MMI - TD
Calcul différentiel

Sauf mention contraire, on se place dans $\mathbf{R}^3$ -resp. $\mathbf{R}^2$- et on note $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ -resp. $(\vec{i},\vec{j})$- la base orthonormée associée aux coordonnées cartésiennes x, y, z -resp. x, y.

1- Calculer le Jacobien des applications :
   a) $f(x,y)=\left(2x^2+y^2,\exp(x+2y)\right)$
   b) $f(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ - coordonnées polaires
   c) $f(r,\varphi,\theta)=(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$ - coordonnées sphériques

2- Etudier la continuité, la Gâteaux-différentiabilité et la différentiabilité de l'application
$$f: \begin{cases} (x,y)\mapsto \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} \ si\ (x,y)\neq(0,0) \\ (0,0)\mapsto 0 \end{cases}$$
en (0,0).

3- Déterminer si les différentielles suivantes sont exactes. On déterminera la primitive f lorsqu'elle existe.
   a - $df=(x^2+y+z)dx+(x\exp z)dy+\sqrt{x+y+z}\ dz$
   b - $df=(\exp x^2+2y+z)dx+2x\ dy+(\sqrt{z}+x)dz$
   c – $df=(\ln x+2y+3xz)dx+2(x+1)\ dy+(\sqrt{z}+x^2)dz$

4- On considère l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$: $f(x,y)=2x^2+y^2$. Déterminer les quantités :
   a - $\dfrac{\partial f}{\partial\vec{i}}(1,0),\ \dfrac{\partial f}{\partial\vec{i}}f(0,1),\ \dfrac{\partial f}{\partial\vec{i}}f(-1,0),\ \dfrac{\partial f}{\partial\vec{i}}f(0,-1)$
   b - $\dfrac{\partial f}{\partial\vec{j}}(1,0),\ \dfrac{\partial f}{\partial\vec{j}}f(0,1),\ \dfrac{\partial f}{\partial\vec{j}}f(-1,0),\ \dfrac{\partial f}{\partial\vec{j}}f(0,-1)$
   c - $\dfrac{\partial f}{\partial\vec{i}}(1,1),\ \dfrac{\partial f}{\partial\vec{j}}(1,1),\ \dfrac{\partial f}{\partial(\vec{i}+\vec{j})}(1,1),\ \dfrac{\partial f}{\partial(2\vec{i}+2\vec{j})}(1,1)$
   d - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1),\ df_{1,1}$

5- On considère la fonction $g(x,y)=\dfrac{5}{4}x^2+\dfrac{7}{4}y^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}xy$ et on note $g(x,y)=h(x',y')$ avec $(x',y')=\dfrac{1}{2}\left(x+\sqrt{3}y,-\sqrt{3}x+y\right)$
   a) Reprendre les questions de l'exercice précédent avec la fonction $g(x,y)$.
   b) Reprendre les questions de l'exercice précédent avec la fonction $h(x',y')$
   c) Exprimer $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,1),\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1),\ dg_{1,1}$ en fonction de $\dfrac{\partial h}{\partial x'},\dfrac{\partial h}{\partial y'}, dh$ et vérifier la cohérence des résultats obtenus.

6- On considère les applications $f(x,y,z)=\ln z+\sqrt{x+2y}\,\frac{z}{x}$ et $g(t)=\ln(1+t)+\sqrt{1+t^2+e^t}\,\frac{1+t}{1+t^2}$. Calculer successivement :

a) la dérivée de *g* en *0*,

b) la différentielle de *f*,

c) la dérivée de la fonction $g(t)=f\left(1+t^2,e^t/2,1+t\right)$ en *t=0*. Vérifier la cohérence des résultats.

7- Soit la fonction $f(x,y,z)=x^2+3y^2+z$. On pose $f(x,y,z)=g(r,\varphi,\theta)$ où les variables r,φ,θ sont les coordonnées sphériques définies par $x=r\sin\varphi\cos\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ z=r\cos\varphi$.

a) Calculer les quantités $\frac{\partial g}{\partial r},\frac{\partial g}{\partial \varphi},\frac{\partial g}{\partial \theta}$ en utilisant les formules de changement de coordonnées liant ces quantités à $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}$

b) Retrouver les résultats du a) en formant les dérivées partielles de la fonction *g* directement. Vérifier la cohérence des résultats

c) Calculer la dérivée $\frac{\partial g}{\partial r}$ au point A de coordonnées cartésiennes (1,1,1)

8- Un bateau-sonde se déplace à suivant une trajectoire en spirale sur une étendue d'eau. On note x(t) et y(t) les coordonnées cartésiennes du bateau à l'instant t et C(t) la concentration en nitrates mesurée par le bateau à l'instant t. On se donne : $\begin{cases}x(t)=V_0t\cos(\omega_0t)\\ x(t)=V_0t\sin(\omega_0t)\end{cases}$, $V_0=0.01\,\text{m/s et }\omega_0=0.02\,\text{rad/s}$. Par ailleurs, le signal de concentration obtenu par le bateau peut être représenté analytiquement par : $C(t)=C_0\exp(-a(t-t_{\max}),\quad C_0=0.01\,\text{mol/m3},\ t_{\max}=300\,\text{s et }a=0.01\,\text{s}^{-1}$.

a) Calculer la vitesse du bateau

b) Calculer les dérivées spatiales de la concentration, en coordonnées polaires. On supposera que la concentration ne dépend que de la distance à la position d'origine du bateau. Pourquoi une telle hypothèse est-elle nécessaire ?

c) Déterminer la fonction $g(r,\theta)$ qui représente la concentration en fonction des coordonnées polaires. A quelle distance de l'origine $r_{\max}$ se situe la zone de pollution maximale ? A quelle distance trouve-t-on une pollution 5 fois inférieure à la pollution à l'origine ?

d) On note $f(x,y)$ la fonction qui représente la concentration en fonction des coordonnées cartésiennes. Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}(r_{\max},0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(r_{\max},0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(r_{\max},r_{\max})$

e) Un autre bureau d'étude réalise des mesures sur le même site à l'aide d'un bateau sonde suivant une trajectoire sinusoïdale : $x(t)=V_0t,\ y(t)=V_0t\sin(\omega_1t),V_0=0.01\,\text{m/s et }\omega_1=0.01\,\text{rad/s}$. Quel bateau-sonde donne la plus forte concentration à l'instant t=200 s ? Lequel enregistre-t-il les plus fortes variations de concentration au même instant ? Lequel est-il situé dans la zone de plus fortes variations en concentration ?