

EQUATIONS DIFFERENTIELLES



A la fin du chapitre, l'étudiant doit **être capable de** :

1. Décrire le principe des méthodes à pas séparés
2. Décrire le principe des méthodes à pas liés
3. Décrire les avantages et inconvénients et faire la distinction entre méthodes implicites et méthodes explicites
4. Donner la formule de récurrence des schémas de Euler, Adams-Bashforth, Crank-Nicolson
5. Expliquer les notions de convergence et de stabilité d'un schéma d'intégration
6. Reconnaître un problème aux conditions aux limites, un problème aux conditions initiales
7. Reformuler une EDO d'ordre 2 comme un système d'EDO d'ordre 1

EQUATIONS DIFFERENTIELLES



I- INTRODUCTION

- Omniprésentes en mécanique
- Equations différentielles du **1^{er} ordre** (et systèmes) : $y' = Y(t, y)$
- Equations différentielles du **2nd ordre** (ou plus, et systèmes) : $y'' = Z(t, y, y')$
- Méthodes à **pas séparés** : y_{n+1} se calcule à partir de y_n
- Méthodes à **pas liés** : y_{n+1} se calcule à partir de $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots$
- Méthodes **explicites** : $y_{n+1} = G(x_{n+1}, y_n, y_{n-1}, \dots)$
- Méthodes **implicites** : $y_{n+1} = H(x_{n+1}, y_{n+1}, y_n, \dots)$



Exemple 1 : cinétique chimique

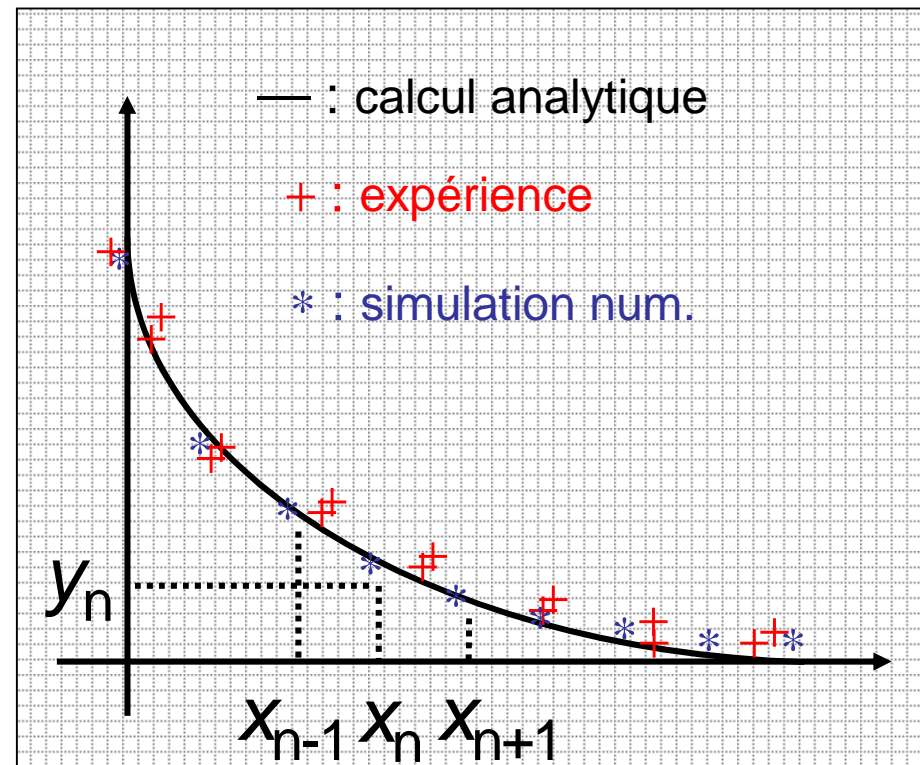
Problème différentiel du premier ordre

1 E.D.O.
+
1 condition «initiale»

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \dot{y} = -Ky^p \\ y(t=0) = y_0 = 10 \end{cases} \quad (K, p) \text{ réels positifs}$$

OBJECTIF:
calculer y pour
 $t \in [0, 120]$

Rq: c'est aussi, souvent,
trouver (K, p) !!



Exemple 2 : Histoire de lièvres et de renards ...



*Goupil le Renard ;
d'après Wilhelm von Kaulbach*

« ...on suppose que le taux de variation dx/dt des lièvres augmente avec le nombre x de lièvres mais décroît avec le produit xy traduisant le nombre de lièvres mangés par une population de y renards. De la même façon, on suppose que les renards se reproduisent d'autant plus qu'ils peuvent se nourrir facilement. Enfin, on considère que le taux de mortalité est proportionnel au nombre y de renards. Nous venons de construire un modèle proie – prédateur qui s'écrit de la façon suivante :... »

*Systeme différentiel non linéaire
du 1^{er} ordre*

où a , b , c , d sont des constantes positives

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = cxy - dy \end{cases}$$

II- EQUATION DIFFERENTIELLE DU 1^{er} ORDRE



Problème :

$$\text{trouver } y(t) \text{ vérifiant: } \begin{cases} \dot{y} = Y(t, y) & \text{EDO} \\ y(t_0) = y_0 & \text{Condition Initiale} \\ t \in [t_0, t_1] & \text{Domaine d'intégration} \end{cases}$$

II-1 Méthodes à pas séparés

La solution au pas $n+1$ est déduite de la solution au pas n

$$y(t_n + h) = y(t_n) + h y'(t_n) + \frac{h^2}{2!} y''(t_n) + \dots + \frac{h^p}{p!} y^{(p)}(t_n) + \dots$$

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + \frac{h^2}{2!} y''_n + \dots + \frac{h^p}{p!} y^{(p)}_n + \dots$$

Développement limité de y au « voisinage » de t_n

D.L. : Polynôme $P(h)$ où $h = t_{n+1} - t_n$



a- Méthode de la tangente (Euler)

Méthode qui s'appuie sur un DL au premier ordre

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + \underbrace{\frac{h^2}{2!} y''_n + \dots + \frac{h^p}{p!} y^{(p)}_n + \dots}_{\text{partie négligée}}$$

