

MMI - TD

Calcul différentiel

Corrigé

1-

$$a) \quad Df((x, y)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x & 2y \\ \exp(x+2y) & 2\exp(x+2y) \end{bmatrix}$$

$$Jac_f((x, y)) = \frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)} = \det(Df((x, y))) = 2(4x - y)\exp(x + 2y)$$

$$b) \quad Df((r, \theta)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$Jac_f((r, \theta)) = \frac{D(f_1, f_2)}{D(r, \theta)} = \det(Df((r, \theta))) = r$$

Il s'agit du jacobien de passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires $f_1 = x = r \cos \theta$, $f_2 = y = r \sin \theta$

$$c) \quad Df((r, \theta, \varphi)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_3}{\partial r} & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{bmatrix}$$

$$Jac_f((r, \theta, \varphi)) = \frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(r, \varphi, \theta)} = \det(Df((r, \varphi, \theta))) = r^2 \sin \varphi$$

Il s'agit du jacobien de passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques $f_1 = x = r \sin \varphi \cos \theta$, $f_2 = y = r \sin \varphi \sin \theta$, $f_3 = z = r \cos \varphi$

2-

a) f est continue en zéro si $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0,0) = 0$. Pour calculer cette

limite et s'affranchir de la manière dont (x,y) tend vers $(0,0)$, on peut par exemple considérer la limite de l'inverse de $f(x,y)$ en ce point. En effet on

trouve facilement $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{f(x, y)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$. Par suite on

vérifie bien que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ et que f est continue en $(0,0)$. Un autre moyen consiste à remarquer que $\forall (x,y), 0 \leq x^2 y^2 \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2$. Par suite,

$$0 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \leq \frac{1}{2} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) = 0, \text{ d'où le résultat.}$$

- b) Pour étudier la Gâteaux-différentiabilité il faut tout d'abord calculer la dérivée de f en $(0,0)$ dans une direction arbitraire $\vec{v} = (\alpha, \beta)$. Pour cela on calcule la limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h(\alpha, \beta)) - f((0,0))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = 0$. f admet donc une dérivée directionnelle en $(0,0)$ dans toutes les directions et cette dérivée est nulle. De plus l'application $\vec{v} = (\alpha, \beta) \mapsto \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = 0$ étant linéaire, f est Gâteaux-différentiable en $(0,0)$.

- c) La différentiabilité de f en $(0,0)$ se démontre de la manière suivante : les dérivées partielles de f suivant x et y sont nulles en $(0,0)$ donc si la différentielle de f en ce point existe, c'est nécessairement l'application nulle car : $L(dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)dy = 0$. Pour que f soit différentiable,

c'est-à-dire que $L(dx, dy) = 0 = df_{(1,1)}(dx, dy)$, il faut encore que

$$\varepsilon(dx, dy) = f(dx, dy) - f(0,0) - L(dx, dy) = \frac{dx^2 dy^2}{dx^2 + dy^2} \text{ soit négligeable devant}$$

$$\|(dx, dy)\| = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \text{ c'est-à-dire } \lim_{(dx, dy) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(dx, dy)}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = 0. \text{ Pour obtenir}$$

ce résultat, on utilise les coordonnées polaires en posant $dx = r \cos \theta, dy = r \sin \theta$. On obtient alors

$$\frac{\varepsilon(dx, dy)}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dx^2 dy^2}{\sqrt{dx^2 + dy^2}^3} = \frac{r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}^3} = r \cos^2 \theta \sin^2 \theta. \text{ Cette}$$

quantité tend bien vers 0 lorsque $(dx, dy) \rightarrow (0,0)$ puisque $r = \sqrt{dx^2 + dy^2} \rightarrow 0$ et $|\cos^2 \theta \sin^2 \theta| \leq 1$. f est donc bien différentiable en $(0,0)$, de différentielle nulle.

f étant différentiable, elle est continue en $(0,0)$. De même, la Gâteaux-différentiabilité est acquise dès lors que la différentiabilité est démontrée.

