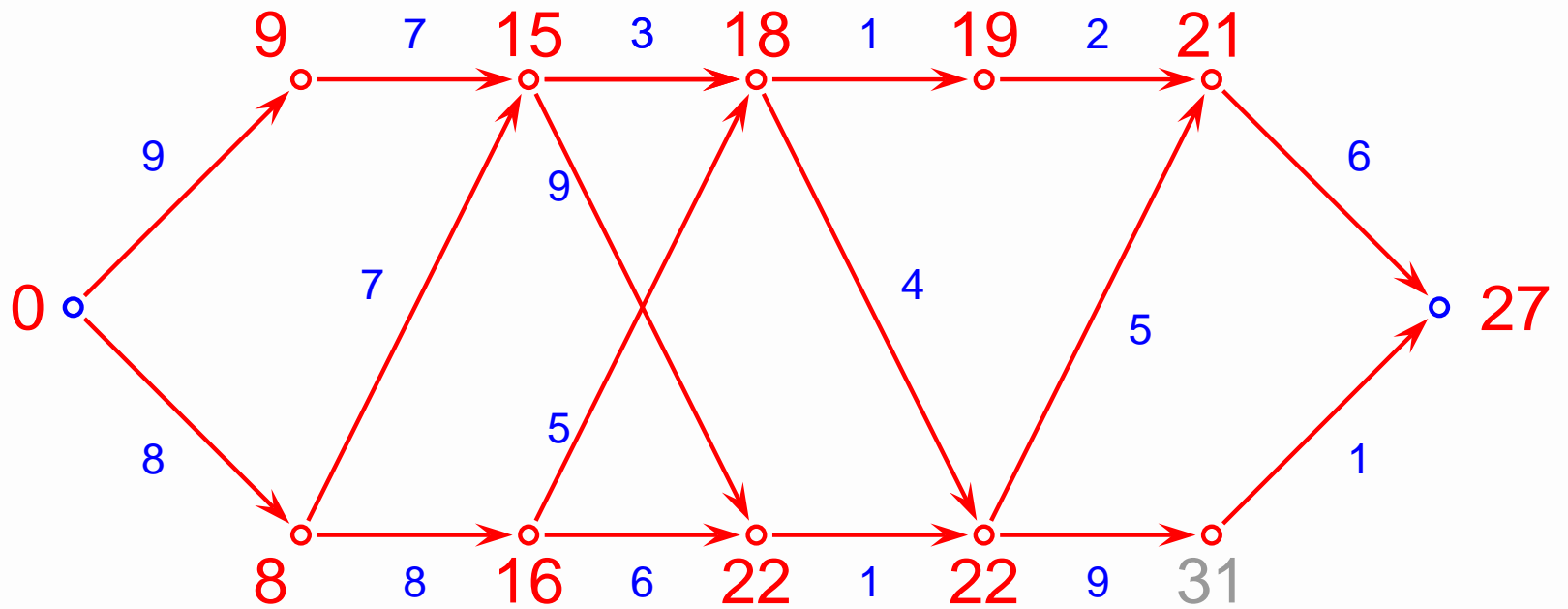
Algorithme de Dijkstra



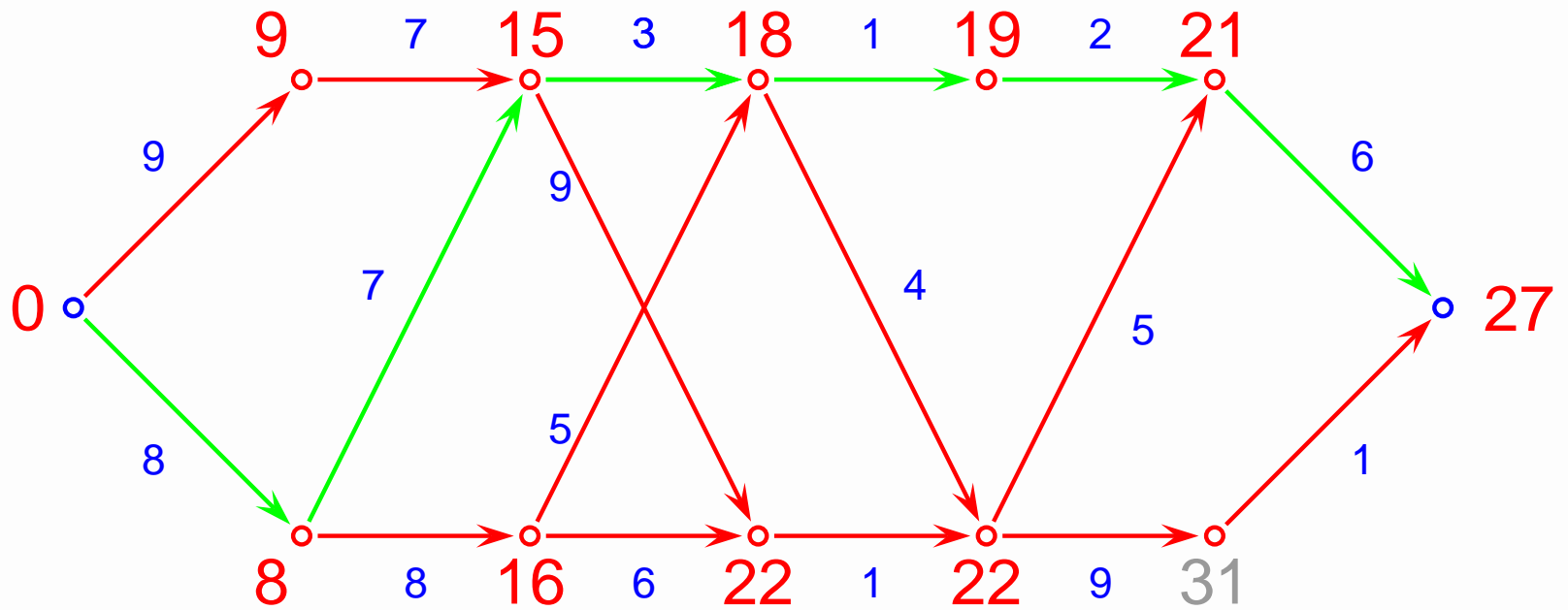
Algorithme de Dijkstra



Algorithme de Dijkstra



Algorithme de Dijkstra



