
SUR LES ATOMES AUTOMORPHES POUR $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

par

Stefano Morra

à Quelqu'un.

Résumé. — Soit $p \geq 3$. Le but de cet article est de donner une description de la structure Iwahori des extensions entre séries principales qui apparaissent naturellement dans la correspondance de Langlands p -modulaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. On obtient cela à travers l'étude de certains opérateurs à la Hecke de l'algèbre d'Iwasawa associée à l'Iwahori et on déduit au passage une généralisation au cas non générique d'un résultat de Breuil et Paskunas.

Table des matières

1. Introduction	1
2. Préliminaires	9
3. Disvertissement en théorie d'Iwasawa	16
4. Premier dévissage de l'atome	19
5. Le comportement de \tilde{e}_{n+1}	25
6. Espaces invariants et applications	27
7. Structure interne de l'atome	32
8. Appendice	35
Références	41

1. Introduction

Depuis ses premières réalisations, la correspondance de Langlands locale p -adique (cf. [Ber10], [Bre10]) se manifeste comme un phénomène essentiellement nouveau.

Classification mathématique par sujets (2000). — 22E50, 11F85.

Mots clefs. — p -modular Langlands program, local-global compatibility, Serre weight, extension of principal series, socle filtration, multiplicity one.

Non seulement l'espace des vecteurs localement algébriques de la représentation p -adique automorphe associé à une représentation galoisienne *peut* être nul (cf. [Col] §VI.6, récemment retrouvé par Dospinescu dans [Dos]), mais on a besoin d'inclure, à l'intérieur de la correspondance, certaines représentations automorphes *réductibles*.

Bien que la correspondance locale pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ soit désormais largement comprise grâce aux travaux de plusieurs mathématiciens (cf. [Ber10], [Bre10] pour des références précises sur la genèse scientifique de la théorie), la situation pour des autres groupes reste extrêmement délicate, même dans le cas p -modulaire (travaux de Paskunas, Breuil-Paskunas, Hu, Schraen...). En particulier, la prolifération des représentations p -modulaires des groupes réductifs p -adiques rend difficile, à l'heure actuelle, la formulation d'une correspondance locale précise.

Néanmoins, les conjectures de Serre généralisées (cf. [BDJ], [Sche], [Her1]), qui décrivent les systèmes locaux dont la cohomologie garde la donnée d'un paramètre galoisien, fournissent des outils géométriques globaux pour l'étude des représentations locales qui devraient apparaître dans une correspondance de Langlands modulo p .

C'est la stratégie adoptée dans les articles récents [BD] et [BH], où des propriétés locales de certaines représentations p -modulaires viennent transsubstantiées dans un contexte global. L'aspect important est que ces premières investigations se consacrent au cas particulier où la représentation galoisienne est *ordinaire*, i.e. lorsque son image est contenue dans un sous-groupe de Borel de \mathbf{GL}_n . La représentation locale automorphe est, dans ce cas, *réductible* (en général non scindée).

À la lumière de ces nouveaux progrès et de la phénoménologie spécifique de \mathbf{GL}_2 (parue dans les travaux de Breuil et Paskunas, cf. [Br-Pa]) cela se manifeste comme naturel l'étude détaillée de ces représentations modulaires dans le cadre de la correspondance locale pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, représentations qui sont souvent appelées atomes automorphes de longueur 2 (cf. [Col], §VII.4).

C'est le sujet de cet article, poursuivi dans le sillon des études commencés dans [Mo], [Mo1] (où l'auteur traite le cas supersingulier). On tient toutefois à souligner que, différemment du cas irréductible (où la restriction à $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ des représentations irréductibles est essentiellement unisérielle), le comportement interne des atomes automorphes de longueur 2 est délicat : on retrouve une infinité de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ extensions non triviales entre les constituants des deux séries principales de l'atome ; leur nature dépend de plus de leur position à l'intérieur de l'atome.

Voyons maintenant plus en détail les résultats et les perspectives de l'étude effectué dans cet article. Afin de simplifier les énoncés ⁽¹⁾, nous nous limitons au cas générique, bien que certains résultats restent valables dans un cadre plus général.

Un atome galoisien générique (de dimension 2 pour $G_{\mathbf{Q}_p} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$) est une représentation galoisienne isomorphe à $\begin{bmatrix} \omega^{r+1}un_\lambda & * \\ 0 & un_{\lambda^{-1}} \end{bmatrix}$, où $\lambda \in \overline{\mathbf{F}_p}^\times$, un_λ est le caractère non ramifié envoyant p sur λ , ω est le caractère cyclotomique modulo p et $r \in \{1, \dots, p-3\}$ (on utilise les identifications usuelles provenant de la théorie de

1. Similement, on utilisera ici des notations légèrement différentes de ceux utilisées dans le reste de l'article.

corps de classe locale). À celle-ci correspond, à travers le foncteur inverse de Colmez, un générateur linéaire $A_{r,\lambda}$ de l'espace

$$E_{r,\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ext}_{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)}^1(\text{Ind}_{B(\mathbf{Q}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \omega^{r+1} un_\lambda \otimes \omega^{-1} un_{\lambda^{-1}}, \text{Ind}_{B(\mathbf{Q}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} un_{\lambda^{-1}} \otimes \omega^r un_\lambda)$$

D'après des arguments standard d'algèbre homologique, et grâce à [Br-Pa], Theorem 20.3, on a un monomorphisme linéaire

$$E_{r,\lambda} \hookrightarrow \text{Ext}_{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)}^1(\text{ind}_{B(\mathbf{Z}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)} \chi_r \mathfrak{a}, \text{ind}_{B(\mathbf{Z}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)} \chi_r^s) \xleftarrow{\sim} \text{Ext}_I^1(\text{ind}_{B(\mathbf{Z}_p)}^I \chi_r \mathfrak{a}, \text{ind}_{B(\mathbf{Z}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)} \chi_r^s) \quad (1)$$

où $\chi_r \mathfrak{a} = \omega^{r+1} \otimes \omega^{-1} |_{\mathbf{Z}_p^\times \times \mathbf{Z}_p^\times} \chi_r^s = 1 \otimes \omega^r |_{\mathbf{Z}_p^\times \times \mathbf{Z}_p^\times}$ et I désigne le sous-groupe d'Iwahori de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

Les conditions de Mittag-Leffler étant vérifiée (Proposition 4.7), on a de plus

$$\text{Ext}_I^1(\text{ind}_{B(\mathbf{Z}_p)}^I \chi_r \mathfrak{a}, N) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{n \in \mathbf{N}} \text{Ext}_I^1((\text{ind}_{B(\mathbf{Z}_p)}^I \chi_r \mathfrak{a})^{K_{n+1}}, N) \rightarrow \text{Ext}_I^1((\text{ind}_{B(\mathbf{Z}_p)}^I \chi_r \mathfrak{a})^{K_{n+1}}, N) \quad (2)$$

où K_{n+1} désigne le $(n+1)$ -ième sous groupe de congruence principal de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ et où l'on a posé $N \stackrel{\text{def}}{=} \text{ind}_{B(\mathbf{Z}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)} \chi_r^s$.

Par réciprocity de Frobenius, on a enfin

$$(3) \quad \text{Ext}_I^1((\text{ind}_{B(\mathbf{Z}_p)}^I \chi_r \mathfrak{a})^{K_{n+1}}, N) = \text{Ext}_{K_0(p^{n+1})}^1(\chi_r \mathfrak{a}, N)$$

où $K_0(p^{n+1})$ est l'image réciproque, dans $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ du Borel standard de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}/p^{n+1})$. Posons \mathcal{B}_∞ (resp. \mathcal{B}_{n+1} , resp. \mathcal{B}_{n+1}^0) l'image de $A_{r,\lambda}$ via le morphisme (1) (resp. (2), resp. (3)).

La décomposition de Bruhat-Iwahori montre que $N|_I = N^+ \oplus N^-$ où N^\pm est un I -module uniserial. Si $A \cong k[[X]]$ désigne l'algèbre d'Iwasawa de l'unipotent inférieur $\overline{\mathbf{U}}(p\mathbf{Z}_p)$, on voit que $N^-|_A \cong A$, ce qui donne en particulier $(N^-)^{K_{n+1}} \cong A/(X^{p^n})$ pour tout $n \geq 1$.

La description de \mathcal{B}_{n+1}^0 , qui jouera un rôle crucial dans l'article, est la suivante :

Proposition 1.1. — *Soit $n \geq 1$ et considérons l'extension de $k[[K_0(p^{n+1})]]$ -modules discrets*

$$0 \rightarrow N^+ \oplus N^- \rightarrow \mathcal{B}_{n+1}^0 \rightarrow \chi_r \mathfrak{a} \rightarrow 0.$$

Soit \mathfrak{e}_{n+1} le relèvement d'un générateur linéaire de $\chi_r \mathfrak{a}$ et supposons que \mathfrak{e}_{n+1} est fixé par $\overline{\mathbf{U}}(p^{n+1}\mathbf{Z}_p)$ modulo $\text{soc}(N^+)$.

Alors, pour tout $\begin{bmatrix} 1+pa & b \\ p^{n+1}c & 1+pd \end{bmatrix} \in K_0(p^{n+1})$, on a $(g-1)\mathfrak{e}_{n+1} \in N^+ \oplus (N^-)^{K_{n+1}}$ et, plus précisément

$$(4) \quad (g-1)\mathfrak{e}_{n+1} = c_{r,\lambda,n}(\bar{b}X^{p-3-r} - (\bar{a} - \bar{d})(r+2)X^{p-2-r})$$

modulo $N^+ \oplus (X^{p-3-r+(p-2)})$, où $c_{r,\lambda,n} \in k^\times$ ne dépend que de \mathfrak{e}_{n+1} et où l'on a identifié $(N^-)^{K_{n+1}}$ avec $A/(X^{p^n})$.

Remarquons que l'énoncé de la Proposition 1.1 n'est pas vide; en fait, on peut l'améliorer de la manière suivante :

Proposition 1.2. — Soit $n \geq 1$ et considérons l'extension de $k[[K_0(p^{n+1})]]$ -modules discrets

$$0 \rightarrow N^+ \oplus N^- \rightarrow \mathcal{B}_{n+1}^0 \rightarrow \chi_r \mathfrak{a} \rightarrow 0.$$

Il existe un relèvement ϵ_{n+1} d'un générateur linéaire de $\chi_r \mathfrak{a}$ qui est fixé par $\overline{\mathbf{U}}(p^{n+1}\mathbf{Z}_p)$ modulo $\text{soc}(N^+)$ et tel que l'égalité (4) de la Proposition 1.1 reste valable modulo $\text{soc}(N^+) \oplus (X^{p-3-r+(p-2)})$.

De toute façon, on n'aura pas besoin de la version forte de l'égalité (4) dans la suite.

Pour passer de la Proposition 1.1 à l'espace des K_{n+1} -invariants de $A_{r,\lambda}$ (ainsi que à la description des poids de Serre y apparaissant à l'intérieur) on utilise de manière cruciale l'action du tore entier et de l'unipotent supérieur sur l'algèbre d'Iwasawa A (via l'isomorphisme naturel $N^-|_A \cong A$). Cette action, bien que compliquée a priori, peut se décrire simplement en termes de l'uniformisante X , modulo une certaine puissance de l'idéal maximal de A :

Proposition 1.3. — Soit $m \geq 1$ et soit $g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \in \mathbf{B}(\mathbf{Z}_p)$. L'action de g sur l'algèbre d'Iwasawa A est décrite par

$$g \cdot X^m \in a^m d^{r-m} X^m + (X^{m+(p-2)}).$$

À ce point, l'espace des K_{n+1} -invariants de $A_{r,\lambda}$ s'obtient à l'aide de manipulations simples comme combinaison des Propositions 1.1 et 1.3 :

Théorème 1.4. — Soit $1 \leq r \leq p-3$ et $n \geq 0$. L'espace des K_{n+1} -invariants de $A_{r,\lambda}$ est décrit par la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \left(\text{Ind}_{B(\mathbf{Q}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} un_{\lambda^{-1}} \otimes \omega^r un_{\lambda} \right)^{K_{n+1}} &\rightarrow (A_{r,\lambda})^{K_{n+1}} \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\text{Ind}_{B(\mathbf{Q}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \omega^{r+1} un_{\lambda} \otimes \omega^{-1} un_{\lambda^{-1}} \right)^{K_{n+1}} \rightarrow \text{Sym}^{r+2} k^2 \otimes \det^{-1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Remarquons qu'on s'attend à ce que le Théorème 1.4 reste valable pour $r = 0$ et pour $p \geq 3$ en utilisant les arguments développés dans cet article. Ceci est effectivement le cas si $n = 1$, où l'on peut de plus montrer que le $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ -socle de $A_{r,\lambda}$ reste irréductible, mais la technicité des preuves dans le cas général on fait désister l'auteur de les poursuivre.

Grâce aux travaux d'Emerton sur la compatibilité locale-globale de la correspondance de Langlands p -modulaire ([**Eme**]) le Théorème 1.4 permet de décrire plusieurs composantes isotypiques de la cohomologie mod p des courbes modulaires définies sur \mathbf{Q} , avec niveau arbitrairement profond en p . Ceci permet de compléter le travail effectué dans [**Mo1**], où l'on a traité le cas supersingulier :

Théorème 1.5. — Soit $p \geq 3$, $\bar{\rho} : G_{\mathbf{Q}} \rightarrow \mathbf{GL}_2(k)$ une représentation continue, impaire et absolument irréductible. Soit Σ_0 l'ensemble des diviseurs premiers du conducteur d'Artin N de $\bar{\rho}$, $\kappa \in \{2, \dots, p+1\}$ le poids minimal (à torsion près) associé à $\bar{\rho}$ par Serre et soit $t \geq 1$.

Soit $K_{\Sigma_0} \leq \prod_{\ell \in \Sigma_0} \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_\ell)$ un niveau admissible pour $\bar{\rho}$ au sens d'Emerton et \mathfrak{m} l'idéal maximal associé à $\bar{\rho}$ dans l'algèbre de Hecke sphérique, dehors de $\Sigma_0 \cup \{p\}$, de la courbe modulaire

$$Y_{t, \Sigma_0} \stackrel{\text{def}}{=} Y(K_t K_{\Sigma_0} \prod_{\ell \notin \Sigma_0 \cup \{p\}} \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_\ell)).$$

Définissons enfin

$$(5) \quad d \stackrel{\text{def}}{=} \dim_k \left(\bigotimes_{\ell \in \Sigma_0} \pi(\bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_\ell}}) \right)^{K_{\Sigma_0}}$$

où $\pi(\bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_\ell}})$ est la représentation lisse de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_\ell)$ associée à $\bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_\ell}}$ par la correspondance de Langlads p -modulaire d'Emerton-Helm ([EH]).