- 3- On utilise le fait que $df = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$ est exacte ssi $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y}$.
- a - pas exacte : $\frac{\partial(x^2 + y + z)}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial(x \exp z)}{\partial x} = \exp z$

$$\frac{\partial(\exp x^2 + 2y + z)}{\partial y} = 2 = \frac{\partial 2x}{\partial x}; \quad \frac{\partial(\sqrt{z} + x)}{\partial x} = 1 = \frac{\partial(\exp x^2 + 2y + z)}{\partial z}$$

b- exacte :

$$\frac{\partial 2x}{\partial z} = 0 = \frac{\partial(\sqrt{z} + x)}{\partial y}$$

Puisque $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$, on obtient par identification :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \exp x^2 + 2y + z \Rightarrow f(x, y, z) = \int \exp x^2 dx + (2y + z)x + g(y, z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x = 2x + \frac{\partial g}{\partial y} \Rightarrow g(y, z) = h(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \sqrt{z} + x = x + \frac{dh}{dz} \Rightarrow h(z) = \frac{2}{3} z^{3/2}$$

Finalement on déduit : $f(x, y, z) = \int \exp x^2 dx + (2y + z)x + \frac{2}{3} z^{3/2} + Cte$

Attention : la primitive f de df , si elle existe, s'obtient en utilisant **successivement** les dérivées partielles par rapport aux différentes coordonnées x , y et z (ordre indifférent).

$$\text{c - pas exacte : } \frac{\partial(\ln x + 2y + 3xz)}{\partial z} = 3x \neq \frac{\partial(\sqrt{z} + x^2)}{\partial x} = 2x$$

$$4- f(x, y) = 2x^2 + y^2.$$

$$\text{a - } \frac{\partial f}{\partial i}(1,0) = 4, \frac{\partial f}{\partial i}(0,1) = 0, \frac{\partial f}{\partial i}(-1,0) = -4, \frac{\partial f}{\partial i}(0,-1) = 0$$

$$\text{b - } \frac{\partial f}{\partial j}(1,0) = 0, \frac{\partial f}{\partial j}(0,1) = 2, \frac{\partial f}{\partial j}(-1,0) = 0, \frac{\partial f}{\partial j}(0,-1) = -2$$

$$\text{c - } \frac{\partial f}{\partial i}(1,1) = 4, \frac{\partial f}{\partial j}(1,1) = 2, \frac{\partial f}{\partial(i+j)}(1,1) = 6, \frac{\partial f}{\partial(2i+2j)}(1,1) = 12$$

d - Les dérivées partielles en x et y de f existent et sont continues sur tout \mathbf{R}^2 donc la différentielle de f en $(1,1)$ existe et est définie par :

$$f'_{1,1}(dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)dy, \quad \text{soit,} \quad \text{puisque}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \partial_i f(1,1) = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \partial_j f(1,1) = 2 \quad (f \text{ étant différentiable),}$$

$$df_{1,1} = f'_{1,1}(dx, dy) = 4dx + 2dy.$$

5- $g(x, y) = \frac{5}{4}x^2 + \frac{7}{4}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}xy$ est une forme quadratique que l'on peut exprimer

comme $g(x, y) = {}^tX.A.X$ avec $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ et $A = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4} \end{bmatrix}$ est une matrice symétrique

dont les valeurs propres $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 1$ sont associées aux vecteurs propres normés

$\vec{V}_1 = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ et $\vec{V}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$. La matrice $P = [\vec{V}_1 \ \vec{V}_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ contient

par colonne les composantes des vecteurs $\bar{B} = (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ dans la base $B = (\vec{i}, \vec{j})$. Il s'agit

donc de la matrice de passage de B à \bar{B} . Les coordonnées $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ d'un point dans la

base B sont reliées aux coordonnées $\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$ du même point dans la base \bar{B} par

$X = P\bar{X}$, ou encore $\bar{X} = P^{-1}X = {}^tPX$ (car P est une matrice orthogonale). La fonction

$g(x, y)$ peut alors s'écrire $g(x, y) = {}^tX.(P.^tP).A.(P.^tP).X = {}^t(PX).\Lambda.(PX) = {}^t\bar{X}.\Lambda.\bar{X}$ où

$\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Finalement on trouve l'équation d'une ellipse dans la base \bar{B} :
 $g(x, y) = {}^t\bar{X}.\Lambda.\bar{X} = 2\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = f(\bar{x}, \bar{y})$. C'est la forme canonique de g . Les iso-contours de g sont des ellipses dont les axes principaux sont tournés de 60° par rapport aux axes x et y .