$$y_{n+1} = y_n + h Y(t_n, y_n)$$

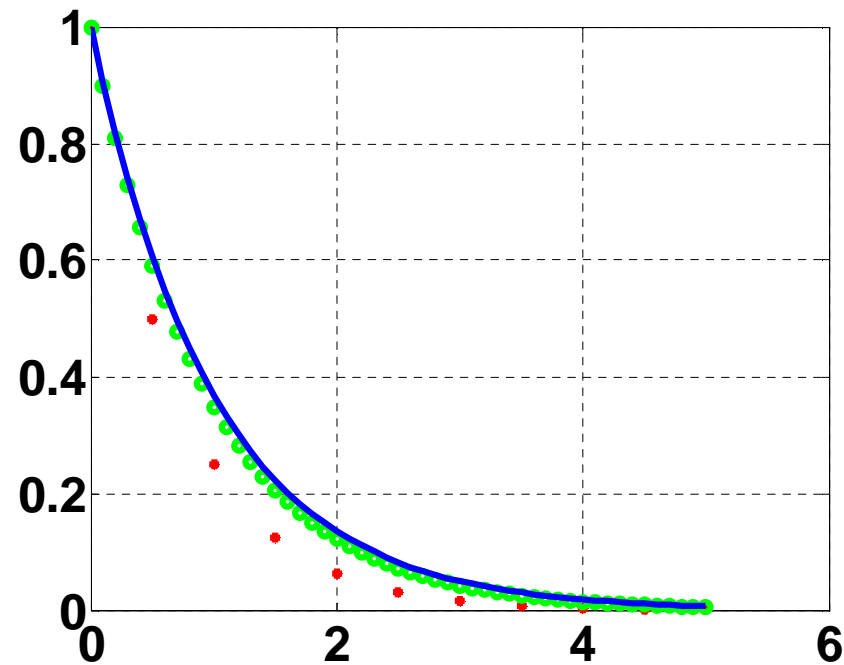
Exemple :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Y(t, y) = -y \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

Deux pas d'intégration :

$$h = 0.25$$

$$h = 0.1$$





Dans ce cas la solution analytique exacte est :

$$y(t) = e^{-t} \text{ d'où } y^{(2k+1)} = -y, y^{(2k)} = y$$

Donc dans ce cas simple,

$$\frac{h^2}{2!} y_n'' + \dots + \frac{h^p}{p!} y_n^{(p)} + \dots = \left(\frac{h^2}{2!} - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{h^p}{p!} + \dots \right) y_n$$

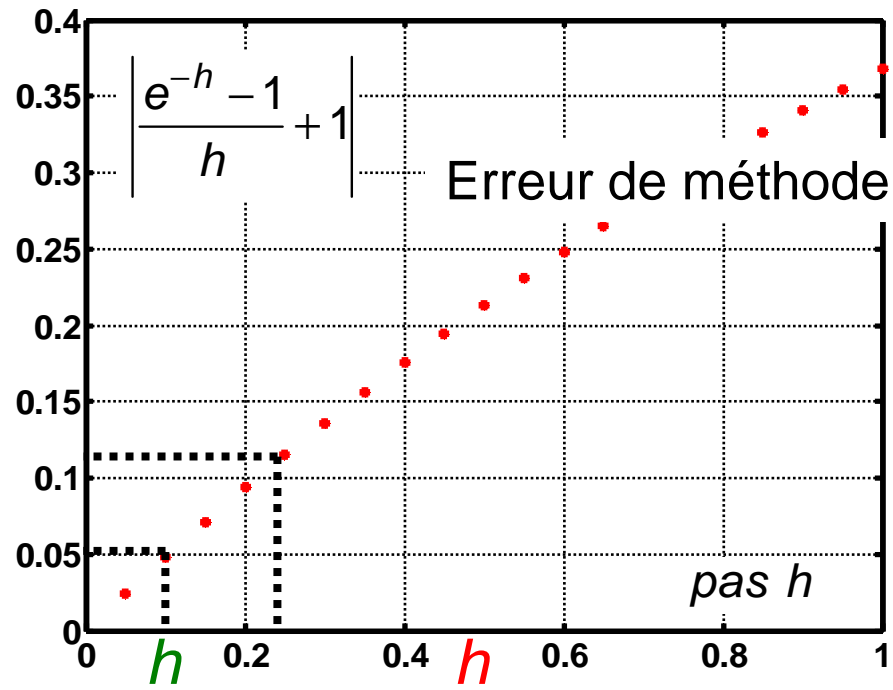
$$\text{Or } e^{-h} = 1 - h + \frac{h^2}{2!} - \frac{h^3}{3!} + \dots + (-1)^p \frac{h^p}{p!} + \dots \text{ d'où:}$$

$$\frac{h^2}{2!} y_n'' + \dots + \frac{h^p}{p!} y_n^{(p)} + \dots = (e^{-h} - 1 + h) y_n$$

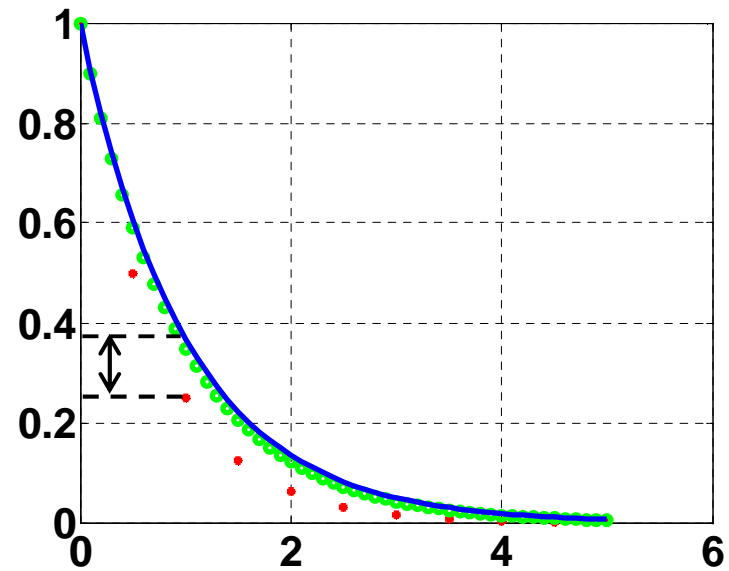
Se limiter au premier ordre, c'est considérer que le rapport

$$\mathfrak{R} = \left| \frac{h^2}{2!} y_n'' + \dots + \frac{h^p}{p!} y_n^{(p)} + \dots \right| / |h y_n'| \text{ reste négligeable.}$$

$$\text{Dans notre cas, on trouve : } \mathfrak{R} = \left| \frac{e^{-h} - 1}{h} + 1 \right| \approx \left| \frac{h}{2} - \frac{h^2}{6} + \dots \right|$$



$h = 0.25$
 $h = 0.1$





b- Méthode de la tangente améliorée (Euler d'ordre 2)

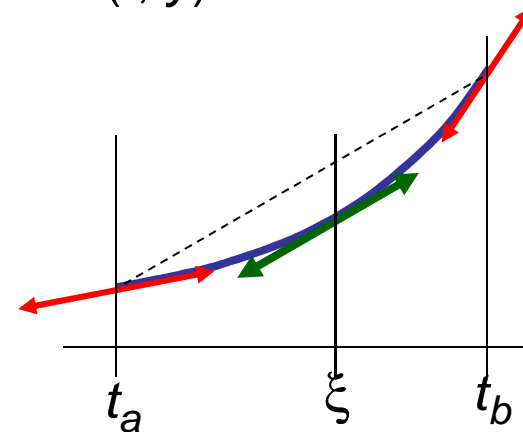
Méthode qui s'appuie sur un DL au second ordre

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + \frac{h^2}{2!} y''_n + \underbrace{\dots + \frac{h^p}{p!} y^{(p)}_n + \dots}_{\text{partie négligée}}$$

