

TD – Intégrales curvilignes et multiples

- 1- On note S une surface de \mathbf{R}^3 dont l'équation peut se mettre sous la forme $z = z(x, y)$ pour $x_0 < x < x_1$ et $y_0 < y < y_1$. Montrer que l'aire de S est égale à

$$\int_{y=y_0}^{y=y_1} \int_{x=x_0}^{x=x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

- 2- On note A, B et C les points de coordonnées $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ respectivement. On note S la surface triangulaire (A, B, C) . Déterminer l'aire de S en calculant une intégrale de surface définie sur S (utiliser le résultat du 2).
- 3- On considère le parcours C de représentation paramétrique $x = 2t, y = 2/t, z = 1, t \in [1, 2]$ et le champ vectoriel $\vec{V} = xy^2\vec{i} + 2\vec{j} + x\vec{k}$. Calculer les intégrales curvilignes suivantes : $I_1 = \int_C \vec{V} dt$, $I_2 = \int_C \vec{V} dx$, $I_3 = \int_C \vec{V} dy$ et $I_4 = \int_C \vec{V} \cdot \overrightarrow{dOM}$.
- 4- Utiliser le théorème de Green dans un plan pour exprimer l'aire du domaine délimité par un contour fermé C à partir d'intégrales curvilignes sur C . Calculer alors l'aire d'une ellipse de grand côté a et de petit côté b .
- 5- On considère champ vectoriel $\vec{V} = (y - x)\vec{i} + x^2 z\vec{j} + (x^2 + z)\vec{k}$ et la surface ouverte S définie par $x^2 + y^2 + z^2 = R, z \geq 0$. Calculer le flux de \vec{V} à travers S après avoir remarqué que le vecteur normal à S s'exprime simplement dans la base naturelle associée aux coordonnées sphériques.
- 6- Reprendre le calcul de la question précédente en coordonnées cartésiennes. On pourra utiliser le théorème de la divergence appliqué à une surface fermée judicieusement choisie.
- 7- Soit ϕ le champ scalaire défini sur tout \mathbf{R}^2 par $\phi(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$. Utiliser les coordonnées polaires pour calculer l'intégrale $I = \iint_{\mathbf{R}^2} \phi(x, y) dx dy$. Déduire le résultat

important suivant : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.