Un calcul direct à partir de la définition des dérivées directionnelles donne :

$$a - \frac{\partial g}{\partial \vec{i}}(1,0) = \frac{5}{2}, \frac{\partial g}{\partial \vec{i}}(0,1) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\partial g}{\partial \vec{i}}(-1,0) = -\frac{5}{2}, \frac{\partial g}{\partial \vec{i}}(0,-1) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b - \frac{\partial g}{\partial \vec{j}}(1,0) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\partial g}{\partial \vec{j}}(0,1) = \frac{7}{2}, \frac{\partial g}{\partial \vec{j}}(-1,0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\partial g}{\partial \vec{j}}(0,-1) = -\frac{7}{2}$$

$$c - \frac{\partial g}{\partial \vec{i}}(1,1) = \frac{5+\sqrt{3}}{2}, \frac{\partial g}{\partial \vec{j}}(1,1) = \frac{7+\sqrt{3}}{2},$$

$$\frac{\partial g}{\partial(\vec{i} + \vec{j})}(1,1) = 6 + \sqrt{3}, \frac{\partial g}{\partial(2\vec{i} + 2\vec{j})}(1,1) = 12 + 2\sqrt{3}$$

d- Les dérivées partielles en x et y de g existent et sont continues sur tout \mathbf{R}^2 donc la différentielle de g en $(1,1)$ existe et est définie par :

$$g'_{1,1}(dx, dy) = \frac{\partial g}{\partial x}(1,1)dx + \frac{\partial g}{\partial y}(1,1)dy, \quad \text{soit,} \quad \text{puisque}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = \partial_{\bar{x}} g(1,1) = \frac{5 + \sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(1,1) = \partial_{\bar{y}} g(1,1) = \frac{7 + \sqrt{3}}{2} \quad (g \text{ étant différentiable), } dg_{1,1} = g'_{1,1}(dx, dy) = \frac{5 + \sqrt{3}}{2} dx + \frac{7 + \sqrt{3}}{2} dy$$

Comme indiqué précédemment, g peut-être vue comme une fonction de (\bar{x}, \bar{y}) et $g(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}) = 2\bar{x}^2 + \bar{y}^2$. Dans la base \bar{B} , les dérivées partielles au point $(\bar{x}, \bar{y}) = (1,1)$ s'écrivent $\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}(1,1) = 4$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}(1,1) = 2$ et sont numériquement différentes de $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(1,1)$ pour deux raisons : $(x, y) = (1,1)$ et $(\bar{x}, \bar{y}) = (1,1)$ ne correspondent pas au même point géométrique (même lieu de l'espace) et les vecteurs des bases B et \bar{B} ne sont pas colinéaires. Pour retrouver la même information physique dans les deux bases il faut tout d'abord utiliser la formule de changement de base pour les dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{1}{2} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{-\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(4\bar{x}) - \frac{\sqrt{3}}{2}(2\bar{y}) \\ \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(4\bar{x}) + \frac{1}{2}(2\bar{y}) \end{cases}$$

En se plaçant au point géométrique $(x, y) = (1,1)$, soit $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)$ on obtient

$$\text{alors } \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2}(2(1 + \sqrt{3})) - \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \sqrt{3}) = \frac{5 + \sqrt{3}}{2} \\ \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\sqrt{3}}{2}(2(1 + \sqrt{3})) + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}) = \frac{7 + \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

ce qui est cohérent avec les valeurs obtenues en travaillant directement dans la base B .