Problème : comment estimer une dérivée seconde en y_n alors que l'on ne sait que calculer des pentes avec $Y(t, y)$

Piste : si $y(t)$ dérivable sur $[t_a, t_b]$ alors, il existe $\xi \in [t_a, t_b]$ tel que :

$$y(t_b) = y(t_a) + (t_b - t_a) y'(\xi)$$

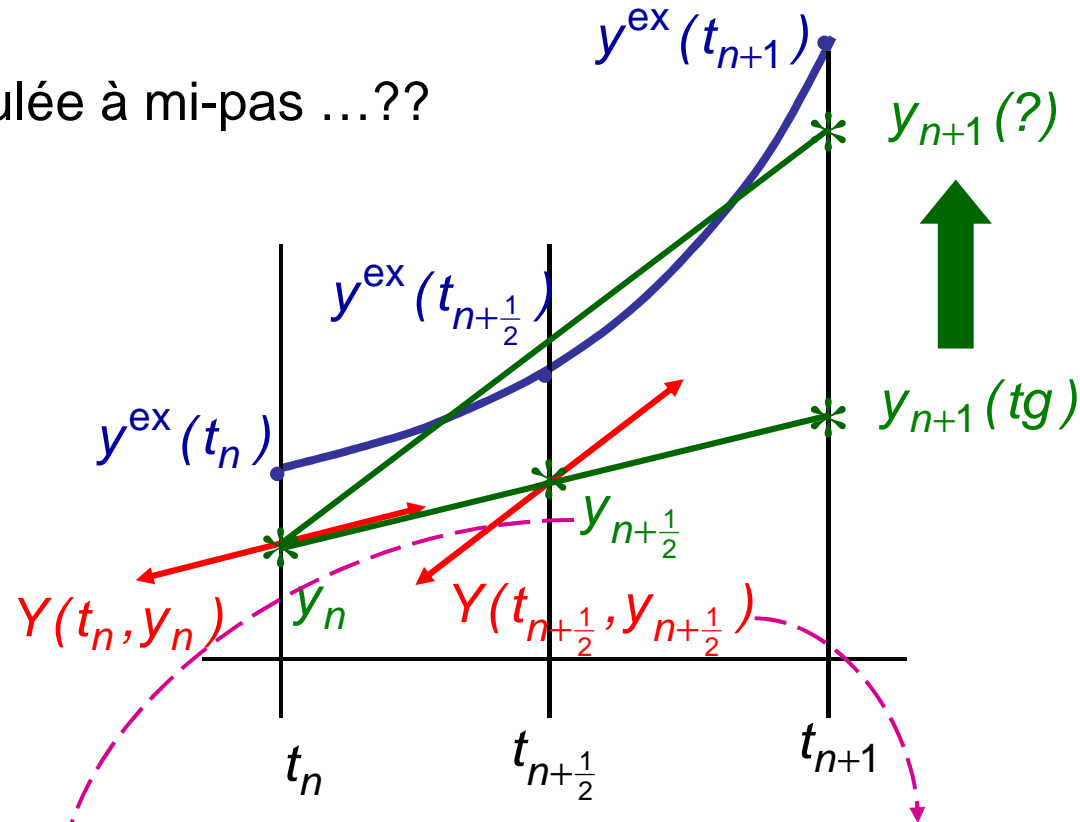


Idée : essayer d'estimer un DL du second ordre en utilisant une autre (d'autres) pente(s) que celle(s) calculée(s) en (t_n, y_n)



Tentative intuitive de justification :

Pente calculée à mi-pas ...??



$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} Y(t_n, y_n) \quad Y\left(t_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}\right) = Y\left(t_n + \underbrace{\frac{h}{2}}_{\delta t}, y_n + \underbrace{\frac{h}{2} Y(t_n, y_n)}_{\delta y}\right)$$

Augmentation de l'ordre

- Problème aux valeurs initiales:

$$\frac{dy}{dt} = Y(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

- Algorithme exact

$$y^{n+1} = y^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{dy}{dt} dt = y^n + \int_{t^n}^{t^{n+1}} Y(t, y) dt$$

- Comment estimer l'intégrale de Y ?

Augmentation de l'ordre

- Méthode à un pas:

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t \times \Phi(y^n, t^n, \Delta t)$$

- Euler: $\Phi(y^n, t^n, \Delta t) = Y(t^n, y^n)$

- Méthode d'ordre p si:

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} - \Phi(y^n, t^n, \Delta t) = O(\Delta t^p)$$

Augmentation de l'ordre

- Il suffit de prendre un développement de Taylor plus grand ...

$$y^{n+1} = y^n + \frac{dy}{dt} \Delta t + \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{\Delta t^2}{2} + \dots + \frac{d^p y}{dt^p} \frac{\Delta t^p}{p!} + O(\Delta t^{p+1})$$

- Et de définir $\Phi(y^n, t^n, \Delta t)$ comme

$$\Phi(y^n, t^n, \Delta t) = \frac{dy}{dt}(y^n, t^n) + \frac{d}{dt} \left[\frac{dy}{dt} \right] (y^n, t^n) \frac{\Delta t}{2} + \dots$$

Augmentation de l'ordre

- En utilisant l'EDO vérifiée par y :

$$\frac{dy}{dt}(t^n) = Y(t^n, y^n) = Y^n$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2}(t^n) = \frac{dY}{dt}(t^n, y^n) = \left[\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right] = \left[Y_t^n + Y_y^n Y^n \right]$$

$$\frac{d^3 y}{dt^3}(t^n) = \left[Y_{tt}^n + Y_{yt}^n Y^n + (Y_y^n Y_y^n + Y_t^n) Y_y + Y_{ty}^n Y^n + Y_{yy}^n Y^{n^2} \right]$$

- Et donc:

$$\begin{aligned} \Phi(y^n, t^n, \Delta t) = & Y^n + \left[Y_t^n + Y_y^n Y^n \right] \frac{\Delta t}{2} + \\ & + \left[Y_{tt}^n + Y_{yt}^n Y^n + (Y_y^n Y_y^n + Y_t^n) Y_y + Y_{ty}^n Y^n + Y_{yy}^n Y^{n^2} \right] \frac{\Delta t^2}{6} + \dots \end{aligned}$$

Passage pratique à l'ordre 2

- Plutôt que d'estimer des dérivées d'ordre élevées, il est préférable de mieux choisir les endroits où on évalue Y
- On part de

$$\Phi(y^n, t^n, \Delta t) = A_1 \underbrace{Y(t^n, y^n)}_{Y^n} + A_2 Y(t^n + \alpha \Delta t, y^n + \beta \Delta t)$$

