TD – Intégrales curvilignes et multiples - corrigé

1- L'aire de la surface S est évidemment donnée par $\iint_S dS$. L'élément de surface dS doit donc être relié aux variations dx et dy des coordonn.ées x et y du point courant M de la surface S. Lorsque x est fixé, la variation dz de ce point courant s'exprime simplement par $dz = \frac{\partial z}{\partial y} dy$. Lorsque x est fixé, le point courant se déplace donc le long d'un vecteur de composantes $\vec{V}_x = \left| \begin{matrix} 0 \\ dy \\ \frac{\partial z}{\partial y} dy \end{matrix} \right.$ De même, lorsque y est fixé, la variation de z est simplement $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx$ et le point courant se déplace alors le long du vecteur de composantes $\vec{V}_y = \left| \begin{matrix} dx \\ 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x} dx \end{matrix} \right.$. Lorsque les coordonnées x et y du point courant changent simultanément, le point courant se déplace donc dans le parallélépipède porté par les deux vecteurs précédents. L'aire de ce secteur est égal à l'élément de surface à prendre en compte dans l'intégrale de surface sur S et, par propriété du produit vectoriel on a la relation $dS = \left\| \vec{V}_x \wedge \vec{V}_y \right\|$. Le résultat recherché est alors obtenu directement en exprimant la norme du vecteur $\vec{V}_x \wedge \vec{V}_y = dxdy \left| \begin{matrix} -\frac{\partial z}{\partial x} \\ -\frac{\partial z}{\partial y} \\ 1 \end{matrix} \right.$.

<u>Remarque :</u> Dans le cas plus général d'une surface dont l'équation paramétrique est $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$, le calcul de la surface se fait par l'intégrale suivante : $\int_u \int_v \sqrt{G_u G_v - G_{uv}} dudv$,

avec $G_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2$, $G_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2$ et $G_{uv} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right)$

2- La surface S délimitée par les points A,B,C admet pour équation $x+y+z=1$, ou bien encore $z=z(x,y)=1-x-y$. Par application du résultat démontré au 1-, on trouve que l'aire recherchée vaut $Aire = \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=1-y}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$, avec $1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1+(-1)^2+(-1)^2 = 3$. On trouve alors immédiatement que l'aire vaut $\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\sqrt{3}dydx = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On remarque par ailleurs que ce résultat est bien cohérent avec le fait que le triangle A,B,C est équilatéral de côté $a = \sqrt{2}$. Sa hauteur est en effet donnée par $h = \sqrt{\sqrt{2}^2 - \left(\sqrt{2}/2\right)^2} = \sqrt{3/2}$ et son aire par $\frac{ah}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{3/2} = \sqrt{3/2}$.

3- I_1 s'obtient en exprimant $\vec{V}$ à partir du paramètre t : $\vec{V} = \frac{8}{t}\vec{i} + 2\vec{j} + 2t\vec{k}$. On obtient alors $I_1 = \int_C \vec{V}dt = \int_{t=1}^{t=2}\vec{V}dt = 8\ln 2\,\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. En utilisant le fait que $t = x/2$, on obtient ensuite $I_2 = \int_C \vec{V}dx = \int_{x=2}^{x=4}\left(\frac{16}{x}\vec{i} + 2\vec{j} + x\right)dx = 16\ln 2\,\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$. En utilisant le fait que $t = 2/y$, on obtient aussi $I_3 = \int_C \vec{V}dy = \int_{y=2}^{y=1}\left(4y\vec{i} + 2\vec{j} + \frac{4}{y}\right)dy = -6\,\vec{i} - 2\vec{j} - 4\ln 2\,\vec{k}$. Finalement, avec, lorsque M se déplace sur le contour C, $\overrightarrow{dOM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = 2dt\,\vec{i} - \frac{2}{t^2}dt\,\vec{j}$, on obtient $I_4 = \int_C \vec{V}\cdot\overrightarrow{dOM} = \int_{t=1}^{t=2}\left(\frac{16}{t} - \frac{4}{t^2}\right)dt = 16\ln 2 - 2$.

4- Pour tout contour fermé sur lequel le théorème de Green dans un plan s'applique, on sait que $\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_C Pdx + Qdy$. Le choix particulier Q=x et P=0 donne $\iint_S dxdy = Aire = \oint_C xdy$. En utilisant la représentation paramétrique $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta,\ \theta \in [0,2\pi[$ pour l'ellipse considérée, on obtient alors $Aire = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left(ab\cos^2\theta\right)d\theta = \frac{ab}{2}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}(1+\cos 2\theta)d\theta = \pi\,ab$. Il faut noter que plusieurs choix de P et Q conduisent à des expressions utilisables pour estimer l'aire d'une surface plane à partir d'une intégrale sur son contour. Par exemple Q=0 et P=-y conduit à $Aire = \oint_C -ydx$, le choix P=-y et Q=x donne quant à lui $Aire = \frac{1}{2}\oint_C -ydx + xdy$. On pourra vérifier que ces intégrales curvilignes conduisent bien à la même estimation de l'aire de l'ellipse considérée.