Alors, si $p^t N > 4$, la composante \mathfrak{m} -isotypique de la cohomologie mod p de la courbe Y_{t, Σ_0} est décrite par

$$\dim_k (H_{\text{ét}}^1(Y(K_t K_{\Sigma_0} K_0^\Sigma)_{\bar{\mathbf{Q}}}, k)[\mathfrak{m}]) = \begin{cases} 2d(2p^{t-1}(p+1) - 3) & \text{si } \kappa = 2 \\ & \text{et } \bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_p}} \text{ est absolument irréductible,} \\ 2d(2p^{t-1}(p+1) - 4) & \text{si } \kappa \neq 2 \\ & \text{et } \bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_p}} \text{ est absolument irréductible,} \\ 2d(2(p+1)p^{t-1} - (\kappa+1)) & \text{si } 1 \leq \kappa - 2 \leq p - 3 \\ & \text{et } \bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_p}} \text{ est absolument réductible non-scindée.} \end{cases}$$

La valeur de d devrait pouvoir se décrire explicitement, à la suite des travaux d'Emerton-Helm ([EH]), Helm [Hel] et des travaux en cours de rédaction de Nadimpalli [Nad] sur la compatibilité des conducteurs d'Artin et automorphes modulo ℓ . Par exemple, si pour tout $\ell \in \Sigma_0$, la semi-simplifiée $(\bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_\ell}})^{ss}$ n'est pas la tordue de $1 \oplus \omega$ ou de $1 \oplus 1$, le sous groupe

$$K_{1, \Sigma_0}(N) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \prod_{\ell \in \Sigma_0} \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_\ell) \mid c \equiv d - 1 \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

est un niveau admissible pour $\bar{\rho}$, tel que $d = 1$.

L'établissement de la Proposition 1.1 permet également de décrire en détail la structure de \mathcal{B}_{n+1} , en évitant les manipulations directes avec les polynômes de Witt.

D'abord, on obtient à l'aide de la réciprocity de Frobenius, le résultat suivant :

Proposition 1.6. — Soit $n \geq 1$. Le $k[[I]]$ -module $\mathcal{B}_\infty / \text{soc}(N^+)$ admet une décomposition en somme directe $\mathcal{B}_\infty / \text{soc}(N^+) \cong N^+ / \text{soc}(N^+) \oplus \mathcal{B}_\infty^-$.

De plus, la suite exacte

$$0 \rightarrow N^- \rightarrow \mathcal{B}_\infty^- \rightarrow \text{ind}_{\mathbf{B}(\mathbf{Z}_p)}^I \chi_r \mathfrak{a} \rightarrow 0$$

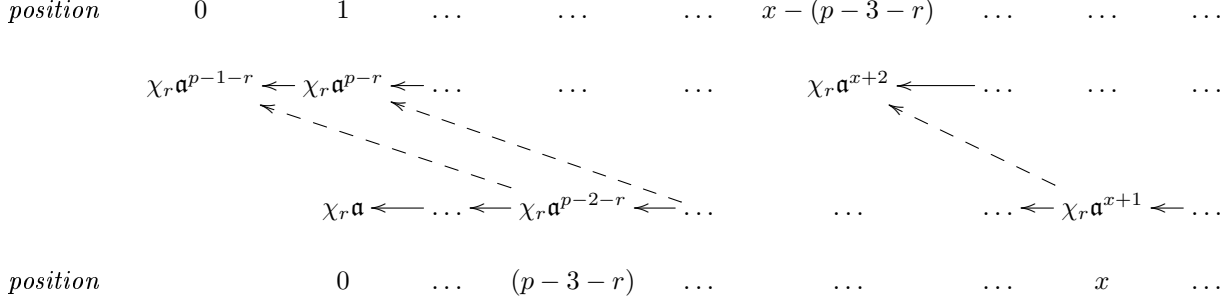
est scindée après restriction à $\bar{\mathbf{U}}(p\mathbf{Z}_p)$.

Ceci nous permet de restreindre notre attention au $k[[I]]$ -module \mathcal{B}_∞^- , dont la structure est décrite par le Théorème suivant :

Théorème 1.7. — *Le $k[[I]]$ -module lisse \mathcal{B}_∞^- se cadre dans une suite exacte*

$$0 \rightarrow N^- \rightarrow \mathcal{B}_\infty^- \rightarrow \mathrm{ind}_{B(\mathbf{Z}_p)}^I \chi_r \mathfrak{a} \rightarrow 0$$

et sa structure est décrite par le graphe suivant :



où la première ligne désigne la structure des sous-modules de N^- , la deuxième ligne cela de $\mathrm{ind}_{B(\mathbf{Z}_p)}^I \chi_r \mathfrak{a}$ et l'extension diagonale entre $\chi_r \mathfrak{a}^{x+1}$ et $\chi_r \mathfrak{a}^{x+2}$ est non scindée si et seulement si $x + 1 \not\equiv -\frac{r+2}{2} \pmod{p}$.

Encore une fois, on s'attends à ce que les techniques de cet article puissent permettre d'établir le cas $r = 0$ et $p \geq 3$. Signalons de plus que, par un argument essentiellement formel lié à la réciprocity de Frobenius, on peut déduire du Théorème 1.7 la structure de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ -module de l'atome $A_{r,\lambda}$.

L'article est organisé de la manière suivante.

La section 2 est consacrée aux préliminaires. On rappelle d'abord la réalisation des séries principales, soit comme induites paraboliques (cf. §2.1), soit comme induites compactes (cf. §2.2), en réalisant de manière explicite l'isomorphisme de Barthel et Livné en termes de certaines bases linéaires naturelles.

Dans §3 on considère l'algèbre d'Iwasawa de l'unipotent inférieur $\overline{\mathbf{U}}(p\mathbf{Z}_p)$ et on étudie les actions associées à ses structures supplémentaires. On y trouve le dictionnaire crucial qui permet de déduire les théorèmes principaux de l'article à partir de la Proposition 1.1.

Le premier dévissage de la structure de l'atome se trouve au §4; cela nous permet, par des arguments d'algèbre homologique, de nous réduire à l'étude d'une famille de I -modules lisses (Proposition 4.7), ensuite à des représentations de certains sous-groupes ouverts de I .

La section 5 a pour objectif l'étude des représentations \mathcal{B}_{n+1}^0 mentionnées dans la Proposition 1.1. C'est le coeur technique de l'article et les manipulations, les plus techniques ont été mises en appendice.

Finalement, l'étude des K_{n+1} -invariants est effectué au §6 et celui de la structure interne de $A_{r,\lambda}$ au 7.

1.1. Notations. — Soit p un nombre premier impair. Étant donné un corps p -adique F , avec anneau des entiers noté par \mathcal{O}_F et corps résiduel (fini) k_F , nous

désignons par $x \mapsto \bar{x}$ le morphisme de réduction $\mathcal{O}_F \rightarrow k_F$ et par $\bar{x} \mapsto [\bar{x}]$ le morphisme de Teichmüller (on convient que $[0] \stackrel{\text{def}}{=} 0$).

Considérons le groupe linéaire général \mathbf{GL}_2 ; nous écrivons $\mathbf{B} = \mathbf{TU}$ pour le Borel des matrices triangulaires supérieures et $\overline{\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{TU}}$ pour le Borel opposé. Cet article est, en une grande partie, consacré à l'étude de certaines représentations du groupe p -adique $G \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Nous écrivons $Z \stackrel{\text{def}}{=} Z(G)$ et $K \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ pour désigner le centre et le sous-groupe compact maximal de G respectivement. Nous rappelons que le sous-groupe d'Iwahori de K , que l'on désigne par $K_0(p)$, est défini comme l'image inverse du Borel fini $\mathbf{B}(\mathbf{F}_p)$ par le morphisme de réduction $K \rightarrow \mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)$. Le pro- p -Iwahori, i.e. le pro- p -Sylow de $K_0(p)$, sera désigné par $K_1(p)$.

De manière similaire on définit les sous-groupes de congruence $K_0(p^n)$, $K_1(p^n)$, pour $n \in \mathbf{N}$: $K_0(p^n)$ est défini comme l'image inverse de $\mathbf{B}(\mathbf{Z}_p/p^n)$ par $K \rightarrow \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p/p^n)$ (le morphisme de réduction modulo p^n) et $K_1(p^n)$ en est son pro- p -Iwahori. Enfin, pour $n \geq 1$, nous désignons par $\overline{\mathbf{U}}(p^n)$ le groupe des $p^n \mathbf{Z}_p$ -points de $\overline{\mathbf{U}}$.

Afin d'alléger les notations, on écrit $B \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}(\mathbf{Q}_p)$ et on introduit les éléments suivants

$$s \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in G, \quad \Pi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{bmatrix} \in G.$$

Soit E un corps p -adique, \mathcal{O} son anneau des entiers et k son corps résiduel (que l'on suppose fini). Une représentation σ d'un sous-groupe fermé H de G sera toujours supposée *lisse*, et réalisée sur des k -espaces linéaires.

Si $h \in H$ on écrira par fois $\sigma(h)$ pour désigner l'automorphisme k -linéaire induit sur l'espace sous-jacent à σ par l'action de h . De manière similaire, une représentation irréductible de G sera toujours supposée *admissible* (l'espace des vecteurs fixés par un sous-groupe ouvert de G est de dimension finie).

Soient $H_2 \leq H_1$ deux sous-groupes fermés de G . Étant donnée une représentation lisse σ de H_1 , on écrit $\text{Ind}_{H_1}^{H_2} \sigma$ pour désigner l'induite lisse de σ , de H_1 à H_2 , et on désigne par $\text{ind}_{H_1}^{H_2} \sigma$ le sous-espace de $\text{Ind}_{H_1}^{H_2} \sigma$ constitué par les fonctions à support compact. Les

Si $v \in \sigma$ et $h \in H_1$ nous écrivons $[h, v]$ pour désigner l'unique élément de $\text{ind}_{H_1}^{H_2} \sigma$ à support en $H_2 h^{-1}$ et qui envoie h^{-1} sur v .

Nous déduisons en particulier les égalités suivantes :

$$(6) \quad h' \cdot [h, v] = [h' h, v], \quad [h k, v] = [h, \sigma(k) v]$$

pour tout $h' \in H_1$, $k \in H_2$.

Les constructions précédentes seront essentiellement utilisées lorsque $H_1 = B$, $H_2 = G$ ou $H_1 = K_0(p^n)$, $H_2 = K$, ou encore $H_1 = KZ$, $H_2 = G$ (auquel cas, l'induite $\text{ind}_{KZ}^G \sigma$ est constitué par les fonctions à support compact *modulo le centre* Z).

Un *poids de Serre* est une représentation absolument irréductible de K . À isomorphisme près, ils admettent la réalisation en termes de l'algèbre symétrique :

$$(7) \quad \sigma_{r,t} \stackrel{\text{def}}{=} \det^t \otimes \text{Sym}^r k^2$$

où $r \in \{0, \dots, p-1\}$ et $t \in \{0, \dots, p-2\}$ (ceci donne une paramétrisation des classes d'isomorphisme des poids de Serre par des couples $(r, t) \in \{0, \dots, p-1\} \times \{0, \dots, p-2\}$).

Rappelons que la K -représentation $\text{Sym}^r k^2$ peut s'identifier à $k[X, Y]_r^h$, le sous-espace linéaire de $k[X, Y]$ décrit par les polynômes homogènes de degré r , muni de l'action naturelle de K :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot X^{r-i} Y^i \stackrel{\text{def}}{=} (\bar{a}X + \bar{c}Y)^{r-i} (\bar{b}X + \bar{d}Y)^i$$

pour $0 \leq i \leq r$.

On étend l'action de K sur un poids de Serre au groupe KZ , en imposant que la matrice scalaire $p \in Z$ agisse trivialement.

Un k -caractère du tore $\mathbf{T}(\mathbf{F}_p)$ sera considéré, par inflation, comme un caractère lisse de $K_0(p^n)$ (pour n'importe quel $n \in \mathbf{N}$).

On écrit par χ^s le caractère conjugué de χ , défini par

$$\chi^s(t) \stackrel{\text{def}}{=} \chi(sts)$$

pour tout $t \in \mathbf{T}(\mathbf{F}_p)$.

De manière analogue, si τ est une représentation lisse de $K_0(p)$, nous écrivons τ^s pour désigner la représentation conjuguée, définie par

$$\tau^s(h) = \tau(\Pi h \Pi)$$

avec $h \in K_0(p)$.

Soit $r \in \{0, \dots, p-1\}$. Les caractères suivantes de $\mathbf{T}(\mathbf{F}_p)$ vont jouer un rôle majeur dans la suite de l'article :

$$\chi_r \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \right) \stackrel{\text{def}}{=} a^r, \quad \mathfrak{a} \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \right) \stackrel{\text{def}}{=} ad^{-1}.$$

On désigne par $\omega : \mathbf{Q}_p^\times \rightarrow \mathbf{F}_p^\times$ la réduction modulo p du caractère cyclotomique p -adique.

Soit $\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ un graphe orienté simple. On dira qu'un sous-graphe plein \mathcal{T}' de \mathcal{T} est sphériquement complet si, étant donné un sommet $v' \in \mathcal{T}'$, le sous-graphe \mathcal{T}' contient le voisinage sortant de v' dans \mathcal{T} .

Si τ est une représentation lisse admissible de $K_0(p^n)$ (pour $n \in \mathbf{N}$) et $\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ un graphe simple orienté, on dira que la *structure* de τ est *décrite par la graphe* \mathcal{T} s'il existe un morphisme injectif de réseaux (pour l'inclusion)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Réseau des sous-graphes} \\ \text{sphériquement complets} \\ \text{de } \mathcal{T} \end{array} \right\} \hookrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Réseau des sous-espaces} \\ K_0(p^n)\text{-stables de } \tau. \end{array} \right\}$$

Par exemple, τ est unisérielle si et seulement si tout graphe décrivant la structure de τ est linéaire.

2. Préliminaires

2.1. Structure interne des séries principales pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. — Le but de cet numéro est de rappeler la structure interne des séries principales pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Bien qu'il s'agit de résultats bien connus et valables dans un contexte plus générale (cf. [Mo1] §5 et [Mo3], §8 pour une dissertation plus ample) on a réputé les rappeler ici : cela nous permet de fixer de manière soigneuse les notations, ce qui sera crucial pour la lecture des paragraphes à venir.