- Par identification jusqu'à l'ordre 1 inclus

$$Y^n + \left[Y_t^n + Y_y^n Y^n \right] \frac{\Delta t}{2} = (A_1 + A_2) Y^n + A_2 \left[\alpha \Delta t \times Y_t^n + \beta \Delta t \times Y_y^n \right]$$

$$A_2 \alpha = \frac{1}{2} \quad A_2 \beta = \frac{Y^n}{2} \quad A_1 + A_2 = 1$$

Runge-Kutta d'ordre 2

- Schéma à deux « étapes » ($A_1=0, A_2=1$):

$$k_1 = Y(t^n, y^n)$$

$$k_2 = Y\left(t^n + \frac{\Delta t}{2}, y^n + \frac{k_1 \Delta t}{2}\right)$$

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t \times k_2$$

Passage pratique à l'ordre p

- On part de $k_1 = Y(t^n, y^n)$
 $k_2 = Y(t^n + \alpha_2 \Delta t, y^n + k_1 \beta_{21} \Delta t)$
...
 $k_i = Y\left(t^n + \alpha_i \Delta t, y^n + \sum_{j=1}^{i-1} k_j \beta_{ij} \Delta t\right)$

$$\Phi(y^n, t^n, \Delta t) = \sum_{j=1}^p A_j k_j$$

- Par identification on obtient les coefficients qui permettent d'obtenir l'ordre p

Passage pratique à l'ordre p

- Nombre de coefficients à fixer:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_i \quad p-1 \quad \alpha_1 = 0 \\ \beta_{ij} \quad p(p-1)/2 \\ A_i \quad p \end{array} \right\} = 2p + \frac{p(p-1)}{2} - 1$$

- Système non-linéaire sous déterminé

Runge-Kutta ordre 4

- Problème aux valeurs initiales:

$$k_1 = Y(t^n, y^n)$$

$$k_2 = Y\left(t^n + \frac{\Delta t}{2}, y^n + \frac{\Delta t}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = Y\left(t^n + \frac{\Delta t}{2}, y^n + \frac{\Delta t}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = Y(t^n + \Delta t, y^n + \Delta tk_3)$$

$$y^{n+1} = y^n + \frac{\Delta t}{6} \times [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$



II-2 Petit interlude

Illustration des notions de **convergence**, de **stabilité** et d'**erreur** associées à un schéma d'intégration d'E.D., au travers d'un exemple.

On reprend le problème différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -y, \text{ pour } t \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{dont la solution analytique est } y(t) = e^{-t}$$

dans le cas où on utilise la méthode d'Euler (RK1).

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h y'_n \\ &= (1-h)y_n \\ &= \mathbf{(1-h)^{n+1}} \end{aligned}$$

...expression analytique de la solution numérique ...



a- convergence

On dit qu'un schéma numérique d'intégration converge si la solution numérique tend vers la solution exacte lorsque le pas d'intégration tend vers zéro.

Considérons l'instant $t_{n+1} = \tau$ fixé

$$\tau = (1+n)h = \text{Cte}$$

Si le pas h tend vers zéro, le nombre de pas n tend vers l'infini :

Si $h \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow +\infty$

$$y_\tau = (1-h)^{n+1} = (1-h)^{\frac{\tau}{h}} = 1 - \tau + \frac{\tau}{h} \left(\frac{\tau}{h} - 1 \right) \frac{h^2}{2!} - \frac{\tau}{h} \left(\frac{\tau}{h} - 1 \right) \left(\frac{\tau}{h} - 2 \right) \frac{h^3}{3!} + \dots$$

soit, en développant et en passant à la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_\tau = 1 - \tau + \frac{\tau^2}{2!} - \frac{\tau^3}{3!} + \dots = e^{-\tau}$$

solution numérique

solution analytique

b- stabilité

On considère ici la stabilité asymptotique, i.e. lorsque $t \rightarrow +\infty$
La solution analytique exacte est telle que : $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$



Pour être acceptable la solution numérique approchée par la méthode d'Euler (**explicite**) doit vérifier :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^{\text{exp}} = 0 \quad \text{avec} \quad \underline{y_n^{\text{exp}} = (1-h)^n}$$

La stabilité est assurée si $0 < h < 2$ (condition de stabilité)

Une alternative : la méthode d'**Euler implicite**

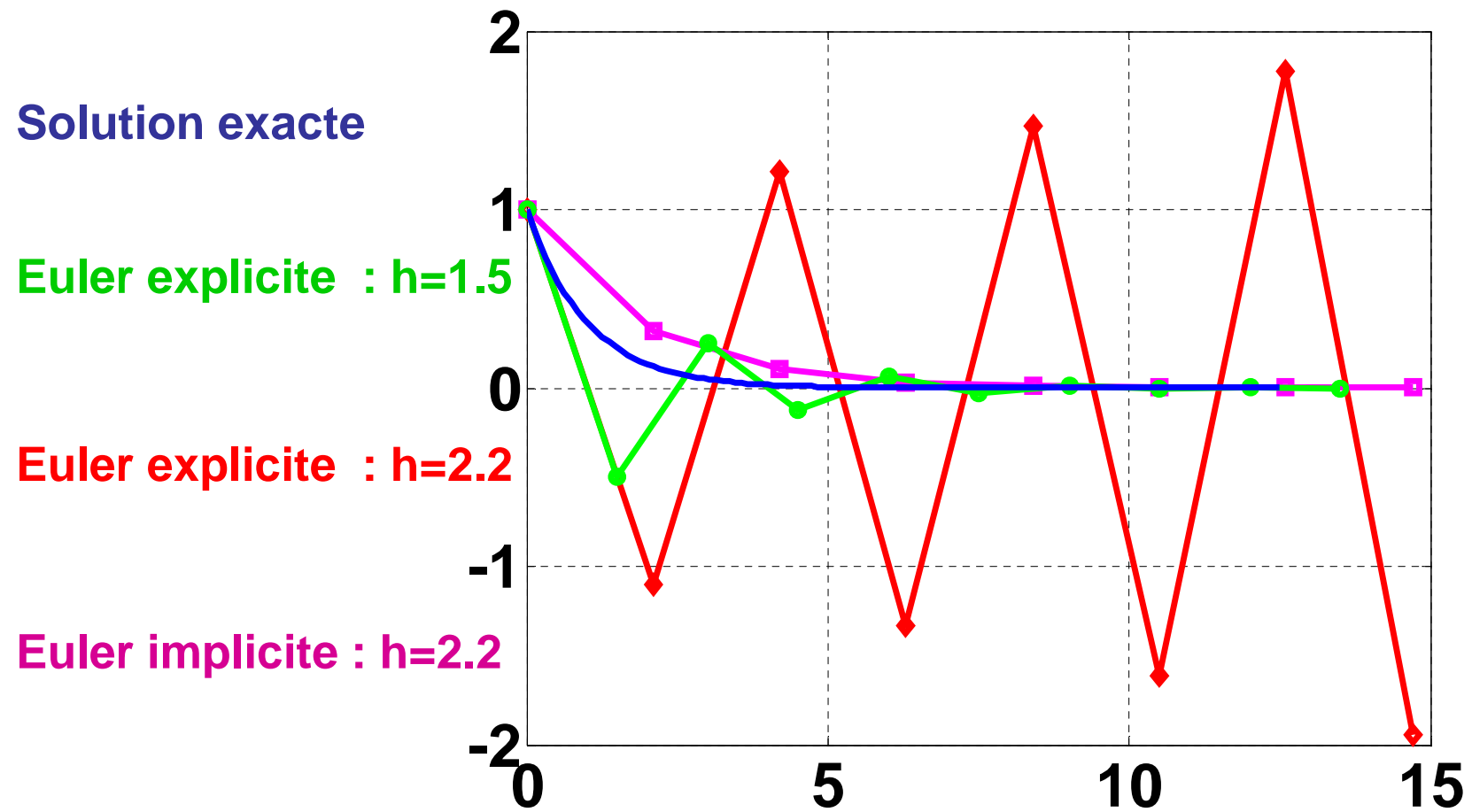
$$y_n = y_{n+1} - h y'_{n+1} + \underbrace{\frac{h^2}{2} y''_{n+1} + \dots}_{\text{partie négligée}}$$