5- Le vecteur normal à S s'exprime simplement dans la base naturelle associée aux coordonnées sphériques par $\vec{n} = \vec{\tilde{e}}_r = \vec{e}_r$ et sur la sphère de centre O de rayon R l'élément de surface s'exprime en coordonnées sphériques (r,φ,θ) par $dS = R^2 \sin\varphi d\varphi d\theta$. Le flux de $\vec{V}$ à travers S ne fait donc intervenir que la composante de $\vec{V}$ portée par $\vec{e}_r$, soit $V_r = (y-x)\sin\varphi\cos\theta + x^2 z\sin\varphi\sin\theta + (x^2+z)\cos\varphi$. On a utilisé pour établir ce résultat les relations suivantes qui lient les coordonnées (vecteurs de base) cartésiennes et sphériques :

$$x = r\sin\varphi\cos\theta$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta$$
$$z = r\cos\varphi$$
$$\vec{i} = \sin\varphi\cos\theta\vec{e}_r + \cos\varphi\cos\theta\vec{e}_\varphi - \sin\theta\vec{e}_\theta$$
$$\vec{j} = \sin\varphi\sin\theta\vec{e}_r + \cos\varphi\sin\theta\vec{e}_\varphi + \cos\theta\vec{e}_\theta$$
$$\vec{k} = \cos\varphi\vec{e}_r + \sin\varphi\vec{e}_\varphi$$

En utilisant les coordonnées sphériques uniquement on a alors $V_r = R\sin^2\varphi(\sin\theta - \cos\theta)\cos\theta + R^3\sin^3\varphi\cos\varphi\cos^2\theta\sin\theta + R(R\sin^2\varphi\cos^2\theta + \cos\varphi)\cos\varphi$

Le flux de $\vec{V}$ à travers S est alors donné par l'intégrale $\iint_S \vec{V}\cdot\vec{n}dS = R^2\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\int_{\theta=0}^{2\pi} V_r \sin\varphi d\varphi d\theta$. Les plus courageux pourront vérifier que cette intégrale donne bien le résultat obtenu de manière plus élégante dans la question suivante.

6- On choisit de fermer S en ajoutant S', le disque de rayon R, de centre 0 et contenu dans le plan z=0, soit S' définie par $x^2 + y^2 \le R,\ z = 0$. On note Σ la surface fermée Σ=S+S' et on se propose d'appliquer le théorème de la divergence au champ vectoriel $\vec{V}$ et à la surface Σ : $\iiint_V div\vec{V}dv = \oiint_\Sigma \vec{V}\cdot\vec{n}dS = \iint_S \vec{V}\cdot\vec{n}dS + \iint_{S'}\vec{V}\cdot\vec{n}dS$. Un simple calcul permet de montrer que le champ $\vec{V}$ est à divergence nulle, si bien que le flux recherché s'exprime simplement par $\iint_S \vec{V}\cdot\vec{n}dS = -\iint_{S'}\vec{V}\cdot\vec{n}dS$. Sur S', le vecteur normal unitaire extérieur est simplement $-\vec{k}$ et la coordonnée z est nulle si bien que $\iint_S \vec{V}\cdot\vec{n}dS = -\iint_{S'} -x^2 dxdy$. En introduisant alors les coordonnées polaires (ρ,β) dans le plan (xOy) telles que $x = \rho\cos\beta,\ y = \rho\sin\beta$, on obtient facilement

$$\iint_S \vec{V}\cdot\vec{n}dS = \int_{\rho=0}^{R}\int_{\beta=0}^{2\pi}\rho^3\cos^2\beta\ d\rho d\beta = \frac{\pi R^4}{4}$$

7- En introduisant les coordonnées polaires (r,θ) telles que $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ on trouve que I s'écrit $I = \iint_{R^2} e^{-r^2} r dr d\theta$. On a utilisé ici le fait que l'élément de surface s'écrit en polaire sous la forme $dS = rdrd\theta$ (voir la remarque ci-dessous). En explicitant les domaines de variations des coordonnées polaires on obtient

$I = \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta$ soit $I = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} = \pi$. Par ailleurs on remarque que I s'écrit également $I = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = 4 \int_{x=0}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{y=0}^{\infty} e^{-y^2} dy = 4 \left(\int_{x=0}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$. On en déduit le résultat attendu $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

<u>Remarque</u> : L'expression de dS en polaire s'obtient géométriquement en disant que dS est égal à l'aire du « rectangle » porté par les vecteurs $\left(\vec{e}_r dr, \vec{e}_\theta d\theta \right)$ ce qui conduit bien à $dS_{(r,\theta)} = r dr d\theta$. De même en cartésien, l'aire portée par les vecteurs $\left(\vec{e}_x dx, \vec{e}_y dy \right) = \left(\vec{i}\, dx, \vec{j} dy \right)$ donne directement $dS_{(x,y)} = dx dy$. La relation de passage entre les deux expressions fait intervenir le déterminant suivant (aussi appelé le Jacobien) : $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$. On a la relation $dx dy = J\, dr d\theta$. Notez que cette relation généralise au cas de plusieurs variables la formule de changement de variable utilisée pour les intégrales simples, à savoir $dx = \frac{\partial x}{\partial u} du$.