Nous rappelons ([Ba-Li], [Her2]) que les séries principales irréductibles pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sont décrites (à torsion près) par l'induite parabolique

$$\pi_{\mu,r} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ind}_{\mathbf{B}(\mathbf{Q}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} (\text{un}_\mu \otimes \omega^r \text{un}_{\mu^{-1}})$$

où $\mu \in \bar{k}^\times$, un_μ est le caractère non-ramifié sur \mathbf{Q}_p^\times caractérisé par $\text{un}_\mu(p) = \mu$, $r \in \{0, \dots, p-1\}$ et $(r, \mu) \notin \{(0, \pm 1), (p-1, \pm 1)\}$.

Comme $\mathbf{B}(\mathbf{Z}_p) \backslash \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ est compact, la décomposition d'Iwasawa nous fournit un isomorphisme K -équivariant :

$$(\text{Ind}_{\mathbf{B}(\mathbf{Q}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} (\text{un}_\mu \otimes \omega^r \text{un}_{\mu^{-1}}))|_K \cong \text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \cong \varinjlim_{n \geq 1} (\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s)$$

où $K_0(p^\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}(\mathbf{Z}_p)$ et les morphismes de transition au RHS sont obtenus, par induction (compacte), à partir des morphismes naturels $K_0(p^n)$ -équivariants

$$\chi_r^s \hookrightarrow \text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p^n)} \chi_r^s$$

pour $n \geq 1$

De plus, d'après les théorèmes de décomposition de Bruhat-Iwahori et Mackey, la restriction des fonctions à $K_0(p)$ induit une suite exacte $K_0(p)$ -équivariante scindée

$$0 \rightarrow (\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s)^+ \rightarrow \text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \rightarrow \text{ind}_{K_0(p^\infty)}^{K_0(p)} \chi_r^s \rightarrow 0.$$

Le résultat qui suit est formel :

Lemme 2.1. — Soit $\mu \in \bar{k}^\times$ et $r \in \{0, \dots, p-1\}$. On a un isomorphisme K -équivariant

$$(\text{Ind}_{\mathbf{B}(\mathbf{Q}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} (\text{un}_\mu \otimes \omega^r \text{un}_{\mu^{-1}}))|_K \cong \text{ind}_{K_0(p)}^K \left(\varinjlim_{n \geq 1} (\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s) \right).$$

L'action de Π sur la série principale $\text{ind}_{\mathbf{B}(\mathbf{Q}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} (\text{un}_\mu \otimes \omega^r \text{un}_{\mu^{-1}})$ induit un isomorphisme de $k[K_0(p)]$ -modules

$$(\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^{K_0(p)} \chi_r^s)^s \xrightarrow{\sim} (\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s)^+.$$

Démonstration. — Omissis. □

En particulier, les propriétés fines de la représentation $\pi_{\lambda,r}$ sont gardées par les induites finies $\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s$. Le phénomène crucial, qui dépend de manière *essentielle* du fait qu'on considère les \mathbf{Q}_p -points de \mathbf{GL}_2 , est que ces $k[K_0(p)]$ -modules sont *unisériels*.

Précisons brièvement cela. Fixons $n \geq 0$, ainsi qu'un générateur linéaire e pour le caractère χ_r^s . Pour une n -uplet $(l_1, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p-1\}^n$, définissons l'élément suivant de $\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s$:

$$F_{l_1, \dots, l_n}^{(1,n)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_1 \in \mathbf{F}_p} \lambda_1^{l_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p[\lambda_1] & 1 \end{bmatrix} \cdots \sum_{\lambda_n \in \mathbf{F}_p} \lambda_n^{l_n} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^n[\lambda_n] & 1 \end{bmatrix} [1, e].$$

On vérifie aisément (cf. [Mo2], §4 ou encore [Mo] §5) que l'ensemble

$$\mathcal{B}_{n+1}^- \stackrel{\text{def}}{=} \{F_{l_1, \dots, l_n}^{(1,n)} \in \text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s, (l_1, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p-1\}^n\}$$

fournit une base linéaire pour l'espace $\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s$ et que $\mathbf{T}(\mathbf{F}_p)$ opère sur $F_{l_1, \dots, l_n}^{(1,n)}$ par le caractère $\chi_r^s \mathbf{a}^{l_1 + \dots + l_n}$.

De plus, on dispose d'une application *injective*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{n+1}^- &\hookrightarrow \mathbf{N} \\ F_{l_1, \dots, l_n}^{(1,n)} &\mapsto \sum_{j=1}^n p^{j-1} l_j \end{aligned}$$

qui permet de munir \mathcal{B}_{n+1}^- d'un ordre total \preceq . Notons qu'il s'agit également de l'ordre antilexicographique \preceq sur l'ensemble $\{0, \dots, p-1\}^n$.

Pour une n -uplet $(l_1, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p-1\}^n$ définissons l'espace linéaire

$$\langle F_{\preceq(l_1, \dots, l_n)}^{(1,n)} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle F_{(l'_1, \dots, l'_n)}^{(1,n)}, (l'_1, \dots, l'_n) \preceq (l_1, \dots, l_n) \rangle.$$

Le résultat crucial est que la filtration linéaire induite sur $\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s$ par l'ordre total de \mathcal{B}_{n+1}^- est $K_0(p)$ -équivariante :

Proposition 2.2. — *Soit $n \in \mathbf{N}$, $r \in \{0, \dots, p-1\}$. Le $k[K_0(p)]$ -module discret $\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s$ est unisériel, sa filtration par le $K_0(p)$ -socle étant décrite par le graphe*

$$\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s : \quad \chi_r^s \longleftarrow \chi_r^s \mathbf{a} \longleftarrow \chi_r^s \mathbf{a}^2 \longleftarrow \dots \longleftarrow \chi_r^s.$$

De plus, pour tout n -uplet $(l_1, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p-1\}^n$, l'espace linéaire $\langle F_{\preceq(l_1, \dots, l_n)}^{(1,n)} \rangle$ est $K_0(p)$ -stable, en particulier c'est le $k[K_0(p)]$ -sous module de dimension $1 + \sum_{j=1}^n p^{j-1} l_j$ de $\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s$.

Démonstration. — Omissis. Cf. [Mo2] Proposition 4.2 ou [Mo] Proposition 5.10. \square

Remarquons qu'une conséquence triviale de la Proposition 2.2 est que $\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^{K_0(p)} \chi_r^s$ est elle même unisérielle et que les morphismes de transition définissant la co-limite

sont décrits par

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s &\hookrightarrow \mathrm{ind}_{K_0(p^{n+2})}^{K_0(p)} \chi_r^s \\ F_{l_1, \dots, l_n}^{(1, n)} &\mapsto F_{l_1, \dots, l_n, 0}^{(1, n+1)}. \end{aligned}$$

La situation pour le $k[K_0(p)]$ -module $(\mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s)^+$ est strictement analogue et se déduit via l'isomorphisme $K_0(p)$ -équivariant du Lemme 2.1.

On se limite ici à souligner qu'on a un isomorphisme de $k[K_0(p)]$ -modules discrets (induit par l'action de Π sur $\pi_{r, \lambda}$)

$$\begin{aligned} (\mathrm{ind}_{K_0(p^{n+2})}^{K_0(p)} \chi_r^s)^s &\xrightarrow{\sim} (\mathrm{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s)^+ \\ F_{l_0, \dots, l_n}^{(1, n+1)} &\mapsto F_{l_0, \dots, l_n}^{(0, n)} \end{aligned}$$

où $(\mathrm{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s)^+$ désigne le noyau de l'application naturelle de restriction $\mathrm{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s \rightarrow \mathrm{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s$ et pour toute $(n+1)$ -uplet $(l_0, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p-1\}^{n+1}$ on a défini les éléments suivants de $(\mathrm{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s)^+$:

$$F_{l_0, \dots, l_n}^{(0, n)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{\lambda_0 \in \mathbf{F}_p} \lambda_0 \begin{bmatrix} [\lambda_0] & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} F_{l_1, \dots, l_n}^{(1, n)} \in (\mathrm{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s)^+.$$

2.1.1. Les induites paraboliques finies. — On rappelle brièvement des résultats sur la réalisation des séries principales finies pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)$, en invitant le lecteur à se référer à [Br-Pa] pour un cadre plus général. Les résultats rappelés ici seront utiles au §6, où on détermine l'espace des K_{n+1} -invariants de $A_{r, \lambda}$.

Fixons $r, i \in \{0, \dots, p-2\}$ et considérons l'induite parabolique finie $\mathrm{ind}_{\mathbf{B}(\mathbf{F}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)} \chi_r^s \det^i$. Si l'on fixe une base linéaire $\{e\}$ pour le caractère $\chi_r^s \det^i$ on définit les éléments suivants, pour $0 \leq j \leq p-1$

$$f_j \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{\lambda_0 \in \mathbf{F}_p} \lambda_0^j \begin{bmatrix} [\lambda_0] & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} [1, e] \in \mathrm{ind}_{\mathbf{B}(\mathbf{F}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)} \chi_r^s \det^i.$$

On voit aisément que f_j est un $\mathbf{T}(\mathbf{F}_p)$ -vecteur propre, de caractère propre $\chi_r^s \det^i \mathfrak{a}^{-j}$ et que pour tout $j_0 \in \{0, \dots, p-1\}$ les sous-espaces linéaires

$$\langle f_j, 0 \leq j \leq j_0 \rangle$$

sont stables sous l'action de $\mathbf{B}(\mathbf{F}_p)$.

De plus, l'induite parabolique $\mathrm{ind}_{\mathbf{B}(\mathbf{F}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)} \chi_r^s \det^i$ est de longueur 2 et sa structure se décrit de la manière suivante :

Proposition 2.3. — *Soient $r, i \in \{0, \dots, p-2\}$. Alors*

i) si $r \neq 0$ on a une extension non scindée

$$0 \rightarrow \mathrm{Sym}^r k^2 \otimes \det^i \rightarrow \mathrm{ind}_{\mathbf{B}(\mathbf{F}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)} \chi_r^s \det^i \rightarrow \mathrm{Sym}^{p-1-r} k^2 \otimes \det^{r+i} \rightarrow 0.$$

Les familles

$$\{f_0, \dots, f_{r-1}, f_r + (-1)^i [1, e]\}, \quad \{f_r, \dots, f_{p-1}\}$$

induisent une base linéaire pour le socle et le cosocle de $\text{ind}_{\mathbf{B}(\mathbf{F}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)} \chi_r^s \det^i$ respectivement (en particulier, $f_0, f_r + (-1)^i [1, e]$ sont des générateurs pour l'espace de plus haut et plus bas poids de $\text{Sym}^r k^2 \otimes \det^i$ respectivement).

iii) Si $r = 0$ alors $\text{ind}_{\mathbf{B}(\mathbf{F}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)} \chi_r^s \det^j$ est semi-simple et

$$\text{ind}_{\mathbf{B}(\mathbf{F}_p)}^{\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)} \chi_r^s \det^i \xrightarrow{\sim} (1 \oplus \text{Sym}^{p-1} k^2) \otimes \det^i.$$

Les familles

$$\{f_0 + (-1)^i [1, e]\}, \quad \{f_0, f_1, \dots, f_{p-2}, f_{p-1} + (-1)^i [1, e]\}$$

fournissent des bases linéaires pour \det^i et $\text{Sym}^{p-1} k^2 \otimes \det^i$ respectivement.

2.2. Induction parabolique et induction compacte. — Ce numéro contient des rappels sur la réalisation des séries principales à l'aide de l'algèbre de Hecke sphérique associée aux poids de Serre pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)$. Le lecteur peut se référer à [Mo1], §2.1, [Bre1] §2.4-2.7 pour un résumé plus détaillé des résultats qui suivent, découverts initialement par Barthel et Livné ([Ba-Li]).

Fixons $r \in \{0, \dots, p-1\}$ et considérons la réalisation usuelle du poids de Serre $\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_r$ comme la composante homogène de degré r de l'algèbre monoïdale $k[X, Y]$.

La décomposition de Cartan pour \mathbf{GL}_2 nous permet de réaliser le Théorème de décomposition de Mackey de la manière expressive suivante

$$(\text{ind}_{KZ}^G \sigma)|_K \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} R_n(\sigma)$$

où l'on a défini $R_n(\sigma)$ comme étant la sous K -représentation de $\text{ind}_{KZ}^G \sigma$ engendrée par $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^n & 0 \end{bmatrix} [1, Y^r]$. Si le poids de Serre σ est clair du contexte, on écrira simplement R_n .

C'est alors facile de voir que, pour tout $n \geq 0$, on a un isomorphisme K -équivariant naturel (induit par réciprocity de Frobenius)

$$\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \sigma^{(n)} \xrightarrow{\sim} R_{n+1}$$

où l'on a écrit $\sigma^{(n)}$ pour désigner la $K_0(p^{n+1})$ représentation obtenue à partir de $\sigma|_{K_0(p^{n+1})}$ via la conjugaison par l'élément $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix}$ (qui normalise $K_0(p^{n+1})$).

En particulier, on a une filtration évidente $\{R_{n+1}(i)\}_{i=0}^r$ sur chaque R_{n+1} , induite par la seule filtration $K_0(p^{n+1})$ -équivariante strictement croissante sur $\sigma^{(n)}$. De manière plus parlante, $R_{n+1}(i)$ est le sous $k[K]$ -module de R_{n+1} engendré par l'élément $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^n & 0 \end{bmatrix} [1, X^{r-i} Y^i]$.

Un parmi les aspects cruciaux de la théorie des représentations p -modulaires des groupes réductifs p -adiques déployés est la réalisation des algèbres de Hecke sphériques en termes de monoïdes commutatifs (cf. [Ba-Li], [Her3], [Oll]).

Dans le cas de \mathbf{GL}_2 on a le résultat suivant

Théorème 2.4 ([Ba-Li]). — *L'algèbre de Hecke des endomorphismes de $\text{ind}_{KZ}^G \sigma$ est commutative, et on a un isomorphisme de k -algèbres*

$$\mathcal{H}(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \text{End}_G(\text{ind}_{KZ}^G \sigma) \xrightarrow{\sim} k[T]$$

pour un opérateur T approprié.

L'opérateur T (pour le poids de Serre σ) est à support sur la double classe $K\alpha KZ$ et il est défini comme une projection linéaire sur σ . Par transport de structure on obtient une famille d'opérateurs K -équivariants T_n , définis sur chaque facteur R_n , qui admettent la description très concrète suivante.

Si $n \geq 1$ on a

$$T_n : R_n \rightarrow R_{n-1} \oplus R_{n+1} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^n & 0 \end{bmatrix} [1, X^{r-j} Y^j] \mapsto \sum_{\lambda_n \in \mathbf{F}_p} (-\lambda_n)^j \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^n [\lambda_n] & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, X^r] + \delta_{j,r} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n-1} & 0 \end{bmatrix} [1, Y^r]$$

pour tout $j \in \{0, \dots, r\}$ (ce qui détermine complètement T_n); notons que cela donne une décomposition évidente $T_n = T_n^+ \oplus T_n^-$ où $T_n^\pm : R_n \rightarrow R_{n\pm 1}$.