soit encore,

$$y_{n+1} = y_n + h y'_{n+1} = y_n - h y_{n+1} \quad \text{soit enfin} \quad \underline{y_{n+1}^{\text{imp}} = \frac{y_n^{\text{imp}}}{1+h} = \frac{1}{(1+h)^{n+1}}}$$

$$\forall h > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n^{\text{imp}} = 0$$

La méthode (d'Euler) implicite est inconditionnellement stable





c- erreur

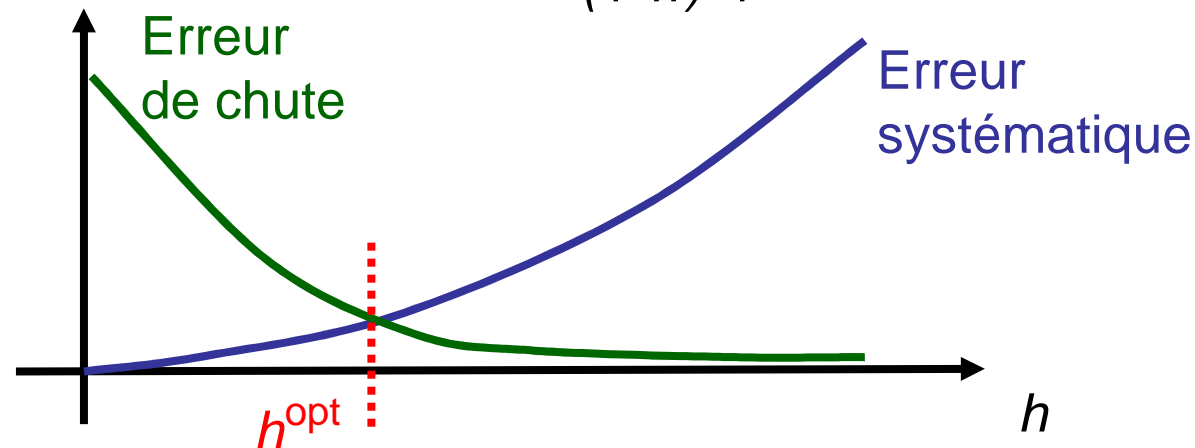
L'erreur par pas s'écrit : $\varepsilon_n = y(t_n) - y_n$

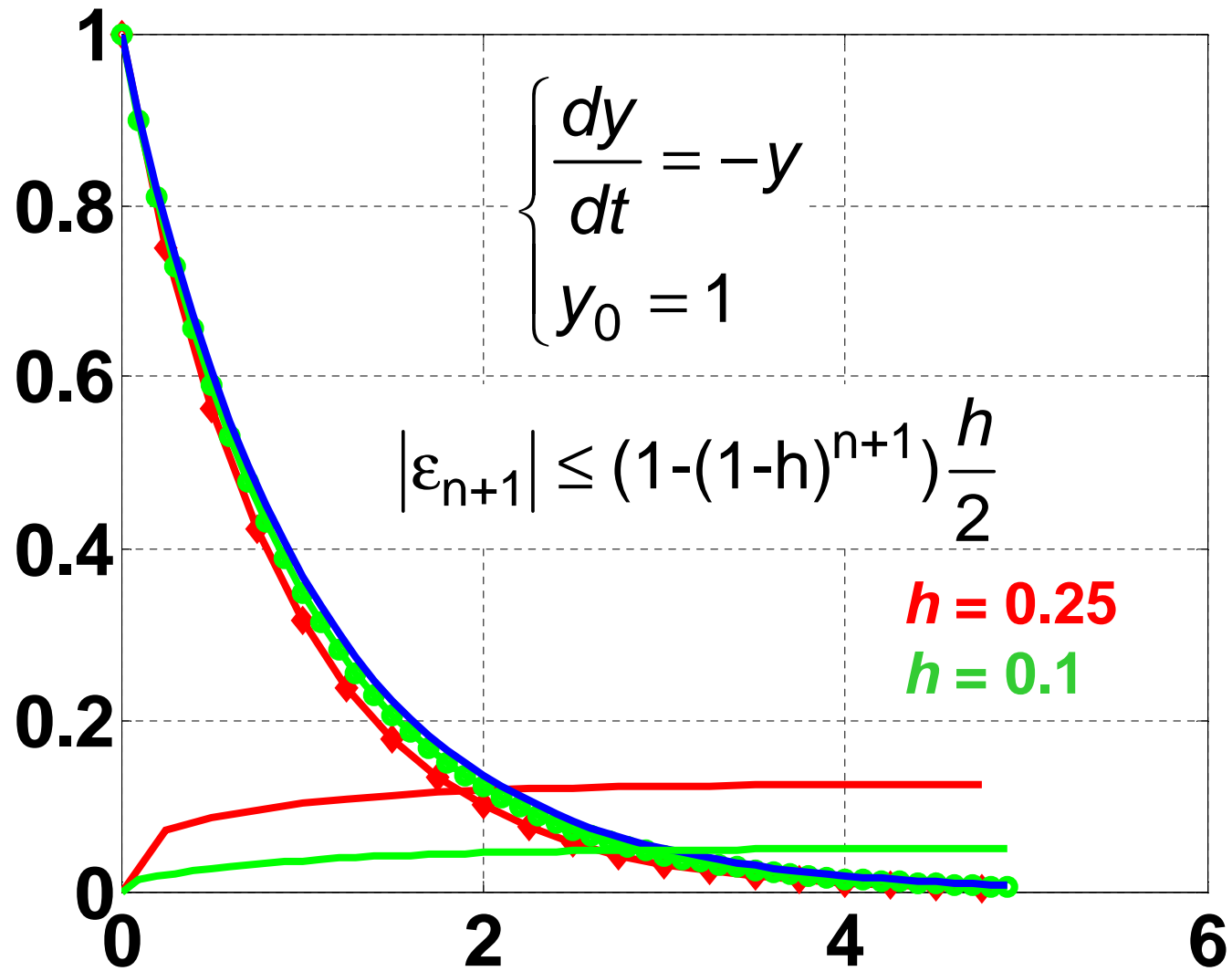
or $y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2!} y''(t_n + \theta h)$ $0 \leq \theta \leq 1$

par ailleurs, $y_{n+1} = (1-h)y_n$

d'où $\varepsilon_{n+1} = (1-h)\varepsilon_n + \frac{h^2}{2!} e^{-(t_n+\theta h)}$