6- On considère $f(x, y, z) = \ln z + \sqrt{x + 2y} \frac{z}{x}$ et $g(t) = \ln(1 + t) + \sqrt{1 + t^2} + e^t \frac{1 + t}{1 + t^2}$.

a - la dérivée de g en 0 est obtenue par dérivation directe de g puis en prenant $t=0$. Cela donne après calculs :

$$g'(t) = \frac{1}{1+t} + \sqrt{1+t^2} + e^t \frac{-t^2 - 2t + 1}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{2} \frac{1+t}{1+t^2} \frac{2t + e^t}{\sqrt{1+t^2} + e^t}, \quad \text{d'où l'on déduit}$$

$$g'(0) = \frac{4 + 5\sqrt{2}}{4}$$

b – la différentielle de f s'écrit $f'(dx, dy) = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$ soit

$$df = \left(-\frac{z}{x^2} \sqrt{x+2y} + \frac{z}{2x\sqrt{x+2y}} \right) dx + \frac{z}{x\sqrt{x+2y}} dy + \left(\frac{1}{z} + \frac{\sqrt{x+2y}}{x} \right) dz$$

c – la dérivée de la fonction $f(1+t^2, e^t/2, 1+t)$ se déduit de la différentielle en « divisant » par dt :

$$\frac{df}{dt} = \left(-\frac{z}{x^2} \sqrt{x+2y} + \frac{z}{2x\sqrt{x+2y}} \right) \frac{dx}{dt} + \frac{z}{x\sqrt{x+2y}} \frac{dy}{dt} + \left(\frac{1}{z} + \frac{\sqrt{x+2y}}{x} \right) \frac{dz}{dt} \quad \text{et en prenant}$$

$$x = 1+t^2; y = e^t/2; z = 1+t .$$

On

obtient

alors

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} = & \left(-\frac{1+t}{(1+t^2)^2} \sqrt{1+t^2+e^t} + \frac{1+t}{2(1+t^2)\sqrt{1+t^2+e^t}} \right) 2t \\ & + \frac{1+t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2+e^t}} \frac{e^t}{2} + \left(\frac{1}{1+t} + \frac{\sqrt{1+t^2+e^t}}{1+t^2} \right) \end{aligned}$$

Pour $t=0$, on a $\frac{df}{dt} = \frac{4+5\sqrt{2}}{4}$, ce qui est cohérent avec le fait que $f(1+t^2, e^t/2, 1+t) = g(t)$ et que donc pour tout t on a nécessairement $\frac{df}{dt}(1+t^2, e^t/2, 1+t) = g'(t)$.

7- Les coordonnées cartésiennes et sphériques étant liées par les relations $x = r \sin \varphi \cos \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \varphi$, ($\varphi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi[$), on définit g par $g(r, \varphi, \theta) = f(x, y, z)$. Ces deux applications sont les représentations mathématiques en coordonnées cartésiennes et sphériques de la même quantité physique (c'est pour cela que les physiciens ne font en général pas la distinction et note la quantité physique toujours par f , prise comme fonction de (x, y, z) ou bien comme fonction de (r, φ, θ)). Par application de la formule de changement de base pour les dérivées partielles on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial g(r, \varphi, \theta)}{\partial r} = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} = 2r \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + 6r \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos \varphi \\ \frac{\partial g(r, \varphi, \theta)}{\partial \varphi} = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = r^2 \sin 2\varphi \cos^2 \theta + 3r^2 \sin 2\varphi \sin^2 \theta - r \sin \varphi \\ \frac{\partial g(r, \varphi, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r^2 \sin^2 \varphi \sin 2\theta + 3r^2 \sin^2 \varphi \sin 2\theta \end{cases}$$

Par exemple, la dérivée de g par rapport à r au point géométrique A de coordonnées cartésiennes $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ s'obtient alors en

écrivant $\frac{\partial g(r, \varphi, \theta)}{\partial r} = 2r \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + 6r \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos \varphi$ au point A de coordonnées

polaires :

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3}$; $\varphi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \arccos(\sqrt{3}/3)$; $\theta = \arctan(y/x) = \pi/4$. On

obtient $\left.\frac{\partial g}{\partial r}\right|_A = 2r(1 - \cos^2 \varphi) \cos^2 \theta + 6r(1 - \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta + \cos \varphi$ ou encore

$$\left.\frac{\partial g}{\partial r}\right|_A = 2\sqrt{3}(1 - 1/3)/2 + 6\sqrt{3}(1 - 1/3)/2 + \sqrt{3}/3 = 9\sqrt{3}/3$$