Pour $n = 0$, on a de manière analogue

$$T_0 : R_0 \rightarrow R_1$$

$$[1, X^{r-j} Y^j] \mapsto \sum_{\lambda_0 \in \mathbf{F}_p} (-\lambda_0)^j \begin{bmatrix} [\lambda_0] & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{bmatrix} [1, X^r] + \delta_{j,r} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{bmatrix} [1, X^r].$$

Si $\lambda \in k$, on écrit $\pi(r, \lambda)$ pour désigner le conoyau de l'endomorphisme $T - \lambda$ sur l'induite compacte $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_r$. Si θ est un \mathbf{Q}_p^\times -caractère, on écrit $\pi(r, \lambda, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \pi(r, \lambda) \otimes \theta$.

On introduit une base linéaire sur les $k[K]$ -modules R_{n+1} , qui va jouer un rôle cruciale dans l'étude de la structure interne de $\pi(r, \lambda)$.

Pour $1 \leq j \leq n$, pour une $n - j + 1$ -uplet $(l_j, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p-1\}^{n-j+1}$ et pour $l_{n+1} \in \{0, \dots, r\}$ définissons l'élément suivant de R_{n+1} :

$$F_{l_j, \dots, l_n}^{(j,n)}(l_{n+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_j \in \mathbf{F}_p} \lambda_j^{l_j} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^j [\lambda_j] & 1 \end{bmatrix} \cdots \sum_{\lambda_n \in \mathbf{F}_p} \lambda_n^{l_n} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^n [\lambda_n] & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, X^{r-l_{n+1}} Y^{l_{n+1}}] \in R_{n+1}.$$

Afin de ne pas alourdir les notations, on utilise la même écriture pour désigner l'image de $F_{l_j, \dots, l_n}^{(1,n)}(l_{n+1})$ dans $\pi(r, \lambda)$ et on écrit plus simplement $F_{l_n}^{(n)}(l_{n+1})$ lorsque $j = n$.

Si l'on écrit R_{n+1}^- pour désigner le sous $k[K_0(p)]$ -module de R_{n+1} engendré par $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, Y^r]$, c'est alors facile de voir que :

Lemme 2.5. — *Pour $n \geq 1$ on a un isomorphisme naturel*

$$R_{n+1} \xrightarrow{\sim} \text{ind}_{K_0(p)}^K R_{n+1}^-$$

et la famille

$$\mathcal{B}_{n+1,r}^- \stackrel{\text{def}}{=} \{F_{l_1, \dots, l_n}^{(1,n)}(l_{n+1}), (l_1, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p-1\}^n, 0 \leq l_{n+1} \leq r\}$$

fournit une base linéaire pour R_{n+1}^- .

On a des résultats analogues pour R_1 et, de manière similaire à ce qu'on a fait pour les induites paraboliques, on peut déterminer une base linéaire pour R_{n+1} en introduisant les éléments $F_{l_0, \dots, l_n}^{(0, n)}(l_{n+1})$ (c'est une conséquence triviale de la décomposition de Bruhat).

Notons que d'après la définition de l'opérateur T , certains éléments de la forme $F_{l_j, \dots, l_n}^{(j, n)}(l_{n+1})$ se simplifient considérablement dans $\pi(r, \lambda)$:

Lemme 2.6. — Soit $r \in \{0, \dots, p-1\}$, $\lambda \in k^\times$ et considérons $1 \leq j \leq n$.

On a l'égalité suivante dans $\pi(r, \lambda)$:

$$F_{0, \dots, 0}^{(j, n)}(0) \equiv \lambda^{n-j+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^j & 0 \end{bmatrix} [1, X^r] - \delta_{r,0} \lambda^{n-j} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{j-1} & 0 \end{bmatrix} [1, Y^r].$$

Démonstration. — Il s'agit d'une récurrence descendante sur j , en utilisant la description de l'opérateur T donnée ci-dessus : les détails sont laissés au lecteur. Notons seulement que pour $j \geq 1$ on a

$$\delta_{r,0} \sum_{\lambda_j \in \mathbf{F}_p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^j [\lambda_j] & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^j & 0 \end{bmatrix} [1, Y^r] = 0.$$

□

2.2.1. Un dictionnaire. — Les résultats de [Ba-Li], étendus à des groupes réductifs p -adiques déployés par Herzig [Her2], permettent de classifier les représentations p -modulaires de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ à l'aide des systèmes de valeurs propres de Hecke.

De manière plus précise, étant donné une représentation irréductible admissible (à caractère central) π de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ l'espace $\mathrm{Hom}_K(\tau, \pi)$ est non nul et de dimension finie pour une choix appropriée d'un poids de Serre τ . L'espace étant de plus muni d'une action de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\tau)$ (qui est commutative), on peut le décomposer en une somme directe d'espaces propres généralisés, de telle sorte que l'on ait une surjection

$$\pi(\tau, \lambda) \twoheadrightarrow \pi$$

où $\lambda \in k$ est la valeur propre associée à l'espace propre choisi (quitte à agrandir k).

Le résultat crucial est que, sous certaines conditions, on peut réaliser la série principale $\pi_{\mu, r}$ en termes de conoyaux des opérateurs de Hecke :

Théorème 2.7 ([Ba-Li], Theorem 34). — Soient $\lambda \in k^\times$, $r \in \{0, \dots, p-1\}$ de telle sorte que $(\lambda, r) \notin \{(\pm 1, 0)\}$.

On a un isomorphisme de $k[G]$ -modules discrets

$$\pi(r, \lambda) \xrightarrow{\sim} \pi_{\lambda^{-1}, r}.$$

Reprenons les notations du numéro précédent. Notons que, pour $n \geq 0$, $R_{n+1}(0)$ est trivialement isomorphe à l'induite compacte $\mathrm{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s$, l'isomorphisme étant induit par réciprocity de Frobenius en notant que $K_0(p^{n+1})$ agit sur l'élément $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, X^r]$ par le caractère χ_r^s .

La remarque importante est que l'isomorphisme précédente est préservé lorsque l'on considère $\overline{R}_{n+1}(0)$, l'image de $R_{n+1}(0)$ dans le quotient $\pi(r, \lambda)$.

Lemme 2.8. — Soit $r \in \{0, \dots, p-1\}$, $\lambda \in \overline{\mathbf{F}}_p^\times$, $n \in \mathbf{N}$. Soit $\overline{R}_{n+1}(0)$ l'image dans $\pi(r, \lambda)$ du $k[K]$ -module $R_{n+1}(0)$.

Si $(r, \lambda) \notin \{(0, \pm 1)\}$ la composée

$$(9) \quad \begin{aligned} \text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s &\xrightarrow{\sim} R_{n+1}(0) \twoheadrightarrow \overline{R}_{n+1}(0) \\ [1, e] &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, X^r] \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

En particulier, l'espace des K_{n+1} -vecteurs fixes de $\pi(r, \lambda)$ est décrit par

$$(\pi(r, \lambda))^{K_{n+1}} = \overline{R}_{n+1}(0).$$

Démonstration. — Comme $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, X^r]$ est K_{n+1} fixe et K_{n+1} est distingué dans K on déduit que

$$\overline{R}_{n+1}(0) \leq \left(\pi(r, \lambda) \right)^{K_{n+1}} \cong \text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s$$

de telle sorte que la deuxième partie de l'énoncé suit, pour des raisons de longueur, de l'isomorphisme (9).

Montrons que l'épimorphisme naturel (induit par réciprocity de Frobenius)

$$(10) \quad \begin{aligned} \text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s &\longrightarrow \overline{R}_{n+1}(0) \\ [1, e] &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, X^r] \end{aligned}$$

est injectif. Supposons dans la suite que $n \geq 1$ (le cas $n = 0$ en est en tout similaire et laissé au lecteur).

Il suffit de vérifier que le morphisme (10) est injectif sur l'espace des $K_1(p)$ -invariants de $\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s$, ce qui revient à montrer que les éléments suivantes de $\overline{R}_{n+1}(0)$

$$\begin{aligned} F_{\underline{0}}^{(1,n)}(0) &= \sum_{\lambda_1 \in \mathbf{F}_p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p[\lambda_1] & 1 \end{bmatrix} \cdots \sum_{\lambda_n \in \mathbf{F}_p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^n[\lambda_n] & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, X^r] \\ F_{\underline{0}}^{(0,n)}(0) &= \sum_{\lambda_0 \in \mathbf{F}_p} \begin{bmatrix} [\lambda_0] & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} F_{\underline{0}}^{(1,n)}(0) \end{aligned}$$

sont linéairement indépendants.

D'après le Lemme 2.6 on a

$$F_{\underline{0}}^{(1,n)}(0) \equiv \lambda^n \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{bmatrix} [1, X^r] - \lambda^{n-1} \delta_{r,0} [1, X^r].$$

et comme $T([1, X^r]) = \sum_{\lambda_0 \in \mathbf{F}_p} \begin{bmatrix} [\lambda_0] & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{bmatrix} [1, X^r] + \delta_{r,0} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{bmatrix} [1, X^r]$, on déduit de manière similaire que

$$F_{\underline{0}}^{(0,n)}(0) \equiv \lambda^{n+1}[1, X^r] - \lambda^n \delta_{r,0} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{bmatrix} [1, X^r].$$

Pour des raisons de support, on voit que aucune combinaison linéaire non triviale de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{bmatrix} [1, X^r]$ et $[1, X^r]$ est dans l'image de l'opérateur $T - \lambda$. On en déduit que les éléments $F_{\underline{0}}^{(1,n)}(0)$, $F_{\underline{0}}^{(0,n)}(0)$ de $\pi(r, \lambda)$ sont linéairement indépendants lorsque $r \neq 0$ ou bien $r = 0$ et $\lambda^2 \neq 1$, ce qu'il fallait démontrer. \square

Nous invitons le lecteur à comparer l'énoncé du Lemme 2.8 avec [Ba-Li], Theorem 30-3).

3. Disvertissement en théorie d'Iwasawa

Dans ce numéro on rappelle les relations étroites entre l'algèbre d'Iwasawa A de $\overline{\mathbf{U}}(p)$ et les représentations p -modulaires de G , selon l'approche introduit par [Schr], [Mo3], et en fournissant des compléments.

Plus précisément, nous établissons un dictionnaire précis entre les fonctions $F_{l_1, \dots, l_n}^{(1,n)}$ introduites au §2.1 et certains éléments de A (Proposition 3.1), ce qui nous permettra de simplifier considérablement les manipulations sur les induites lisses de *loc. cit.* grâce aux Lemmes 3.4, 3.5 ci-dessous. Remarquons que, toutefois, cela ne nous permet pas d'éviter certains arguments sur les polynômes de Witt, pour d'obtenir les informations fines sur l'atome automorphe (c'est d'ailleurs le contenu de la section 5).

Nous nous contentons de donner les résultats dans le cas particulier qui nous intéresse, sans ambition de les énoncer dans le cadre le plus général possible (cela faisant partie des sujets traité dans [MS]). Pour les détails omis dans ce numéro, nous invitons le lecteur à se référer à [Schr], [Mo3].

Considérons l'algèbre de groupe complétée $A = k[[\overline{\mathbf{U}}(p)]]$. Il s'agit d'une k -algèbre locale noetherienne, complète et régulière, de dimension 1 et nous en désignons par \mathfrak{m}_A son idéal maximal. L'élément

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} \lambda^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p[\lambda] & 1 \end{bmatrix}$$

fournit un générateur linéaire pour l'espace tangent de A . Rappelons que le tore fini $\mathbf{T}(\mathbf{F}_p)$ agit par automorphismes de k -algèbres sur A et X en est un vecteur propre, dont le caractère propre associé est \mathfrak{a} .

Soit $m \in \mathbf{N}$ et écrivons $m = \sum_{j=1}^{\infty} p^{j-1} l_j$, avec $l_j \in \{0, \dots, p-1\}$, pour son développement p -adique. Les quantités

$$\kappa_{\underline{l}} \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_m \stackrel{\text{def}}{=} \left(\prod_{j=1}^{\infty} \left((-1)^{\prod_{k=0}^{p-2-l_j} \binom{p-2}{k} (-1)^{k+1}} \right) \right)^{-1} = \left(\prod_{j=1}^{\infty} (-1)^{l_j+1} (p-1-l_j)! \right)^{-1}$$

et $N^o(\underline{l}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n p^{j-1}(p-1-l_j)$ nous permettrons d'établir un dictionnaire précis entre l'élément

$$(11) \quad F_{\underline{l}}^{(1,n)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_1 \in \mathbf{F}_p} \lambda_1^{l_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p[\lambda_1] & 1 \end{bmatrix} \cdots \sum_{\lambda_n \in \mathbf{F}_p} \lambda_n^{l_n} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^n[\lambda_n] & 1 \end{bmatrix} \in A$$

et sa réalisation en termes de l'isomorphisme $A \cong k[[X]]$:

Proposition 3.1. — Soit $n \geq 1$, $\underline{l} = (l_1, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p-1\}^n$. Dans l'algèbre d'Iwasawa A on a la relation :

$$F_{l_1, \dots, l_n}^{(1,n)} \in \kappa_{\underline{l}} X^{N^o(\underline{l})} + (\mathfrak{m}_A)^{N^o(\underline{l})+(p-1)}.$$

Pour cela, on a d'abord besoin du le Lemme suivant.

Lemme 3.2. — Considérons l'algèbre $k[\mathbf{F}_p]$ et définissons, pour $j \in \{0, \dots, p-1\}$, les éléments

$$F_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} \lambda^j [\lambda] \in k[\mathbf{F}_p].$$

Posons $X \stackrel{\text{def}}{=} F_{p-2}$.

On a les égalités suivantes :

$$F_j = \begin{cases} - \left(\prod_{k=0}^{p-2-j} \binom{p-2}{k} (-1)^{k+1} \right)^{-1} X^{p-1-j} & \text{si } j < p-1, \\ -1 + X^{p-1} & \text{si } j = p-1. \end{cases}$$

Démonstration. — Pour $j = p-2$ l'énoncé est évident et le résultat pour $0 \leq j \leq p-3$ suit par une récurrence élémentaire qu'on laisse au lecteur.

Le cas $j = p-1$ s'en déduit de la relation $F_{p-1} = F_0 - 1$. \square

La Proposition 3.1 suit donc par passage à la limite à partir du lemme suivant :

Lemme 3.3. — Soient $1 \leq m \leq n$, $(l_m, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p-1\}^{n-m+1}$ et $N_m^o \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=m}^n p^{j-m}(p-1-l_j)$.