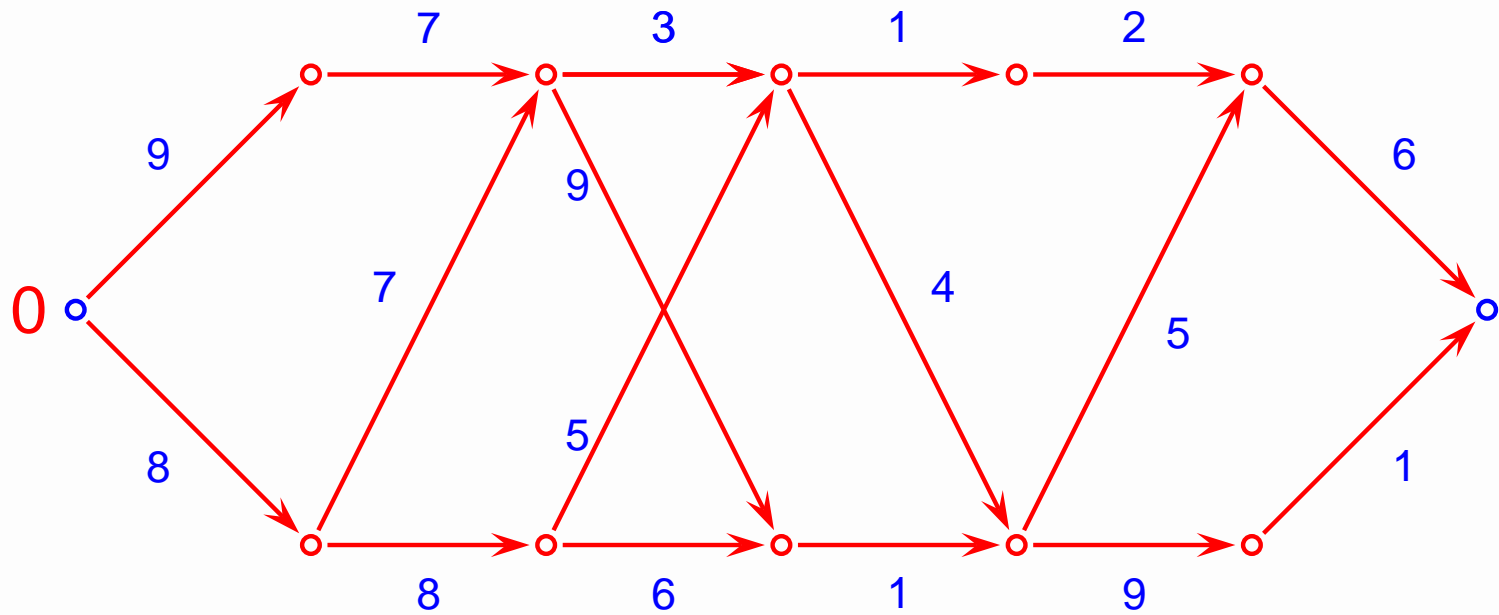
Algorithme de Dijkstra

Exercice : (Bréal TES, 58 page 250)

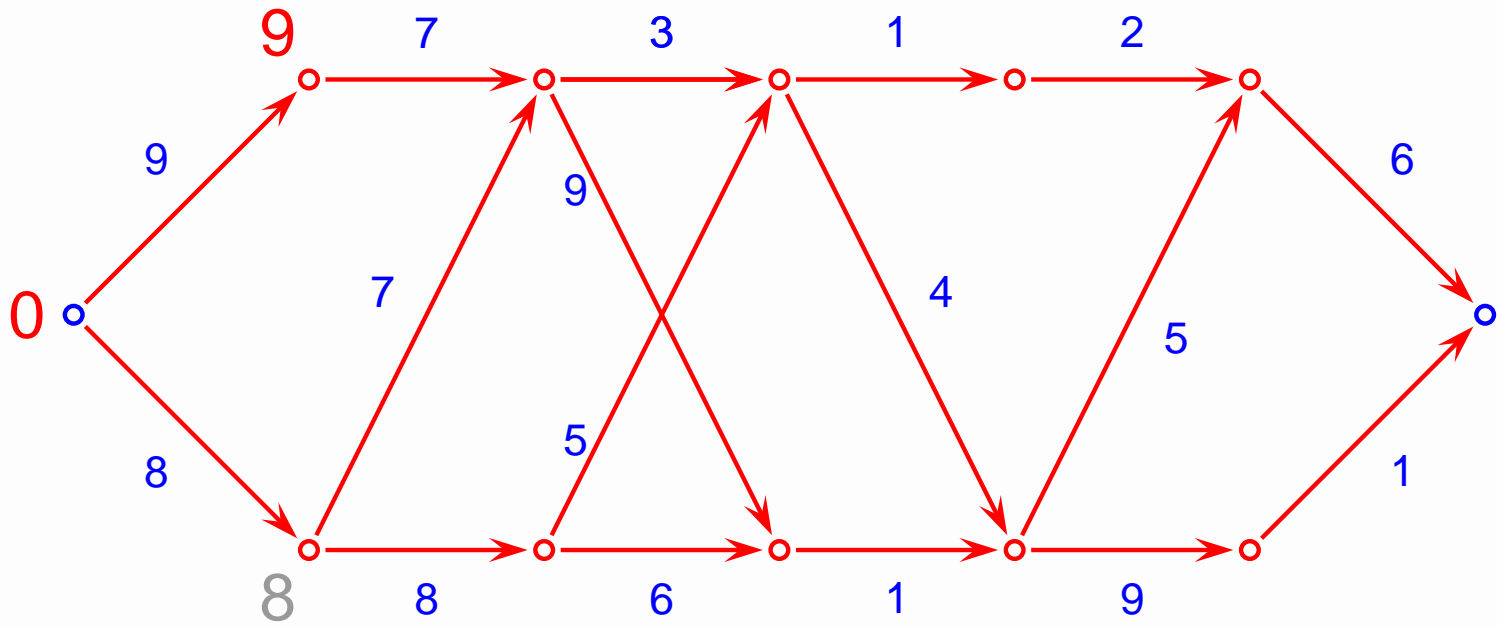
Partant de Moscou, Michel Strogoff doit rejoindre Irkoutsk. A chaque liaison entre deux villes, il évalue ses chances de réussite sur 10. Ignorant le calcul de probabilité, il choisit son itinéraire en minimisant la somme globale de ses chances.