Alternativement, le calcul peut se faire en repartant de $\frac{\partial g(r, \varphi, \theta)}{\partial r} = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} = 2x \sin \varphi \cos \theta + 6y \sin \varphi \sin \theta + \cos \varphi$ ce qui

donne pour $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ et puisque $\sin \varphi > 0$:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial r}\right|_A = 2\sqrt{1 - \cos^2 \varphi} \cos \theta + 6\sqrt{1 - \cos^2 \varphi} \sin \theta + \cos \varphi = 2\sqrt{1 - 1/3}\sqrt{2}/2 + 6\sqrt{1 - 1/3}\sqrt{2}/2 + \sqrt{3}/3, \quad \text{ou}$$

$$\text{encore : } \left.\frac{\partial g}{\partial r}\right|_A = 2\sqrt{1 - 1/3}\sqrt{2}/2 + 6\sqrt{1 - 1/3}\sqrt{2}/2 + \sqrt{3}/3 = 9\sqrt{3}/3.$$

Remarque : puisque $\theta \in [0, 2\pi[$ et que l'ensemble d'arrivée de \arctan est $]-\pi/2; \pi/2[$, la relation $\theta = \arctan(y/x)$ n'est valide que lorsque $x > 0$. Dans le cas contraire, il faut écrire $\theta = \pi + \arctan(y/x)$.

8-

a) $V_0^2(1 + \omega_0^2 t^2)$

b) Le bateau-sonde ne fournit de l'information que sur une trajectoire 1D ; il est nécessaire de rajouter de l'information pour avoir accès aux dérivées partielles dans l'espace à 2 dimensions. Avec l'hypothèse suggérée :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = -\frac{C_0}{V_0} a \exp\left(-a \frac{r}{V_0} + at_{\max}\right) \quad \text{car} \quad \frac{dC}{dt} = \frac{\partial g}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} \text{ supposé nul.}$$

Par ailleurs, des expressions de x et y on peut déduire facilement

$$r(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = V_0 t$$

c) La concentration s'écrit donc également $g(r, \theta) = C_0 \exp\left(-a \frac{r}{V_0} + at_{\max}\right)$, qui

$$\text{donne aussi} \quad g(r, \theta) = C_0 \exp\left(-a \frac{(r - r_{\max})}{V_0}\right) \quad \text{puisque} \quad r(t) = V_0 t \quad \text{et donc}$$

$r_{\max} = V_0 t_{\max}$. La pollution est diminuée d'un facteur 5 lorsque $\exp\left(-a \frac{(r - r_{\max})}{V_0}\right) = 0.2$, d'où $r = r_{\max} - \frac{V_0}{a} \ln 0.2$

$$d) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = -2x \frac{C_0}{V_0} a \exp\left(-a \frac{(\sqrt{x^2 + y^2} - r_{\max})}{V_0}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = -2y \frac{C_0}{V_0} a \exp\left(-a \frac{(\sqrt{x^2 + y^2} - r_{\max})}{V_0}\right)$$

e) Pour le deuxième bateau, la distance à l'origine est égal à $r_2^2(t) = V_0^2 t^2 (1 + \sin^2(\omega_1 t))$, alors que pour le premier bateau : $r_1^2(t) = V_0^2 t^2$. Il suffit alors de comparer les valeurs prises par la fonction $g(r, \theta) = C_0 \exp\left(-a \frac{(r - r_{\max})}{V_0}\right)$ pour les valeurs r_1 et r_2 de la distance à

l'origine. La variation du signal enregistré par chaque bateau est liée à la dérivée temporelle du signal de concentration. Dans la situation considérée où la concentration ne dépend pas de l'angle θ , il faut donc comparer en $t=200$ s les quantités $\frac{dC}{dt} = \frac{\partial g}{\partial r} \frac{dr}{dt}$ calculées pour les deux bateaux ($r = r_1$ et $r = r_2$). A

l'inverse, pour connaître le bateau situé dans la zone de plus forte variation en concentration, il faut comparer les dérivées en espace de la concentration. Puisque le problème est à symétrie angulaire, il suffit de comparer les quantités $\frac{\partial g}{\partial r}$ évaluées aux positions $r = r_1$ et $r = r_2$.