On a l'égalité suivante dans l'algèbre de groupe $A_{m,n} \stackrel{\text{def}}{=} k[\overline{\mathbf{U}}(p^m)/\overline{\mathbf{U}}(p^{n+1})]$:

$$F_{l_m, \dots, l_n}^{(m,n)} \in \kappa_{(l_m, \dots, l_n)} X^{N_m^o(\underline{l})} + (\mathfrak{m}_A)^{N_m^o(\underline{l})+(p-1)}$$

(où l'on définit l'élément $F_{l_m, \dots, l_n}^{(m,n)}$ de la manière évidente comme en (11)).

Démonstration. — La preuve est une récurrence sur $n-m$, à partir du Lemme 3.2.

Considérons l'algèbre locale $k[[\overline{\mathbf{U}}(p^{m+1})]]$ et désignons par X_{m+1} l'élément

$$X_{m+1} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda \in \mathbf{F}_p} \lambda^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^{m+1}[\lambda] & 1 \end{bmatrix}$$

qui est un générateur de son idéal maximal.

Alors le morphisme naturel induit par l'inclusion $\overline{\mathbf{U}}(p^{m+1}) \hookrightarrow \overline{\mathbf{U}}(p^m)$ est décrit par

$$\begin{aligned} k[[\overline{\mathbf{U}}(p^{m+1})]] &\longrightarrow k[[\overline{\mathbf{U}}(p^m)]] \\ X_{m+1} &\longmapsto X^p. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc l'égalité suivante dans $A_{m,n}$ (avec les notations évidentes) :

$$F_{l_{m+1}, \dots, l_n}^{(m+1, n)} \equiv \kappa_{(0, \dots, 0, l_{m+1}, \dots, l_n, 0, \dots)} X^{\sum_{j=m+1}^n p^{j-m}(p-1-l_j)} \bmod (X^{\sum_{j=m+1}^n p^{j-m}(p-1-l_j)+p(p-1)})$$

et on déduit du Lemme 3.2 et de l'action du tore fini $\mathbf{T}(\mathbf{F}_p)$ sur X que

$$F_{l_m}^{(m)} = \sum_{\lambda_m \in \mathbf{F}_p} \lambda_m^{l_m} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^m [\lambda_m] & 1 \end{bmatrix} \equiv \kappa_{(0, \dots, 0, l_m, 0, \dots)} X^{p-1-l_m} \bmod (X^{p-1-l_m-(p-1)}).$$

Cela permet de conclure. \square

Considérons l'induite lisse $M^- \stackrel{\text{def}}{=} \text{ind}_{K_0(p^\infty)}^{K_0(p)} \chi_r^s \det$ et ses sous-modules $M_{n+1}^- \stackrel{\text{def}}{=} M^{K_{n+1}}$ pour $n \geq 0$. Ils s'agissent de $k[[K_0(p)]]$ -modules discrets; la dualité de Pontryagin (cf. [S-W]) nous fournit donc un isomorphisme de A -modules pseudocompacts

$$A \cong (M^-)^\vee|_A$$

et, plus généralement

$$(12) \quad A_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} A/(X^{p^n}) \cong (M_{n+1}^-)^\vee|_A$$

pour tout $n \geq 0$, ce qui nous permet de munir A d'une action continue de $K_0(p)$ par transport de structure. Remarquons qu'alors la pro- p partie du tore entier $\mathbf{T}(\mathbf{Z}_p)$ opère sur A par des k -automorphismes et l'unipotent supérieur $\mathbf{U}(\mathbf{Z}_p)$ par des morphismes k -linéaires.

Les lemmes qui suivent nous fournissent une première description de l'action de $K_0(p)$ sur A , en traduisant certains résultats de [Mo2] à travers le dictionnaire de la Proposition 3.1.

Lemme 3.4. — Soit $n \geq 1$, $(l_1, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p-1\}^n$ une n -uplet et considérons l'élément $F_{l_1, \dots, l_n}^{(1, n)} \in A$

Pour tout $g \in K_1(p)$ on a la relation suivante :

$$g \cdot F_{l_1, \dots, l_n}^{(1, n)} \in F_{l_1, \dots, l_n}^{(1, n)} + (\mathfrak{m}_A)^{1+N^\circ(L)}.$$

Démonstration. — Il s'agit d'utiliser [Mo2], Proposition 4.2 ainsi que le vocabulaire de la Proposition 3.1. \square

Remarquons que A_{n+1} est une algèbre de Frobenius, de telle sorte que l'isomorphisme (12) nous fournit l'isomorphisme de A_{n+1} -modules discrets

$$\begin{aligned} A_{n+1} \otimes_{k[[K_0(p^{n+1})]]} \chi_r^s \det &\xrightarrow{\sim} M_{n+1}^- \\ F_{l_1, \dots, l_n}^{(1, n)} \otimes 1 &\longmapsto F_{l_1, \dots, l_n}^{(1, n)} \end{aligned}$$

pour tout $n \geq 1$, A_{n+1} étant muni de sa structure additionnelle de $k[[K_0(p)]]$ -module discret.

Le résultat suivant précise le Lemme 3.4

Lemme 3.5. — Posons $B_1 \stackrel{\text{def}}{=} K_1(p) \cap \mathbf{B}(\mathbf{Q}_p)$ et désignons par \mathfrak{m}_{B_1} l'idéal maximal de l'algèbre d'Iwasawa $k[[B_1]]$. Soit $n \geq 1$ et considérons M_{n+1}^- .

Alors, pour tout $N \in \mathbf{N}$ on a l'inclusion suivante :

$$\mathfrak{m}_{B_1} \cdot (\mathfrak{m}_A)^N \cdot M_{n+1}^- \subseteq (\mathfrak{m}_A)^{N+(p-2)} \cdot M_{n+1}^-.$$

Démonstration. — C'est une simple traduction de [Mo2], Proposition 4.2, en utilisant le vocabulaire de la Proposition 3.1. \square

4. Premier dévissage de l'atome

Cette section est consacrée à une étude préliminaire des atomes automorphes (sous-entendu, de longueur 2 pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$). Après des rappels générales, on étudie de manière approfondie (cf. §4.1) la réalisation explicite de l'atome de longueur 2 effectuée par C. Breuil dans [Bre2]. Au moyen de certaines manipulations cohomologiques (§4.2), on voit que la nature de l'atome demeure dans une extension de $k[K_0(p^{n+1})]$ -modules lisses, à quotient irréductible; on en déduit de ce qui précède un élément explicite (noté $\tilde{\varepsilon}_{n+1}$ dans (15)) qui va jouer un rôle fondamental dans la suite.

La définition suivante est due à Colmez (cf. [Col]) :

Définition 4.1 (Colmez). — Un atome galoisien de dimension 2 sur $G_{\mathbf{Q}_p}$ est une représentation galoisienne (de $G_{\mathbf{Q}_p}$ sur un k -espace linéaire de dimension 2) qui est absolument indecomposable et qui n'est pas la tordue d'une extension de ω par la représentation triviale.

Une représentation lisse de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ est un atome automorphe (pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$) si la représentation galoisienne qui lui en est associée (par la correspondance de Langlands p -modulaire) est un atome galoisien.

Les atomes galoisiens et les atomes automorphes qui leur correspondent ont été soigneusement étudiés dans [Col], §VII.3 et VII.4. Dans ce qui suit, nous nous intéressons au cas où l'atome automorphe est de longueur 2, dépourvu de multiplicité.

De manière plus parlante, posons $\delta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \text{un}_\lambda \omega^{r+1}$, $\delta_2 \stackrel{\text{def}}{=} \text{un}_{\lambda^{-1}}$ avec $(\lambda, r) \notin \{(\pm 1, 0), (\pm 1, p-1)\}$. L'espace de cohomologie $H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \delta_1 \delta_2^{-1})$ est de dimension 1 et le foncteur de Montréal de Colmez induit un isomorphisme linéaire (cf. [Col], VII.4.7)

$$\text{Ext}_{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)}^1(\text{Ind}_B^G \delta_1 \otimes \delta_2 \omega^{-1}, \text{Ind}_B^G \delta_2 \otimes \delta_1 \omega^{-1}) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{G_{\mathbf{Q}_p}}^1(\delta_2, \delta_1).$$

On écrit alors $A_{r,\lambda}$ pour désigner un générateur linéaire de l'espace des extensions apparaissant au LHS. Dorénavant, un atome automorphe sera supposé de la forme $A_{r,\lambda}$ pour une couple $(\lambda, r) \notin \{(\pm 1, 0), (\pm 1, p-1)\}$.

4.1. Réalisation de l'atome automorphe. — Ce numéro a pour objectif de rappeler la réalisation explicite des atomes automorphes pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, effectuée dans [Bre2].

Dans son article [Bre2], Breuil achève une description exhaustive de la réduction de représentations cristallines pour $G_{\mathbf{Q}_p}$ en poids $(0, k)$ avec $k-2 \leq 2p-2$. Cela est

effectué à l'aide de la construction d'un réseau explicite à l'intérieur d'un quotient de $\text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^{k-2} E^2$, isotypique pour l'action de l'algèbre de Hecke sphérique.

Plus précisément, fixons $r \in \{0, \dots, p-3\}$ et $a_p \in \mathfrak{m}$. À l'intérieur de l'espace des endomorphismes G -équivariants de $\text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^{k-2} E^2$ on trouve un opérateur "canonique" T (cf. [Bre2], §2.1.4 et §2.2) ce qui permet de définir

$$\Theta_{p+3+r, a_p} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im} \left(\text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^{p+1+r} \mathcal{O}^2 \rightarrow \text{Coker}(T - a_p) \right).$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 4.2. — ([Bre2], Théorème 3.3.2, Proposition 5.3.4.1) *Le $\mathcal{O}[G]$ -module Θ_{p+3+r, a_p} est un réseau dans $\text{Coker}(T - a_p)$ et si $\text{val}(a_p) = 1$ et $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(p+2+r)a_p}{p} \pmod{\mathfrak{m}}$ on a*

$$\Theta_{p+3+r, a_p} \otimes_{\mathcal{O}} k \cong A_{r, \lambda} \otimes \omega.$$

L'établissement du résultat précédent repose sur l'étude de la structure de la représentation algébrique $\sigma_{p+1+r} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Sym}^{p+1+r} k^2$. Il s'agit d'une représentation de longueur 3, ayant le poids de Serre $\sigma_r \otimes \det$ en socle, comme montré dans [Bre2], Lemme 5.1.3-ii).

L'espace des endomorphismes G -équivariants de $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p+1+r}$ étant muni d'un opérateur de Hecke canonique T (compatible dans un sens évident à l'opérateur défini sur $\text{ind}_{KZ}^G \text{Sym}^{p+1+r} E^2$) on a une suite exacte naturelle déduite de la filtration par le socle de σ_{p+1+r} :

Proposition 4.3 ([Bre2], Corollaire 5.1.4). — *On a une suite exacte de $k[G]$ -modules :*

$$0 \rightarrow \text{ind}_{KZ}^G \sigma_r \otimes \omega \xrightarrow{\iota} \text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p+1+r} / T \rightarrow \text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-3-r} \otimes \omega^{r+2} \rightarrow 0$$

où l'on a écrit $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p+1+r} / T \stackrel{\text{def}}{=} \text{Coker}(T)$.

C'est important pour la suite d'expliciter l'image du morphisme ι . Si l'on considère la réalisation usuelle de σ_{p+1+r} sur $k[X, Y]_{p+1+r}^h$ on utilise la notation $x^{r-i} y^i$ pour désigner un générateur linéaire du $\mathbf{T}(\mathcal{O})$ -espace propre de $\sigma_r \otimes \det$, de caractère propre $\chi_r \mathfrak{a}^{-i} \det$.

Lemme 4.4. — *Pour $j \in \{0, \dots, r\}$ on a*

$$\iota([1, x^{r-j} y^j]) = \left(\frac{r+2}{j+1} \right) [1, X^{p+r-j} Y^{j+1}].$$

De plus, on a $[1, X^{p+1+r}] \equiv 0$ dans le quotient $\frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p+1+r}}{T}$.

Démonstration. — Le morphisme ι est obtenu, par induction compacte, à partir du morphisme suivant de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)$ -représentations (cf. [Bre2], Lemme 5.1.3, ii) :

$$\begin{array}{ccc} \sigma_r \otimes \omega & \hookrightarrow & \sigma_{p+1+r} \\ x^{r-j} y^j & \mapsto & X^{p+r-j} Y^{j+1} - X^{r+1-j} Y^{p+j}. \end{array}$$

De plus, d'après [Bre2], Corollaire 5.1.4, on a

$$\binom{r+2}{i}^{-1} \left(\binom{r+1+p}{i} X^{p+r+1-i} Y^i + \binom{r+1+p}{p-1+i} X^{r+2-i} Y^{p-1+i} \right) \equiv 0$$

dans $\frac{\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p+1+r}}{T}$, pour $0 \leq i \leq r+2$.

En d'autres termes

$$\binom{r+1}{i} X^{p+r+1-i} Y^i \equiv \begin{cases} -\binom{r+1}{i-1} X^{r+2-i} Y^{p-1+i} & \text{si } i > 0 \\ 0 & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

Ceci permet de conclure. \square

Le résultat suivant, qui est à la base des méthodes développés dans cet article, permet de réaliser $A_{r,\lambda}$ comme un quotient de $\text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p+1+r}/T$

Proposition 4.5. — Soit $r \in \{0, \dots, p-3\}$, $\lambda \in k^\times$. On a un diagramme commutatif de $k[G]$ -modules, à lignes exactes :

$$(13) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{ind}_{KZ}^G \sigma_r \otimes \omega & \xrightarrow{\iota} & \text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p+1+r}/T & \longrightarrow & \text{ind}_{KZ}^G \sigma_{p-3-r} \otimes \omega^{r+2} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \pi(r, \lambda, \omega) & \longrightarrow & A_{r,\lambda} \otimes \omega & \longrightarrow & \pi(p-3-r, \lambda^{-1}, \omega^{r+2}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Démonstration. — Cela est l'énoncé, ainsi que sa preuve, de [Bre2], Proposition 5.3.4.1. \square

4.2. Restriction aux groupes de congruence. — Soient r, λ comme dans l'énoncé de la Proposition 4.5. L'objectif de cet numéro est de ramener l'étude de la K -restriction de l'atome $A_{r,\lambda}|_K$ à certaines extensions de représentations du sous-groupe d'Iwahori $K_0(p)$.

