TD – Systèmes différentiels

1. Le résultat dont on demande la démonstration dans cet exercice doit être considéré comme du cours.

   Par analogie avec le développement en série de e^x :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots , \qquad -\infty < x < \infty$$

   on définit l'exponentielle d'une matrice carrée A comme :

$$\exp(A) = e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

   où I est la matrice identité. On suppose en plus que la matrice A est diagonalisable, soit $A = S\Lambda S^{-1}$. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A. Montrer alors que :

$$\boxed{\exp(A) = e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = Se^{\Lambda}S^{-1}}$$

   où e^{Λ} est la matrice diagonale dont les éléments sont $\exp(\lambda_1), \exp(\lambda_2), \ldots, \exp(\lambda_n)$.

2. On considère le système d'EDO suivant :

$$\frac{du}{dt} = Au = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} u \qquad \text{(I)}$$

   dont l'inconnue est $u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$. Les conditions initiales sont telles que $u(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   a. Déterminer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A, ainsi que les vecteurs propres associés V_1 et V_2. Vérifier que $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = -3$; $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

   b. On pose $w(t) = S^{-1}u(t)$ où S est la matrice dont les colonnes contiennent les vecteurs propres V_1 et V_2. Montrer que w est solution du système différentiel découplé suivant : $\frac{dw}{dt} = \Lambda w = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} w$

   c. Vérifier que la condition initiale pour w est $w(0) = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

   d. Déterminer les composantes w_1 et w_2 de w(t) et vérifier que $w_1(t) = \frac{3}{2}e^{-t}$ et $w_2(t) = \frac{1}{2}e^{-3t}$.

   e. Déduire enfin la solution u(t) du système initial (I). On vérifiera que

$$u_1(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \quad \text{et} \quad u_2(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$$

f. Utiliser le résultat de l'exercice 1 pour calculer la matrice carrée e^{At}. Vérifier que la solution du système initial (I) est égale à $e^{At}u(0)$.

3. Utiliser la démarche détaillée dans l'exercice 2 pour résoudre les systèmes différentiels construits à partir des matrices et conditions initiales suivantes:

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ et $u(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ <u>solution</u> : $u(t) = \begin{bmatrix} \sqrt{2}e^{t}\sin\sqrt{2}t \\ \mathrm{e^t}\cos\sqrt{2}t \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ et $u(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ <u>solution</u> : $u(t) = \begin{bmatrix} \sqrt{2}e^{-t}\sin\sqrt{2}t \\ \mathrm{e^{-t}}\cos\sqrt{2}t \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ <u>solution</u> : $u(t) = \begin{bmatrix} 2\cos t - \sin t \\ 2\sin t + \cos t \end{bmatrix}$

4. La solution d'un système différentiel est dite stable si elle reste bornée pour les grandes valeurs de t. Une solution est donc stable si elle ne contient pas de terme en e^{at} avec a>0.

a. Proposer une condition nécessaire et suffisante de stabilité portant sur les valeurs propres de la matrice *A*,

b. Dans le cas d'un système de taille 2, utiliser les relations $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$ pour déduire une condition nécessaire et suffisante de stabilité portant directement sur les coefficients de la matrice A

<u>Solution</u> : si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ alors la solution de $\frac{du}{dt} = Au$ est stable si et seulement si $a + d < 0$ et $ad - bc > 0$

5. Utiliser la démarche détaillée dans l'exercice 2 pour résoudre les systèmes différentiels construits à partir des matrices et conditions initiales suivantes:

a. $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ et $u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ <u>solution</u> : $u(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cos\sqrt{6}t \\ \frac{\sqrt{6}}{3}\sin\sqrt{6}t - \frac{1}{6}\cos\sqrt{6}t + \frac{1}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6}\sin\sqrt{6}t + \frac{1}{3}\cos\sqrt{6}t - \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ <u>solution</u> : $u(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{-t} \\ \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{4}{3}e^{-t} \\ \frac{2}{3}e^{2t} - \frac{5}{3}e^{-t} \end{bmatrix}$