

TD – Valeurs et vecteurs propres

Le but du jeu est de retrouver les résultats donnés en même temps que les matrices ...

$$1. \quad A = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/2 & -2 \\ -3/2 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2; \lambda_2 = -2; \lambda_3 = -1 \quad X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}; X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrice admettant 3 valeurs propres réelles distinctes, donc diagonalisable.

$$2. \quad A = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 3\sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = 1 \quad X_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; X_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/4 \\ -1/4 \\ 1 \end{bmatrix}; X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrice admettant 3 valeurs propres réelles distinctes, donc diagonalisable.

$$3. \quad A = \begin{bmatrix} 5/2 & -1 & -\sqrt{2}/4 \\ -1/2 & 2 & -\sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2; \lambda_2 = 3; \lambda_3 = 1 \quad X_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1 \end{bmatrix}; X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/3 \\ -\sqrt{2}/3 \end{bmatrix}; X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Matrice admettant 3 valeurs propres réelles distinctes, donc diagonalisable.

$$4. \quad A = \begin{bmatrix} 7/16 & 3/16 & -5\sqrt{6}/16 \\ 3/16 & -17/16 & 7\sqrt{6}/16 \\ -5\sqrt{6}/16 & 7\sqrt{6}/16 & -3/8 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = -2 \quad X_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{6}/2 \\ \sqrt{6}/2 \\ 1 \end{bmatrix}; X_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{6}/2 \\ \sqrt{6}/6 \\ 1 \end{bmatrix}; X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ \sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Matrice admettant 3 valeurs propres réelles distinctes, donc diagonalisable. Notez la valeur propre nulle qui indique que A est singulière ($\det(A)=0$).

$$5. A = \begin{bmatrix} 13/16 & 9/16 & -3\sqrt{6}/16 \\ 9/16 & -11/16 & 9\sqrt{6}/16 \\ -3\sqrt{6}/16 & 9\sqrt{6}/16 & -1/8 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -2; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = 1 \quad X_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/2 \\ 1 \end{bmatrix}; X_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; X_3 = \begin{bmatrix} -\sqrt{6} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrice admettant 2 valeurs propres réelles distinctes (« -2 » valeur propre simple et « 1 » valeur propre double). Deux vecteurs propres distincts sont associés à la valeur propre double. A est donc diagonalisable.

$$6. A = \begin{bmatrix} 2 - \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & -\frac{3}{2} + \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 2 + \sqrt{2}/2 & \frac{3}{2} + \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = 2 \quad X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}; X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; X_3 = X_2$$

Matrice admettant 2 valeurs propres réelles distinctes (« -1 » valeur propre simple et « 2 » valeur propre double). Un unique vecteur propre est associé à la valeur propre double. A ne possède donc que 2 vecteurs propres et n'est donc pas diagonalisable. A est défective.

$$7. A = \begin{bmatrix} 5/2 - \sqrt{2}/2 & \frac{3}{2} + \sqrt{2}/2 & -\frac{3}{2} + \sqrt{2}/2 \\ -3 & -2 & 3 \\ -3/2 - \sqrt{2}/2 & -\frac{3}{2} + \sqrt{2}/2 & \frac{5}{2} + \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = 1 \quad X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; X_2 = X_1; X_3 = X_1$$

Matrice admettant 1 valeur propre réelle (« -1 » valeur propre triple). Un unique vecteur propre est associé à la valeur propre triple. A ne possède donc qu'un unique vecteur propre et n'est donc pas diagonalisable. A est défective.