Rappelons que le foncteur de restriction à K nous donne un morphisme naturel

$$\text{Ext}_{k[G]}^1(\pi_{p-3-r,\lambda} \otimes \omega^{r+2}, \pi_{r,\lambda^{-1}} \otimes \omega) \longrightarrow \text{Ext}_{k[K]}^1(\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_{r+2}, \text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det).$$

D'après [Br-Pa], Theorem 20.3, ce morphisme est injectif lorsque $1 \leq r \leq p-3$ (et en fait, cela reste vrai pour $0 \leq r \leq p-3$, $p \geq 3$ cf. Remarque 7.3-ii)).

Le forme forte de la réciprocity de Frobenius nous donne des isomorphismes naturels

$$\text{Ext}_{k[K]}^i(\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_{r+2}, \text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{k[K_0(p)]}^i(\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^{K_0(p)} \chi_{r+2}, \text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det) \quad (14)$$

et, pour tout $1 \leq j \leq n+1$,

$$\text{Ext}_{k[K_0(p)]}^i(\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_{r+2}, \text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{k[K_0(p^j)]}^i(\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p^j)} \chi_{r+2}, \text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det).$$

Ces morphismes peuvent se réaliser concrètement à l'aide de produits fibrés appropriés : par exemple le morphisme (14) est décrit par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det & \longrightarrow & N & \longrightarrow & \text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_{r+2} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & \text{ind}_{K_0(p^\infty)}^{K_0(p)} \chi_{r+2} \longrightarrow 0 \end{array}$$

où le carré de droite est cartésien (et N' est l'image de l'extension N via l'isomorphisme (14)).

Comme $\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^{K_0(p)} \chi_{r+2} = \varinjlim_{n \geq 0} \text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_{r+2}$ l'on dispose d'une suite spectrale

(cf. [Jen], Théorème 4.2)

$$\varprojlim_{n \geq 0}^{(i)} \text{Ext}_{k[K_0(p)]}^j(\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_{r+2}, M) \Rightarrow \text{Ext}_{k[K_0(p)]}^{j+i}(\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^{K_0(p)} \chi_{r+2}, M)$$

où l'on a posé $M \stackrel{\text{def}}{=} \text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det$ pour alléger les notations.

D'après [Ka-Sh], Corollary 13.3.16 and Example 13.3.17-ii) on a

$$\varprojlim^{(i)} \text{Ext}_{k[K_0(p)]}^j(\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_{r+2}, M) = 0$$

pour $i > 1$ et afin d'avoir les conditions de Mittag-Leffler (cf. [Ka-Sh], Exercice 12.8) il suffit de montrer que les espaces $\text{Ext}_{k[K_0(p)]}^j(\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_{r+2}, M)$ sont de dimension finie.

On a le résultat élémentaire suivant

Lemme 4.6. — *Il existe une résolution injective \mathcal{I}^\bullet de $(\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det)|_{K_0(p^{n+1})}$ constituée par des $k[K_0(p^{n+1})]$ -modules admissibles.*

En particulier, l'espace $\text{Ext}_{k[K_0(p)]}^j(\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_{r+2}, \text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det)$ est de dimension finie pour tout $j \geq 0$, $n \geq 0$.

Démonstration. — D'après [AB], Theorem 4.1 (cf. aussi [Laz]), l'algèbre d'Iwasawa $k[[K_0(p^\infty)]]$ est une k -algèbre semilocale et noethérienne. En particulier tout $k[[K_0(p^\infty)]]$ -module de type fini admet une résolution libre par des $k[[K_0(p^\infty)]]$ -modules de type fini.

D'après la dualité de Pontryagin, cela signifie que $\chi_r^s \det$ admet une résolution injective \mathcal{I}^\bullet par des $k[K_0(p^\infty)]$ -modules admissibles.

Comme $K_0(p^\infty) \setminus K$ est compact l'exactitude des foncteurs de restriction et induction (de K à $K_0(p^\infty)$) montrent que $\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \mathcal{I}^\bullet$ est une résolution injective de $\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det$. Comme de plus \mathcal{I}^\bullet est constitué par des objets admissibles, il en est de même pour $\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \mathcal{I}^\bullet$.

D'après l'exactitude des foncteurs de restriction et induction (de $K_0(p^{n+1})$ à K) on déduit que $\mathcal{I}^\bullet \stackrel{\text{def}}{=} (\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \mathcal{I}^\bullet)|_{K_0(p^{n+1})}$ est une résolution injective comme dans l'énoncé.

L'admissibilité des objets de \mathcal{S}^\bullet assure donc que les espaces

$$\mathrm{Ext}_{k[K_0(p^{n+1})]}^j(\chi_{r+2}, \mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det) \cong \mathrm{Ext}_{k[K_0(p)]}^j(\mathrm{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_{r+2}, \mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det)$$

sont de dimension finie. \square

Les conditions de Mittag-Leffler étant vérifiées, on a

Proposition 4.7. — *Soit $r \in \{0, \dots, p-3\}$.*

On a un isomorphisme naturel

$$\lim_{\substack{\longleftarrow \\ n \geq 0}} \mathrm{Ext}_{k[K_0(p)]}^1(\mathrm{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_{r+2}, \mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{k[K_0(p)]}^1(\mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^{K_0(p)} \chi_{r+2}, \mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det)$$

Comme c'est plus aisé de manipuler les $k[K_0(p)]$ -modules irréductibles, on préfère poursuivre l'étude de \mathcal{B}_∞^1 , que l'on définit comme étant l'image de $A_{\lambda,r} \otimes \omega|_K$ dans $\mathrm{Ext}_{k[K_0(p)]}^1(\mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^{K_0(p)} \chi_{r+2}, \mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det)$.

Pour $n+1 \geq m \geq 1$ définissons \mathcal{B}_{n+1}^m comme étant l'image de \mathcal{B}_∞^1 dans

$$\mathrm{Ext}_{k[K_0(p)]}^1(\mathrm{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p^m)} \chi_{r+2}, \mathrm{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det).$$

On a donc par construction des suites exactes de $k[K_0(p^m)]$ -modules

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi(r, \lambda, \omega) & \longrightarrow & \mathcal{B}_{n+1}^m & \longrightarrow & \mathrm{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p^m)} \chi_{r+2} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \pi(r, \lambda, \omega) & \longrightarrow & A_{r,\lambda} \otimes \omega & \longrightarrow & \pi(p-3-r, \lambda^{-1}, \omega^{r+2}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

et si l'on définit, pour $n \geq 1$ l'élément

$$e_{n+1} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, X^{p-1} Y^{r+2}] \in A_{r,\lambda} \otimes \omega.$$

on déduit de l'épimorphisme du diagramme (13) (cf. aussi [Bre2], Leme 5.1.3-ii)) que

$$\begin{array}{ccc} A_{r,\lambda} \otimes \omega & \longrightarrow & \pi(p-3-r, \lambda^{-1}, \omega^{r+2}) \\ e_{n+1} & \longmapsto & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, x^{p-3-r}] \end{array}$$

(on a désigné comme d'habitude par x^{p-3-r} un générateur de l'espace linéaire de plus haut poids de σ_{p-3-r}).

Si $(r, \lambda) \notin \{(p-3, \pm 1)\}$ on voit d'après le Lemme 2.8 que \mathcal{B}_{n+1}^m est la sous $K_0(p^m)$ -représentation de $A_{r,\lambda} \otimes \omega$ engendrée par e_{n+1} et $\pi(r, \lambda, 1)$.

On suppose dorénavant que $0 \leq r \leq p-3$, $\lambda \in k^\times$ vérifient $(r, \lambda) \notin \{(0, \pm 1), (p-3, \pm 1)\}$.

4.3. Résumé des notations.— Pour manipuler aisément les éléments de l'atome $A_{r,\lambda} \otimes \omega$ il est important de fixer soigneusement les notations.

Afin d'alléger les écritures, nous posons d'abord

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det, \quad M^+ \stackrel{\text{def}}{=} \left(\text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det \right)^+, \quad M^- \stackrel{\text{def}}{=} \text{ind}_{K_0(p^\infty)}^{K_0(p)} \chi_r^s \det.$$

Rappelons que M^+ (resp. M^-) est un $k[[K_0(p)]]$ -module discret, qui est uniserial en restriction à \mathbf{U} (resp. $\overline{\mathbf{U}}(p)$). Pour tout $n \geq 0$ posons également

$$M_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} M^{K_{n+1}}, \quad M_{n+1}^+ \stackrel{\text{def}}{=} (M^+)^{K_{n+1}} = (M^+)^{\mathbf{U}(p^{n+1})}, \\ M_{n+1}^- \stackrel{\text{def}}{=} (M^-)^{K_{n+1}} = (M^-)^{\overline{\mathbf{U}}(p^{n+1})}.$$

Étant donné l'extension \mathcal{B}_{n+1}^m , on écrit $F_{l_j, \dots, l_n}^{(j,n)}(l_{n+1})$, pour $1 \leq j \leq n$, $(l_j, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p-1\}^{n-j+1}$, $0 \leq l_{n+1} \leq r$, pour désigner les éléments de la série principale $\pi(r, \lambda, \omega)$ (apparaissant en sous-objet) définis au §2.2. De manière similaire, on écrit $F_{l_j, \dots, l_n}^{(j,n)}$ pour désigner les éléments définis au §2.1 de l'induite compacte $M_{n+1}^- = \text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p)} \chi_r^s \det$; ils s'agissent des images dans $\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s \det$ des éléments $F_{l_j, \dots, l_n}^{(j,n)}(0) \in (\pi(r, \lambda, \omega))^{K_{n+1}}$ via l'isomorphisme du Lemme 2.8.

Avec un abuse de notation, l'écriture $F_{l_j, \dots, l_n}^{(j,n)}$ sera également utilisée pour désigner l'élément correspondant de la k -algèbre $A/(X^{p^{n+1-j}})$. De manière pédante, cela signifie que l'on utilise la même notation pour l'élément $F_{l_j, \dots, l_n}^{(j,n)} \in A$ et pour l'élément $1 \otimes F_{l_j, \dots, l_n}^{(j,n)} \in A \otimes_A M|_A$.

On peut maintenant définir de manière *ad hoc* les éléments suivants de l'atome $A_{r,\lambda}$: pour tout $n \geq 0$ on pose

$$(15) \quad \tilde{e}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} e_{n+1} + (-1)^r \lambda^{-1} F_{r+1}^{(n+1)}(0) + (-1)^{r+1} (r+1) \left(\sum_{j=1}^n \lambda^{-2(n-j+1)} F_{r,0,\dots,0}^{(j,n)}(1) \right) & \text{si } r \neq 0 \\ e_{n+1} + (-1)^r \lambda^{-1} F_{r+1}^{(n+1)}(0) + (-1)^{r+1} (r+1) \lambda^{-1} \left(\sum_{j=1}^n \lambda^{-2(n-j+1)} (-F_{r,0,\dots,0,1}^{(j,n+1)}(0)) \right) & \text{si } r = 0. \end{cases}$$

Pour $1 \leq m \leq n$ on définit les éléments suivants de \mathcal{B}_{n+1}^m :

$$F_{l_m, \dots, l_n}^{(m,n)}(\tilde{e}_{n+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_m \in \mathbf{F}_p} \lambda_m^{l_m} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^m [\lambda_m] & 1 \end{bmatrix} \cdots \sum_{\lambda_n \in \mathbf{F}_p} \lambda_n^{l_n} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^n [\lambda_n] & 1 \end{bmatrix} \tilde{e}_{n+1}$$

pour toute $n-m+1$ -uplet $(l_m, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p-1\}^{n-m+1}$. Notons que les images des éléments $F_{l_m, \dots, l_n}^{(m,n)}(\tilde{e}_{n+1})$ dans $\mathcal{B}_{n+1}^m / \pi(r, \lambda, \omega)$ fournissent la base linéaire "naturelle" de $\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^{K_0(p^m)} \chi_{r+2}$ (définie au §2.1), via l'isomorphisme du Lemme 2.8.

On définit de la manière évidente les $K_0(p)$ -modules \widetilde{M}^- et \widetilde{M}_{n+1}^- , pour $n \geq 1$.

5. Le comportement de \tilde{e}_{n+1}

Soit $n \geq 1$. Ce numéro est consacré au résultat clef qui concerne le comportement de l'élément \tilde{e}_{n+1} à l'intérieur de l'atome automorphe. Plus précisément, au §4.2 on a déterminé, à partir de $A_{r,\lambda} \otimes \det$, une $k[K_0(p^{n+1})]$ -extension non triviale

$$0 \rightarrow \pi(r, \lambda, \omega) \rightarrow \mathcal{B}_{n+1}^{n+1} \rightarrow \chi_{r+2} \rightarrow 0.$$

Le but de ce paragraphe est de décrire de manière soignée la structure de \mathcal{B}_{n+1}^{n+1} (Proposition 5.4), ce que nous permettra au §6 de déterminer les K_{n+1} -invariants de $A_{r,\lambda}$ et au §7 sa structure interne. Sauf mention explicite, l'on suppose ici que $0 \leq r \leq p-3$.

Le lemme suivante nous montre que $\mathcal{B}_{n+1}^{(n+1)}$ devient très simple lorsque l'on se restreint à $\overline{\mathbf{U}}(p^{n+1}\mathbf{Z}_p)$:

Lemme 5.1. — *Soit $c \in \mathbf{F}_p$.*

Alors

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^{n+1}[c] & 0 \end{bmatrix} - 1 \right) \tilde{e}_{n+1} = c(r+1)\lambda^{-n-1}[1, x^r].$$

Démonstration. — D'après le Lemme 4.4 on a les égalités

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^{n+1}[c] & 0 \end{bmatrix} - 1 \right) e_{n+1} &= \sum_{j=0}^{r+1} c^{r+1-(j-1)} \binom{r+2}{j} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, X^{p+r-(j-1)} Y^{(j-1)+1}] \\ &= \sum_{j=0}^r c^{r+1-j} \binom{r+2}{j+1} \frac{j+1}{r+2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, x^{r-j} y^j] \\ &= \sum_{j=0}^r c^{r+1-j} \binom{r+1}{j} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, x^{r-j} y^j]. \end{aligned}$$

De manière analogue la nature de l'opérateur T (cf. (8)) nous donne

$$\begin{aligned} &\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^{n+1}[c] & 0 \end{bmatrix} - 1 \right) F_{r+1}^{(n+1)}(0) = \\ &= \sum_{j=0}^r \binom{r+1}{j} c^{r+1-j} (-1)^{r+1} \sum_{\lambda_{n+1} \in \mathbf{F}_p} (-\lambda_{n+1})^j \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^{n+1}[\lambda_{n+1}] & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+2} & 0 \end{bmatrix} [1, x^r] \\ &= \sum_{j=0}^r c^{r+1-j} (-1)^{r+1} \binom{r+1}{j} \left(\lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, x^{r-j} y^j] - \delta_{r,j} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^n & 0 \end{bmatrix} [1, y^r] \right) \\ &= \lambda (-1)^{r+1} \left(\sum_{j=0}^r c^{r+1-j} \binom{r+1}{j} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, x^{r-j} y^j] \right) - (r+1)c(-1)^{r+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^n & 0 \end{bmatrix} [1, y^r]. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $r > 0$. Pour $1 \leq m \leq n$, on a (cf. Lemme 2.6)

$$\begin{aligned} & \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^{n+1}[c] & 0 \end{bmatrix} - 1 \right) F_{r,0,\dots,0}^{(m,n)}(1) = c \left(\sum_{\lambda_m \in \mathbf{F}_p} \lambda_m^r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^m[\lambda_m] & 1 \end{bmatrix} F_{0,\dots,0}^{(m+1,n)}(0) \right) \\ & = c \left(\sum_{\lambda_m \in \mathbf{F}_p} \lambda_m^r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^m[\lambda_m] & 1 \end{bmatrix} (\lambda^{n-m} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{m+1} & 0 \end{bmatrix} [1, x^r] - \delta_{r,0} \lambda^{n-m-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^m & 0 \end{bmatrix} [1, y^r]) \right) \\ & = c \lambda^{n-m+1} (-1)^r \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^m & 0 \end{bmatrix} [1, y^r] - c \lambda^{n-m} (-1)^r \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{m-1} & 0 \end{bmatrix} [1, y^r]. \end{aligned}$$

La conclusion suit maintenant par un calcul élémentaire qu'on laisse au lecteur.