Attention ! cet exercice est dangereux : l'algorithme de Dijkstra fonctionne bien pour déterminer le chemin le plus court (les poids étant positifs).

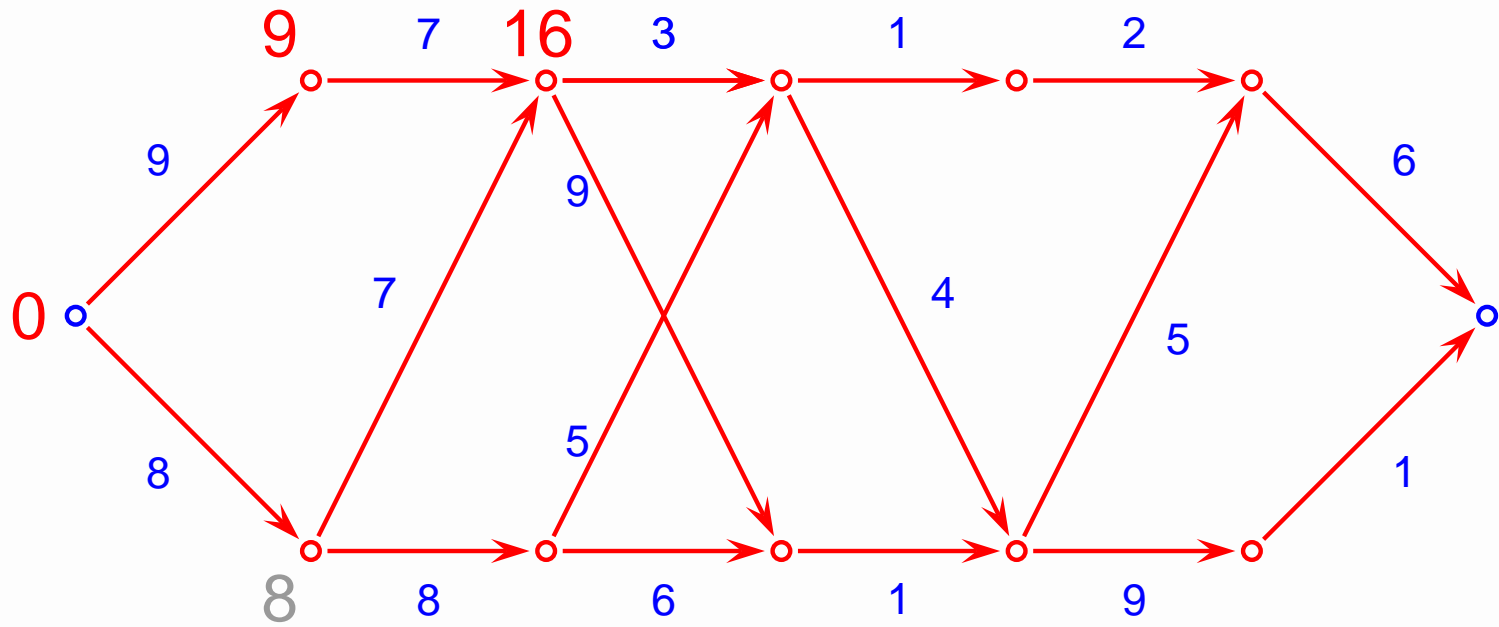
Algorithme de Dijkstra



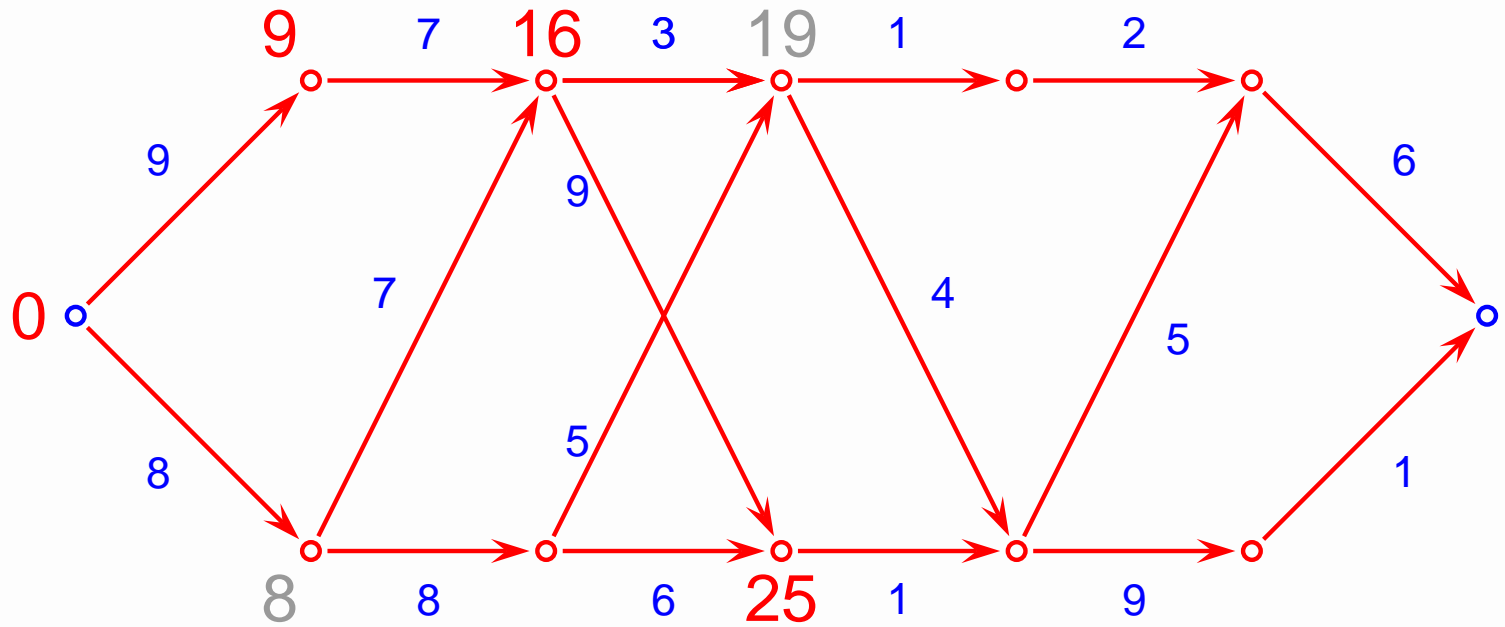
Algorithme de Dijkstra



Algorithme de Dijkstra



Algorithme de Dijkstra



Références

[1] Accompagnement des programmes - Mathématiques -
Terminales ES et S :

<http://www.math.univ-montp2.fr/~oudom/Dossiers/accompagnement.pdf>

[2] Eric Sigward, Introduction à la théorie des graphes :

[http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/m2002/institut/ipr/graphes/
Graphes.pdf](http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/m2002/institut/ipr/graphes/Graphes.pdf)

Références

[1] Accompagnement des programmes - Mathématiques -
Terminales ES et S :

<http://www.math.univ-montp2.fr/~oudom/Dossiers/accompagnement.pdf>

[2] Eric Sigward, Introduction à la théorie des graphes :

<http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/m2002/institut/ipr/graphes/Graphes.pdf>

[3] Claude Berge, Théorie des graphes et ses applications,
Collection universitaire de mathématiques, Dunod, 1958.

[4] Claude Berge, Graphes et hypergraphes, Dunod, 1970.

[5] Frank Harary, Robert Norman et Dorwin Cartwright,
Introduction à la théorie des graphes, Dunod, 1968.

[5] Frank Harary, Robert Norman et Dorwin Cartwright,
Introduction à la théorie des graphes, Dunod, 1968.

[4] Bernard Roy,
Algèbre moderne et théorie des graphes orientées vers les
Dunod, 1969.

[5] Bernard Roy,
Algèbre moderne et théorie des graphes orientées vers les
Dunod, 1970.

Fin

Bonnes Vacances !