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{n+1}| &\leq (1-h)|\varepsilon_n| + \frac{h^2}{2} \leq e^h |\varepsilon_n| + \frac{h^2}{2} \leq (1-h)^2 |\varepsilon_{n-1}| + \frac{h^2}{2} (1-h) + \frac{h^2}{2} \\ &\leq \dots \leq e^{(n+1)h} \underbrace{|\varepsilon_0|}_0 + \frac{h^2}{2} \underbrace{\left[1 + (1-h) + (1-h)^2 + \dots + (1-h)^n \right]}_{\frac{(1-h)^{n+1}-1}{(1-h)-1}} \leq (1-(1-h)^{n+1}) \frac{h}{2} \end{aligned}$$







II-3 Méthodes à pas liés

a-Principe

Le principe est le même que celui des méthodes à pas séparés : i.e. construire la solution en t_{n+1} en s'appuyant sur DL d'ordre p . Pour estimer les termes du DL d'ordre supérieur ou égal à deux, on utilise, cette fois, les informations obtenues aux pas précédents.

Toute une famille de méthodes peut être construite sur ce principe. Elles sont explicites ou implicites.

Il s'agit de la **famille des méthodes d'Adams**

... à ne pas confondre avec ...



b- méthodes d'Adams explicites

Problème : trouver y vérifiant

$$\begin{cases} y' = Y(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \text{ condition initiale} \\ t \in [t_0, t_1] \text{ domaine d'intégration} \end{cases}$$

On développe, une fois encore, en série de Taylor :

$$y(t+h) = y(t) + h y'(t) + \frac{h^2}{2} y''(t) + \dots$$

$$\text{avec } y' = f, y'' = \frac{df}{dt}, \dots$$

L'idée est donc d'exprimer les dérivées successives de f à l'aide des valeurs de f aux pas précédents. On introduit pour cela la notion de

... différences finies.



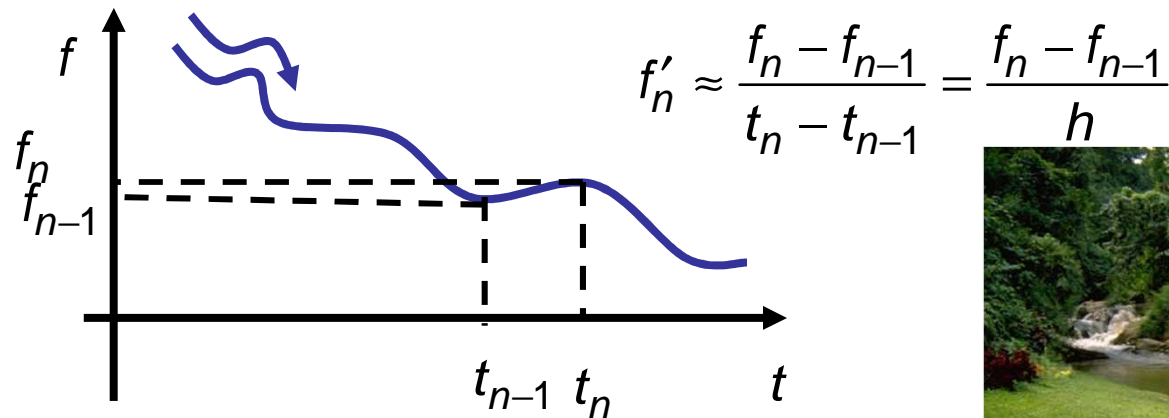
Adams d'ordre 1 explicite (A1E) ou Euler :

$$y_{n+1} = y_n + hf_n \quad \text{A1E} = \text{RK11} = \text{Euler}$$

Adams d'ordre 2 explicite (A2E) ou Adams-Bashforth:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2} f'_n$$

On écrit Y sous forme de différences finies « à gauche » (« amont »).



$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [3f_n - f_{n-1}]$$

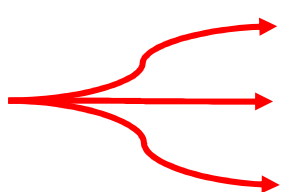




Remarques importantes

Démarrage des méthodes d'Adams :

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}[3f_0 - f_{-1}]$$



- Pas connu
- Connu
- Pas de sens physique

Solution : amorçage avec RK₁₁

dérivée première par différences finies

amont	aval	symétriques
$f'_n = \frac{f_n - f_{n-1}}{h}$	$f'_n = \frac{f_{n+1} - f_n}{h}$	$f'_n = \frac{f_{n+1} - f_{n-1}}{2h}$
ordre 1 en f	ordre 1 en f	ordre 2 en f



Adams d'ordre 3 explicite (A3E) :

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2!} f'_n + \frac{h^3}{3!} f''_n$$

On remplace f' et f'' par des différences finies amont, en prenant garde d'aller jusqu'à l'ordre 3.

Ainsi pour estimer f' , on écrira :

$$f(t-h) = f(t) - hf'(t) + \frac{h^2}{2} f''(t) + \dots \quad \text{soit} \quad \underline{f'(t) = \frac{f(t) - f(t-h)}{h} + \frac{h}{2} f''(t) + \dots}$$

Pour déterminer la dérivée seconde, on écrira :

$$\begin{cases} f(t-h) = f(t) - hf'(t) + \frac{h^2}{2} f''(t) + \dots \\ f(t-2h) = f(t) - 2hf'(t) + 2h^2 f''(t) + \dots \end{cases}$$

$$\text{Soit,} \quad \underline{f''(t) = \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} + \dots}$$



En reportant les deux approximations suivantes :

$$f'_n = \frac{f_n - f_{n-1}}{h} + \frac{h}{2} f''_n \quad f''_n = \frac{f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}}{h^2}$$

dans l'expression : $y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2!} f'_n + \frac{h^3}{3!} f''_n$

on trouve *in fine*

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} [23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}]$$

Généralisation : Adams d'ordre p explicite (ApE) :

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{k=0}^{p-1} \beta_{pk} f_{n-k}$$

Exemple : à l'ordre 4

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} [55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}]$$



c- méthodes d'Adams implicites

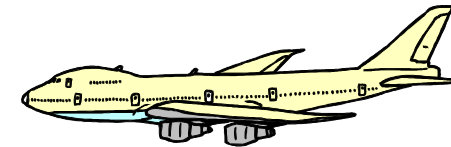
Elles découlent du même principe ; la différence est que l'on souhaite tenir compte de l'information en $n+1$ quand on estime la solution en $n+1$.