Le cas $r = 0$ est similaire et les détails sont laissés en exercice pour le lecteur scrupuleux. Notons seulement que l'on a

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^{n+1}[c] & 1 \end{bmatrix} - 1 \right) F_1^{(n,n+1)}(0) = -\bar{c} F_0^{(n,n+1)}(0)$$

ce qui permet d'adapter l'argument précédent. \square

Le lemme suivant nous permet de contrôler l'action du radical unipotent entier. Sa preuve, qui demande des manipulations techniques sur les vecteurs de Witt de \mathbf{F}_p a été mise en appendice.

Lemme 5.2. — Soit $p \geq 3$ et $\mu \in \mathbf{F}_p^\times$.

On a l'égalité suivante dans $\mathcal{B}_{n+1}^{(n+1)}$:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1 \right) \tilde{e}_{n+1} \equiv (-1)^{n+r+1} (r+1) \lambda^{-2n} \mu F_{r+2,p-1,\dots,p-1}^{(1,n)} \pmod{V_\emptyset}$$

où l'on a défini

$$\begin{aligned} V_\emptyset & \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle F_{\leq (r+2,p-1,\dots,p-1)-(p-2)}^{(1,n)} \right\rangle \oplus \langle [1, x^r] \rangle_{\overline{\mathbf{F}}_p} \\ & = \mathfrak{m}^{(p-3-r)+(p-2)} M_{n+1}^- \oplus (\sigma_r \otimes \det)^{K_1(p)}. \end{aligned}$$

De manière similaire, on a

Lemme 5.3. — Soit $\alpha \in \mathbf{Z}_p$ et $p \geq 3$.

Alors on a l'égalité suivante dans $\mathcal{B}_{n+1}^{(n+1)}$:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + p\alpha \end{bmatrix} - 1 \right) \tilde{e}_{n+1} \equiv (-1)^{n+r} \bar{\alpha} (r+1) \lambda^{-2n} F_{r+1,p-1,\dots,p-1}^{(1,n)} \pmod{V_\emptyset}.$$

où V_\emptyset est défini comme dans le Lemme 5.2.

On peut finalement comprendre la nature de l'extension \mathcal{B}_{n+1}^{n+1} , soit la sous $K_0(p^{n+1})$ représentation engendrée par e_{n+1} et $\pi(r, \lambda, \omega)$ dans l'atome automorphe $A_{r,\lambda} \otimes \omega$:

Proposition 5.4. — Soit $n \geq 1$ et considérons l'extension

$$0 \rightarrow \pi(r, \lambda, \omega) \rightarrow \mathcal{B}_{n+1}^{n+1} \rightarrow \chi_{r+2} \rightarrow 0.$$

Soit $g \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 + pa & b \\ p^{n+1}c & 1 + pd \end{bmatrix} \in K_0(p^{n+1})$.

On a alors l'égalité suivante dans $\mathcal{B}_{n+1}^{(n+1)}$:

$$(g-1)\tilde{\epsilon}_{n+1} \equiv (-1)^{n+r+1}(r+1)\lambda^{-2n} \left(\bar{b}\kappa_{p^n-1-(p-3-r)}X^{p-3-r} + (\overline{a-d})\kappa_{p^n-1-(p-2-r)}X^{p-2-r} \right)$$

modulo

$$(\sigma_r \otimes \det)^{K_1(p)} \oplus (X^{(p-3-r)+(p-2)})M_{n+1}^-.$$

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate des Lemmes 5.1, 5.2, 5.3 et de la décomposition d'Iwahori de $K_0(p^{n+1})$. \square

Une remarque. — Supposons $r > 0$. Alors $(\sigma_r \otimes \det)^{K_1(p)} = \text{soc}(M^+)$ et l'énoncé de la Proposition 5.4 ne dépend pas du choix du relèvement $\tilde{\epsilon}_{n+1}$, au sens suivant.

Soit $x = x^+ + x^- \in M^+ \oplus M^-$ un élément tel que $\tilde{\epsilon}_{n+1} + x$ est fixé par $\overline{\mathbf{U}}(p^{n+1})$ modulo $\text{soc}(M^+)$. On déduit de la Proposition 5.1 que $x^- \in M_{n+1}^-$ et comme la composante χ_{r+2} -isotypique de $M_{n+1}^- / (X^{(p-3-r)+(p-2)})M_{n+1}^-$ est de dimension 1 on conclut que $x^- \in \mu X^{(p-3-r)} + (X^{(p-3-r)+(p-2)})$ pour un scalaire convenable $\mu \in k$.

Comme $(g-1) \cdot X^{p-3-r} \in X^{(p-3-r)+(p-2)}$ si $g \in K_1(p^2)$ (cf. Lemme 3.5) on déduit que

Corollaire 5.5. — Soit $n \geq 1$ et $r > 0$.

Considérons l'extension de $K_0(p^{n+1})$ -modules discrets :

$$0 \rightarrow M^+ \oplus M^- \rightarrow \mathcal{B}_{n+1}^{(n+1)} \rightarrow \chi_{r+2} \rightarrow 0.$$

et soit ϵ_{n+1} un relèvement du générateur linéaire du caractère χ_{r+2} apparaissant au quotient. Supposons de plus que ϵ_{n+1} est fixé par $\overline{\mathbf{U}}(p^{n+1})$ modulo $\text{soc}(M^+)$.

Pour tout $g \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1+pa & b \\ p^{n+1}c & 1+pd \end{bmatrix} \in K_0(p^{n+1})$ on a

$$(g-1)\epsilon_{n+1} \equiv (-1)^{n+r+1}(r+1)\lambda^{-2n} \left(\bar{b}\kappa_{p^n-1-(p-3-r)}X^{p-3-r} + (\overline{a-d})\kappa_{p^n-1-(p-2-r)}X^{p-2-r} \right)$$

modulo $M^+ \oplus (X^{(p-3-r)+(p-2)})M_{n+1}^-$.

6. Espaces invariants et applications

Dans cette section on détermine l'espace des invariants de l'atome $A_{r,\lambda} \otimes \det$ selon les sous-groupes de congruence principaux, dans le cas générique. Cela permet d'étendre un résultat de Breuil et Paskunas (cf. [Br-Pa], Theorem 20.3) au cas de niveau arbitraire, ainsi que de déterminer certains composantes isotypiques de la cohomologie modulo p des courbes modulaire (§6.1).

Signalons que dans le cas $r = 0$ on peut également montrer l'irréductibilité du socle de l'atome $A_{r,\lambda} \otimes \det$, à travers des manipulations directes, dont la technicité nous a dissuadé de les inclure dans cet article.

L'outil principale de la preuve du Théorème 6.3 demeure dans le Lemme 6.1, qui s'obtient comme une conséquence de la Proposition 5.4 à l'aide des moyens d'algèbre d'Iwasawa introduits au §3.

Sauf mention explicite, on suppose que $p \geq 3$ et $0 \leq r \leq p-3$.

Corollaire 6.1. — Soit $n \geq 1$ et considérons la $\mathbf{B}(\mathbf{Z}_p)$ -sous extension de $\mathcal{B}_{n+1}^{(n+1)}$ déduite de la Proposition 5.4 :

$$0 \rightarrow M_{n+1}^- \oplus (\sigma_r \otimes \det)^{K_1(p)} \rightarrow \left\langle K_0(p^{n+1}) \cdot \tilde{e}_{n+1} \right\rangle \rightarrow \chi_{r+2} \rightarrow 0.$$

Alors pour tout $x \in B_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}(\mathbf{Z}_p) \cap K_{n+1}$ on a

$$(x-1) \cdot \tilde{e}_{n+1} = 0$$

Démonstration. — Soit $B_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}(\mathbf{Z}_p) \cap K_1$. Comme $K_{n+1} = K_1^{p^n}$ et $B_1 \leq K_1$ est fermé, on déduit facilement que $B_{n+1} = B_1^{p^n}$ (comme l'on voit aisément au niveau des algèbres de Lie associées). Écrivons donc $x = x'^{p^n}$ pour un élément $x' \in B_1$ convenable.

D'après la Proposition 5.4 on a

$$\begin{aligned} (x-1) \cdot \tilde{e}_{n+1} &\in (x'-1)^{p^n-1} \cdot \left(\mathfrak{m}_A \cdot M_{n+1}^- + (\sigma_r \otimes \det)^{K_1(p)} \right) \\ &\in (\mathfrak{m}_{B_1})^{p^n-1} \cdot \mathfrak{m}_A \cdot M_{n+1}^- \end{aligned}$$

et on déduit du Lemme 3.5 que $(\mathfrak{m}_{B_1})^{p^n-1} \cdot \mathfrak{m}_A \cdot M_{n+1}^- \subseteq \mathfrak{m}_A^{p^n} \cdot M_{n+1}^- = 0$. \square

La proposition suivante nous donne une première estimation de l'espace des K_{n+1} -invariants de $A_{r,\lambda} \otimes \det$:

Proposition 6.2. — Soit $n \geq 1$ et considérons la suite exacte induite par le foncteur des K_{n+1} -invariants :

$$0 \rightarrow \text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_r^s \det \rightarrow (A_{r,\lambda} \otimes \det)^{K_{n+1}} \xrightarrow[p_{n+1}]{} \text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_{r+2}.$$

Alors

$$\text{long}_K(\text{coker}(p_{n+1})) \leq 1.$$

Démonstration. — Soit $g \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1+p^{n+1}a & p^{n+1}b \\ p^{n+1}c & 1+p^{n+1}d \end{bmatrix} \in K_{n+1}$ et définissons l'élément suivant de $A_{r,\lambda} \otimes \det$:

$$F_{0,\underline{p-1}}^{(0,n)}(\tilde{e}_{n+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_0 \in \mathbf{F}_p} \begin{bmatrix} [\lambda_0] & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} F_{\underline{p-1}}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1}) + \delta_{r,p-3} F_{\underline{p-1}}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1}).$$

Modulo $\pi(r, \lambda, \det)$, l'élément $F_{0,\underline{p-1}}^{(0,n)}(\tilde{e}_{n+1})$ est un générateur linéaire de l'espace de plus haut poids du K -socle (resp. de la représentation triviale) de $\text{ind}_{K_0(p)}^K \chi_{r+2}$, l'unique quotient de longueur 2 de l'induite lisse $\text{ind}_{K_0(p^{n+1})}^K \chi_{r+2}$.

Un calcul élémentaire nous offre

$$g \cdot F_{0,\underline{p-1}}^{(0,n)}(\tilde{e}_{n+1}) = \sum_{\lambda_0 \in \mathbf{F}_p} \begin{bmatrix} [\lambda_0] & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} F_{\underline{p-1}}^{(1,n)}(g_{0,\lambda_0} \cdot \tilde{e}_{n+1}) + \delta_{r,p-3} F_{\underline{p-1}}^{(1,n)}(g_1 \cdot \tilde{e}_{n+1})$$

où

$$g_{0,\lambda_0} \in \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^{n+1}z & 1 \end{bmatrix} B_{n+1}, \quad g_1 \in \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^{n+1}w & 1 \end{bmatrix} B_{n+1}$$

avec $z \equiv [\bar{b} + \overline{(a-d)\lambda_0 - \bar{c}\lambda^2}]$ et $w \equiv [\bar{c}]$ modulo p .

On en déduit, utilisant le Corollaire 6.1 et le Lemme 5.1, l'égalité suivante :

$$(g-1) \cdot F_{0, \underline{p-1}}^{(0,n)}(\tilde{e}_{n+1}) = (-1)^n \lambda^{-n-1} (r+1) \left(\sum_{\lambda_0 \in \mathbf{F}_p} \begin{bmatrix} [\lambda_0] & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{z} x^r + \delta_{p-3,r} \bar{c} x^r \right) \in \sigma_r \otimes \det.$$

Un calcul simple (sans oublier la torsion par le déterminant dans $\sigma_r \otimes \det$!) donne au final

$$\begin{aligned} (g-1) \cdot F_{0, \underline{p-1}}^{(0,n)}(\tilde{e}_{n+1}) &= (-1)^n \lambda^{-n-1} (r+1) \left(\sum_{j=0}^r (-1) \binom{r}{j} x^{r-j} y^j (\bar{b} \sum_{\lambda_0 \in \mathbf{F}_p} \lambda_0^{r-j} + \right. \\ &\quad \left. + (\bar{a} - \bar{d}) \sum_{\lambda_0 \in \mathbf{F}_p} \lambda_0^{r-j+1} - \bar{c} \sum_{\lambda_0 \in \mathbf{F}_p} \lambda_0^{r-j+2}) + \delta_{p-3,r} \bar{c} x^r \right) \\ &= (-1)^n \lambda^{-n-1} (r+1) \left((-1) \binom{r}{0} x^r (-\bar{c}) \sum_{\lambda_0 \in \mathbf{F}_p} \lambda_0^{r+2} + \delta_{p-3,r} \bar{c} x^r \right) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. \square

Dans le cas générique on obtient :

Théorème 6.3. — *Supposons $r \neq 0$. Alors $\text{coker}(p_{n+1}) = \sigma_{r+2}$.*

Démonstration. — Sinon, il existe un élément $y \in \text{ind}_{K_0(p^\infty)}^K \chi_r^s \det$ de telle sorte que

$$F_{\underline{p-1}}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1}) + y$$

est fixé sous l'action de K_{n+1} . Écrivons $y = y^+ + y^-$ avec $y^\pm \in M^\pm$.