Pour cela, on écrit :

$$y(t) = y(t+h-h) = y(t+h) - h.y'(t+h) + \frac{h^2}{2} y''(t+h) - \dots$$

Comme précédemment, on pose :

$$y' = f ; y'' = f' ; y''' = f''$$



D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + h f_{n+1} - \frac{h^2}{2!} f'_{n+1} + \frac{h^3}{3!} f''_{n+1} - \dots (-1)^{p+1} \frac{h^p}{p!} f^{(p)}_{n+1} + \dots \\
 f_{n+1} = y'(t_{n+1}) = Y(t_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}), f'_{n+1} = \dots \quad \text{implicite}
 \end{array} \right.$$

$$|y_{n+1}^{(k+1)} - y_{n+1}^{(k)}| \leq \varepsilon_y \quad \text{test d'arrêt}$$



Adams d'ordre 1 implicite (A1I) :

$$y_{n+1} = y_n + hf_{n+1} \quad \text{A1I} = \text{RK1I} = \text{Euler implicite}$$

Adams d'ordre 2 implicite (A2I) ou Crank-Nicolson:

$$y_{n+1} = y_n + hf_{n+1} - \frac{h^2}{2} f'_{n+1}$$

Si on pose $f'_{n+1} = \frac{f_{n+1} - f_n}{h}$ on obtient

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n)$$

Adams d'ordre p implicite (A p I) :

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{k=0}^{p-1} \gamma_{nk} f_{n+1-k}$$

si $p = 4$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$$

d- remarques



Les formules implicites, itératives, consomment plus de temps « machine » que les formules explicites, mais :

- Elles sont stables, inconditionnellement.

- La convergence est d'autant plus rapide que l'estimation de $y_{n+1}^{(0)}$ est proche de y_{n+1}





e- méthodes de type prédicteur-correcteur

Formule de prédiction : Adams explicite

Formule de correction : Adams implicite

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n) \end{cases} \quad \text{ordre 2}$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}) \end{cases} \quad \text{ordre 4}$$



III- SYSTEME DIFFERENTIEL DU 1^{er} ORDRE

III-1 cas linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 \\ \dots = \dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{X} = AX + B \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

On peut utiliser toutes les méthodes vues précédemment ...

Euler explicite :

$$X^{k+1} = X^k + hAX^k + hB$$

$$X^{k+1} = (1 + hA)X^k + hB$$

Intégrer 1 SD du 1^{er} ordre = effectuer 1 produit de matrice à chaque pas

Euler implicite :

$$X^{k+1} = X^k + hAX^{k+1} + hB$$

$$\underbrace{(1 - hA)}_{\mathcal{A}} X^{k+1} = \underbrace{X^k + hB}_{\mathcal{B}}$$

Intégrer 1 SD du 1^{er} ordre = résoudre 1 système linéaire à chaque pas

III-2 cas non linéaire



$$\begin{cases} \dot{X} = A(t, X)X + B(t, X) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Plus délicat à résoudre ...

Mais, on peut essayer : une méthode explicite, ou implicite avec une méthode de point fixe, une méthode itérative de type Jacobi ou Gauss-Seidel ... en version non linéaire.



Modèle proie-prédateur

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = cxy - dy \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} a & -bx \\ cy & -d \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_X$$

$$(X^{k+1})^{p+1} = X^k + hA((X^{k+1})^p)((X^{k+1})^{p+1})$$

$$(X^{k+1})^0 = X^k \text{ attention aux indices } k \text{ et } p$$



IV- PROBLEMES DU 2nd ORDRE (ET PLUS)

IV-1 Problème à conditions initiales

Matlab® : Initial Value Problems for ODEs

Exemple :

$$\begin{cases} a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y'_0 \end{cases} \quad \text{avec } a(t) \neq 0$$

on pose : $y' = z; y'_0 = z_0$

$$\begin{cases} z' = \frac{d(t) - b(t)z - c(t)y}{a(t)} \\ y' = z \\ y(0) = y_0 \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a}(t) & -\frac{b}{a}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{a}(t) \end{pmatrix}$$

RK, Adams, ...

$$\begin{pmatrix} z(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Conditions initiales



RK44_2D

$$\vec{y}' = \begin{cases} y_1' = Y_1(t, y_1, y_2) \\ y_2' = Y_2(t, y_1, y_2) \end{cases} = \vec{Y}(t, \vec{y}) \quad \vec{y}_0 = \begin{cases} y_1(0) = y_{10} \\ y_2(0) = y_{20} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1^{(n+1)} = y_1^{(n)} + \frac{1}{6} h (Y_{11} + 2Y_{21} + 2Y_{31} + Y_{41}) \\ y_2^{(n+1)} = y_2^{(n)} + \frac{1}{6} h (Y_{12} + 2Y_{22} + 2Y_{32} + Y_{42}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_{11} = Y_1(t_n, y_1^{(n)}, y_2^{(n)}) \\ Y_{12} = Y_2(t_n, y_1^{(n)}, y_2^{(n)}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_{21} = Y_1(t_{n+\frac{1}{2}}, y_1^{(n)} + \frac{h}{2} Y_{11}, y_2^{(n)} + \frac{h}{2} Y_{12}) \\ Y_{22} = Y_2(t_{n+\frac{1}{2}}, y_1^{(n)} + \frac{h}{2} Y_{11}, y_2^{(n)} + \frac{h}{2} Y_{12}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_{31} = Y_1(t_{n+\frac{1}{2}}, y_1^{(n)} + \frac{h}{2} Y_{21}, y_2^{(n)} + \frac{h}{2} Y_{22}) \\ Y_{32} = Y_2(t_{n+\frac{1}{2}}, y_1^{(n)} + \frac{h}{2} Y_{21}, y_2^{(n)} + \frac{h}{2} Y_{22}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_{41} = Y_1(t_{n+1}, y_1^{(n)} + Y_{31}, y_2^{(n)} + Y_{32}) \\ Y_{42} = Y_2(t_{n+1}, y_1^{(n)} + Y_{31}, y_2^{(n)} + Y_{32}) \end{cases}$$



IV-2 Problème aux limites

Matlab® : Boundary Value Problem Solver

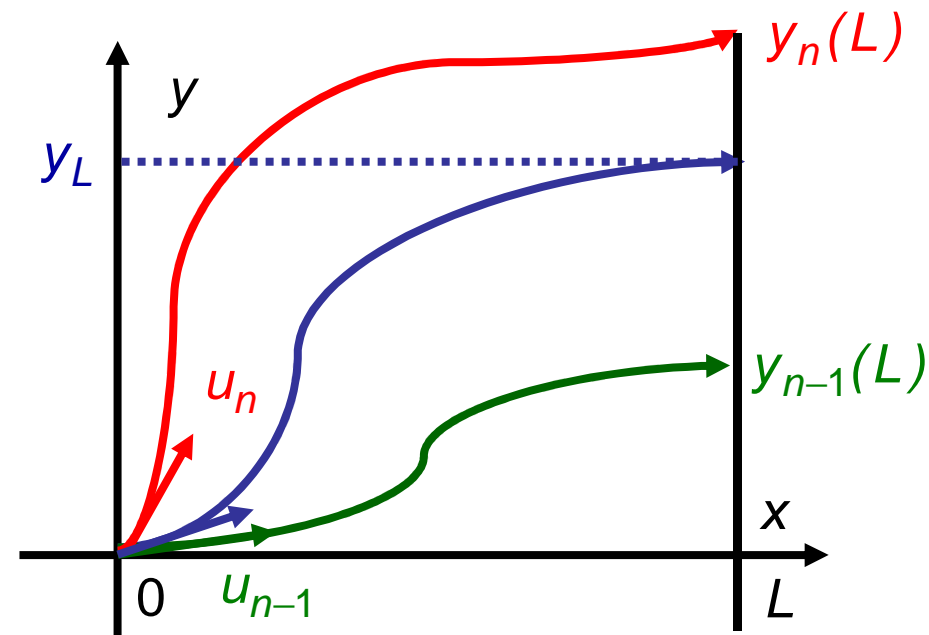
a- méthode de tir

On transforme un problème aux limites en un problème à conditions initiales :

$$\begin{cases} a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) \\ y(0) = y_0 \\ y(L) = y_L \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = u \end{cases}$$

$y(L, u) = y_L$
recherche de la racine u





En utilisant la méthode de la corde ...

$$u_{n+1} = \frac{(y_L - y_{n-1})u_n - (y_L - y_n)u_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

critère d'arrêt : $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$

b- cas particulier important : équation différentielle linéaire

$$\begin{cases} a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) \\ y(0) = y_0 \\ y(L) = y_L \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2.
On construit y_1 et y_2 deux solutions avec les pentes u_1 et u_2 .

Toute combinaison linéaire de ces 2 solutions est solution.

$$y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$$



$$\lambda_1 \underbrace{(a(x)y_1'' + b(x)y_1' + c(x)y_1)}_{d(x)} + \lambda_2 \underbrace{(a(x)y_2'' + b(x)y_2' + c(x)y_2)}_{d(x)} = d(x)$$

On doit donc avoir :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

Et les conditions limites donnent

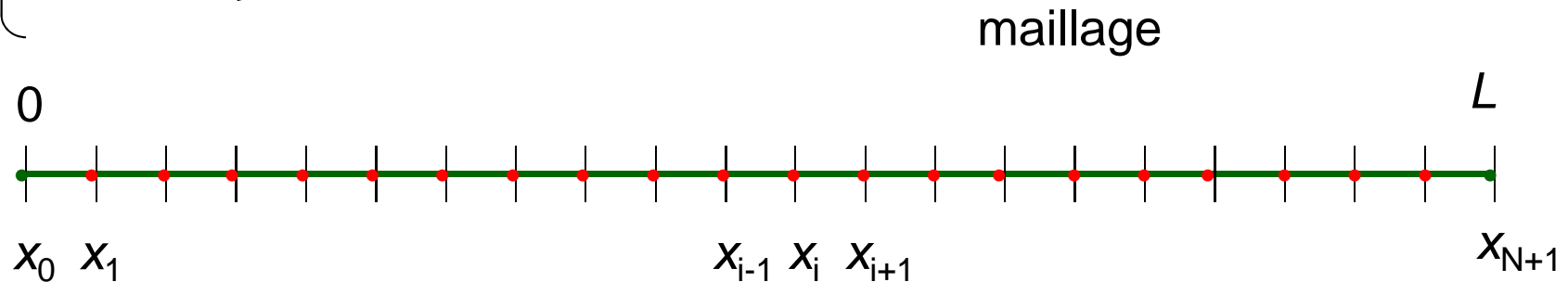
$$\begin{cases} \lambda_1 y_0 + \lambda_2 y_0 = y_0 \\ \lambda_1 y_1(L) + \lambda_2 y_2(L) = y_L \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{y_L - y_2(L)}{y_1(L) - y_2(L)} \\ \lambda_2 = \frac{y_L - y_1(L)}{y_2(L) - y_1(L)} \end{cases}$$



c- méthode matricielle

$$\left\{ \begin{array}{l} a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) \\ y(0) = y_0 \\ y(L) = y_L \end{array} \right\} \text{C.L. de type Dirichlet}$$



On utilise des différences finies symétriques

$$y(x + \Delta x) \approx y(x) + \Delta x y'(x) + \frac{\Delta x^2}{2} y''(x)$$

$$y(x - \Delta x) \approx y(x) - \Delta x y'(x) + \frac{\Delta x^2}{2} y''(x)$$

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x}$$

$$y''_i \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2}$$



On écrit en tout point M_i , $i=1, \dots, n$, l'équation différentielle en remplaçant les $y'(x)$ et $y''(x)$ par les approximations aux D.F.

$$a_i \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{\Delta x^2} - b_i \frac{y_{i-1} - y_{i+1}}{2\Delta x} + c_i y_i = d_i \quad i = 1, \dots, n$$

En regroupant, on obtient :

$$\underbrace{\left(\frac{a_i}{\Delta x^2} - \frac{b_i}{2\Delta x} \right)}_{\alpha_i} y_{i-1} + \underbrace{\left(c_i - \frac{2a_i}{\Delta x^2} \right)}_{\beta_i} y_i + \underbrace{\left(\frac{a_i}{\Delta x^2} + \frac{b_i}{2\Delta x} \right)}_{\gamma_i} y_{i+1} = \underbrace{d_i}_{\delta_i} \quad i = 1, \dots, n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 = y_0 \text{ (C.L.)} \\ \alpha_1 y_0 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 y_2 = \delta_1 \\ \alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2 + \gamma_2 y_3 = \delta_2 \\ \dots = \dots \\ \alpha_i y_{i-1} + \beta_i y_i + \gamma_i y_{i+1} = \delta_i \\ \dots = \dots \\ y_{n+1} = y_L \text{ (C.L.)} \end{array} \right.$$

Systèmes de n équations à n
Inconnues



Conditions aux limites (Dirichlet)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_i & \beta_i & \gamma_i & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_n & \beta_n \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}}_Y = \underbrace{\begin{pmatrix} \delta_1 - \alpha_1 y_0 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_i \\ \vdots \\ \delta_{n-1} \\ \delta_n - \gamma_n y_{n+1} \end{pmatrix}}_B$$

Trouver la solution d'une EDO se ramène ici à la résolution d'un système linéaire de n équations à n inconnues. On peut alors utiliser les méthodes vues précédemment (Gauss, Choleski, ...).

Types de conditions aux limites



Dirichlet : y est connu	$y(L) = y_L$	$y_{n+1} = y_L$
Neuman : y' est connu	$\left. \frac{dy}{dx} \right _0 = y'_0$	$\frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2\Delta x} = y'_0$
Fourier : relation linéaire entre y et y'	$y'(0) + \lambda y(0) = 0$	$\frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2\Delta x} + \lambda y_0 = 0$

Les DF peuvent être aussi utilisées pour résoudre des EDP ...