Rappelons que, d'après la preuve de la Proposition 6.2, on a

$$(16) \quad (g-1) \cdot F_{\underline{p-1}}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1}) = (-1)^n \bar{c} \lambda^{-n-1} (r+1) x^r \in (\sigma_r \otimes \det)^{K_1(p)}$$

pour $g \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 + p^{n+1}a & p^{n+1}b \\ p^{n+1}c & 1 + p^{n+1}d \end{bmatrix} \in K_{n+1}$.

L'hypothèse $r > 0$ entraîne que $(\sigma_r \otimes \det)^{K_1(p)} = \text{soc}(M^+)$ et on déduit de la K_{n+1} -invariance de $F_{\underline{p-1}}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1}) + y$ que

$$y^- \in (M^-)^{K_{n+1}}, \quad y^+ \in \left(M^+ / \text{soc}(M^+) \right)^{K_{n+1}}.$$

Rappelons que la restriction à $\mathbf{U}(\mathbf{Z}_p)$ de M^+ est unisérielle, de telle sorte que

$$\text{cosoc}_{K_0(p)} \left(M_{n+1, \text{ext}}^+ \right) = \chi_r^s \det \mathfrak{a}^{-1}$$

où l'on a posé $M_{n+1, \text{ext}}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \left(M^+ / \text{soc}(M^+) \right)^{K_{n+1}}$ pour alléger les notations.

Comme $F_{\underline{p-1}}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1})$ est un vecteur propre pour l'action du tore fini $\mathbf{T}(\mathbf{F}_p)$, de caractère propre associé χ_{r+2} et $\chi_r^s \det \mathfrak{a}^{-1} \neq \chi_{r+2}$ si $p > 3$, on déduit que $y^+ \in M_{n+1}^+$.

Au final on a que $y \in M_{n+1}$, ce qui contredit l'hypothèse que $F_{\underline{p-1}}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1}) + y$ est fixe sous l'action de K_{n+1} . \square

Remarque 6.4. — *On s'attend à ce que l'énoncé du Théorème 6.3 reste valable pour $r = 0$. Ceci est bien le cas lorsque $n = 1$, mais on a désisté de traiter le cas général, qui demande un certain nombre de manipulations techniques ennuyeuses, et qu'on a préféré de ne pas l'aborder.*

6.1. Application à la cohomologie des courbes modulaires. — Dans ce numéro, nous cadrons dans un contexte global les résultats sur les K_{n+1} -invariants, grâce aux travaux sur la compatibilité de la correspondance de Langlands effectués par Emerton [Eme] (cf. également [Bre12]).

De manière plus précise, nous décrivons plusieurs espaces isotypiques (sous l'action d'une algèbre de Hecke) de la cohomologie modulo p des courbes modulaires définies sur \mathbf{Q} et le résultat principal de cette section (Théorème 6.5) étend au cas non-irréductible l'étude globale commencé dans [Mo1].

On suit l'exposition et les arguments de [Mo1], §6 (où on a traité le cas des atomes supersinguliers) et la dissertation démandant d'un peu de préparation, on refère le lecteur à [Eme] (cf. aussi [Bre12]).

Soient \mathbf{A}_f les adèles finis de \mathbf{Q} , $G_{\mathbf{Q}}$ le groupe de Galois absolu de \mathbf{Q} et écrivons $G_{\mathbf{Q}_\ell}$ pour son sous-groupe de décomposition en ℓ .

Étant donné un sous-groupe compact-ouvert K_f du groupe adélique $\mathbf{GL}_2(\mathbf{A}_f)$ nous écrivons $Y(K_f)$ pour désigner la courbe modulaire (définie sur \mathbf{Q}) de points complexes

$$Y(K_f)(\mathbf{C}) = \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}) \backslash ((\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}) \times \mathbf{GL}_2(\mathbf{A}_f) / K_f).$$

et nous en prenons, pour $A \in \{\emptyset, k\}$, ses groupes de cohomologie étale

$$H^1(K_f)_A \stackrel{\text{def}}{=} H_{\text{ét}}^1(Y(K_f)_{\overline{\mathbf{Q}}}, A)$$

où $Y(K_f)_{\overline{\mathbf{Q}}}$ est le changement de base de $Y(K_f)$ à $\overline{\mathbf{Q}}$.

Si K^p est un sous-groupe ouvert compact de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{A}_f^p)$, nous considérons le k -module

$$H^1(K^p)_k \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_{K_p} H^1(K_p K^p)_k$$

où K_p parcourt les sous-groupes compact ouverts de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$: ce module est alors muni des actions continues de $G_{\mathbf{Q}}$ et de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, commutant entre elles.

Soit Σ_0 un ensemble fini de places non-Archimédiennes de \mathbf{Q} , ne contenant pas p , et soit $\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_0 \cup \{p\}$. Nous nous intéressons aux sous-groupes compacts ouverts de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{A}_f^p)$ de la forme $K_{\Sigma_0} K_0^\Sigma$, où K_{Σ_0} est un sous-groupe compact ouvert de $G_{\Sigma_0} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\ell \in \Sigma_0} \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_\ell)$ et $K_0^\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\ell \notin \Sigma} \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_\ell)$; on écrit par brevité

$$H^1(K_{\Sigma_0})_k \stackrel{\text{def}}{=} H^1(K_{\Sigma_0} K_0^\Sigma)_k.$$

Étant donné un sous-groupe ouvert-compact K_p in $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ désignons par $\mathbf{T}(K_p K_{\Sigma_0} K_0^\Sigma)$ la sous- \mathcal{O} -algèbre de

$$\text{End}_{\mathcal{O}[G_{\mathbf{Q}}]}(H^1(K_p K_{\Sigma_0} K_0^\Sigma)_{\mathcal{O}})$$

engendré par les opérateurs de Hecke T_ℓ, S_ℓ avec $\ell \notin \Sigma$.

Si $K'_p \leq K_p$ sont deux sous-groupes ouverts compacts dans $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ on a un morphisme de transition surjectif $\mathbf{T}(K'_p K_{\Sigma_0} K_0^\Sigma) \twoheadrightarrow \mathbf{T}(K_p K_{\Sigma_0} K_0^\Sigma)$, qui est compatible, au sens évident, avec les actions sur les espaces de cohomologie étale. Nous en déduisons une action $G_{\mathbf{Q}} \times \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -équivariante de

$$\mathbf{T}(K_{\Sigma_0}) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_{K_p} \mathbf{T}(K_p K_{\Sigma_0} K_0^\Sigma)$$

sur $H^1(K_{\Sigma_0})_k$ ([Eme], (5.1.2)).

Par construction, l'action de $\mathbf{T}(K_{\Sigma_0})$ sur le sous-module $H^1(K_p K_{\Sigma_0} K_0^\Sigma)_k$ se factorise à travers le morphisme surjectif $\mathbf{T}(K_{\Sigma_0}) \twoheadrightarrow \mathbf{T}(K_p K_{\Sigma_0} K_0^\Sigma)$.

Soit $\bar{\rho} : G_{\mathbf{Q}} \rightarrow \mathbf{GL}_2(k)$ une représentation Galoisienne continue, absolument irréductible. En supposant que $\bar{\rho}$ est modulaire, nous définissons Σ_0 comme l'ensemble des diviseurs premiers du conducteur d'Artin de $\bar{\rho}$ ([Ser87], §1.2).

Rappelons que un sous-groupe ouvert compact K_{Σ_0} de G_{Σ_0} est un *niveau admissible* pour $\bar{\rho}$ s'il existe un idéal maximal \mathfrak{m} de $\mathbf{T}(K_{\Sigma_0})$, ayant corps résiduel k , tel que

$$T_\ell \equiv \text{tr}(\bar{\rho}(\text{Frob}_\ell)) \pmod{\mathfrak{m}}, \quad S_\ell \equiv \ell^{-1} \det(\bar{\rho}(\text{Frob}_\ell)) \pmod{\mathfrak{m}}.$$

Comme $\bar{\rho}$ est modulaire, la conjecture de Serre montre que un sous-groupe compact ouvert dans la composante Σ_0 de $\ker(\mathbf{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}}) \rightarrow \mathbf{GL}_2(\hat{\mathbf{Z}}/(N)))$ est un niveau admissible pour $\bar{\rho}$.

Le résultat suivant étends le Théoreme principal de [Mo1] au cas non-irréductible :

Théorème 6.5. — *Soit $p \geq 3$ et $\bar{\rho} : G_{\mathbf{Q}} \rightarrow \mathbf{GL}_2(k)$ une représentation Galoisienne continue, impaire et absolument irréductible.*

Soit Σ_0 l'ensemble des diviseurs premiers du conducteur d'Artin de $\bar{\rho}$, κ le poids minimal associé à $\bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_p}}$ (cf. [Ser87], §2.2) et $\bar{\kappa} \in \{2, \dots, p+1\}$ défini par $\bar{\kappa} \equiv \kappa \pmod{p+1}$.

Soit K_{Σ_0} un niveau admissible pour $\bar{\rho}$ et \mathfrak{m} l'idéal maximal de l'algèbre de Hecke $\mathbf{T}(K_{\Sigma_0})$ associé à $\bar{\rho}$.

Définissons enfin

$$(17) \quad d \stackrel{\text{def}}{=} \dim_k \left(\bigotimes_{\ell \in \Sigma_0} \pi(\bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_\ell}}) \right)^{K_{\Sigma_0}}$$

où $\pi(\bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_\ell}})$ est la représentation lisse de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_\ell)$ associée à $\bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_\ell}}$ par la correspondance de Langlads p -modulaire d'Emerton-Helm ([EH]).

Alors, si $t \geq 1$ et $p \geq 5$ ou bien $t \geq 2$ et $p = 3$ on a

$$\dim_k (H_{\acute{e}t}^1(Y(K_t K_{\Sigma_0} K_0^\Sigma)_{\overline{\mathbf{Q}}}, k)[\mathbf{m}]) = \begin{cases} 2d(2p^{t-1}(p+1) - 3) & \text{si } \kappa \equiv 2 \pmod{p+1} \\ \text{et } \bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_p}} \text{ est absolument irr\'{e}ductible,} \\ \\ 2d(2p^{t-1}(p+1) - 4) & \text{si } \kappa \not\equiv 2 \pmod{p+1} \\ \text{et } \bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_p}} \text{ est absolument irr\'{e}ductible,} \\ \\ 2d(2(p+1)p^{t-1} - (\bar{\kappa} + 1)) & \text{si } \kappa \not\equiv 0, 2, p \pmod{p+1} \\ \text{et } \bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_p}} \text{ est absolument r\'{e}ductible non-scind\'{e}e.} \end{cases}$$

D\'{e}monstration. — Il nous suffit de traiter le cas o\`u $\bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_p}}$ est absolument r\'{e}ductible non scind\'{e}e (le cas absolument irr\'{e}ductible \'{e}tant trait\'{e} dans [Mo1]). De plus, \`a torsion pr\`es, on peut supposer $\kappa \in \{2, \dots, p+1\}$.

La m\^eme preuve de [Mo1], Proposition 6.1 nous permet d'\'{e}crire

$$H^1(K_t K_{\Sigma_0} K_0^\Sigma)_k[\mathbf{m}] \cong \bar{\rho} \otimes (\pi_p)^{K_t} \otimes (\pi_{\Sigma_0}(\bar{\rho}))^{K_{\Sigma_0}}$$

o\`u π_p est la repr\'{e}sentation associ\'{e}e \`a $\bar{\rho}|_{G_{\mathbf{Q}_p}}$ par la correspondance de Langlands p -modulaire, contenant dans son $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ -socle le poids de Serre $\sigma_{\kappa-2}$ (\`a torsion pr\`es).

Le r\'{e}sultat d\'{e}coule donc du Th\'{e}or\`eme 6.3. □

7. Structure interne de l'atome

Le but de cette section est de d\'{e}crire, de la mani\`ere la plus efficace possible, la structure interne de l'atome automorphe $A_{r,\lambda}$, pour $1 \leq r \leq p-3$. Les techniques pr\'{e}sentes ici permettent d'obtenir \'{e}galement le cas $r=0$, mais la technicit\'{e} des enonc\'{e}s, ainsi que de leur preuves (qui d'ailleurs sont similaires au cas g\'{e}n\'{e}rique) nous ont convaincu de ne le pas inclure ici.

Fixons $n \geq 1$. Le r\'{e}sultat principal de cette section est la Proposition 7.2, o\`u l'on d\'{e}crit la structure du $k[[K_0(p)]]$ -module discret $\mathcal{B}_{n+1}^{(1)}$. La structure de $\mathcal{B}_\infty^{(1)}$ se d\'{e}duit donc par passage \`a la limite (Proposition 4.7) et celle de l'atome $A_{r,\lambda} \otimes \det$ par r\'{e}ciprocit\'{e} de Frobenius.

La preuve de la Proposition 7.2 r\'{e}pose de mani\`ere cruciale sur l'\'{e}tude effectu\'{e}e au §5, notamment la Proposition 5.4. Gr\`ace au formalisme des alg\`ebres d'Iwasawa introduit dans la section 3 on \'{e}vite presque compl\`etement les calculs directs sur les fonctions $F_l^{(1,n)}$ introduites pour d\'{e}crire les s\'{e}ries principales.

Commen\~{c}ons par une cons\'{e}quence imm\'{e}diate de la r\'{e}ciprocit\'{e} de Frobenius, du Lemme 5.1 et de la Proposition 5.4 :

Corollaire 7.1. — *Soit $n \geq 1$ et supposons $r > 0$. Alors $M^+/\text{soc}(M^+)$ est un facteur direct du $k[[K_0(p)]]$ -module discret $\mathcal{B}_{n+1}^{(1)}/\text{soc}(M^+)$ et la suite exacte de $k[[K_0(p)]]$ -modules discrets*

$$0 \rightarrow M^- \oplus M^+/\text{soc}(M^+) \rightarrow \mathcal{B}_{n+1}^{(1)}/\text{soc}(M^+) \rightarrow \widetilde{M}_{n+1}^- \rightarrow 0$$

est scind\'{e}e apr\`es restriction \`a la sous-alg\`ebre A .

La structure interne du $k[[K_0(p)]]$ -module discret $\mathcal{B}_{n+1}^{(1)}$ est décrite dans la Proposition suivante.

Proposition 7.2. — Soit $1 \leq r \leq p-3$, $n \geq 1$ et considérons l'extension de $k[[K_0(p)]]$ -modules discrets :

$$0 \rightarrow M^- \rightarrow \mathcal{B}_{n+1}^{(1)}/M^+ \rightarrow \widetilde{M}_{n+1}^- \rightarrow 0.$$

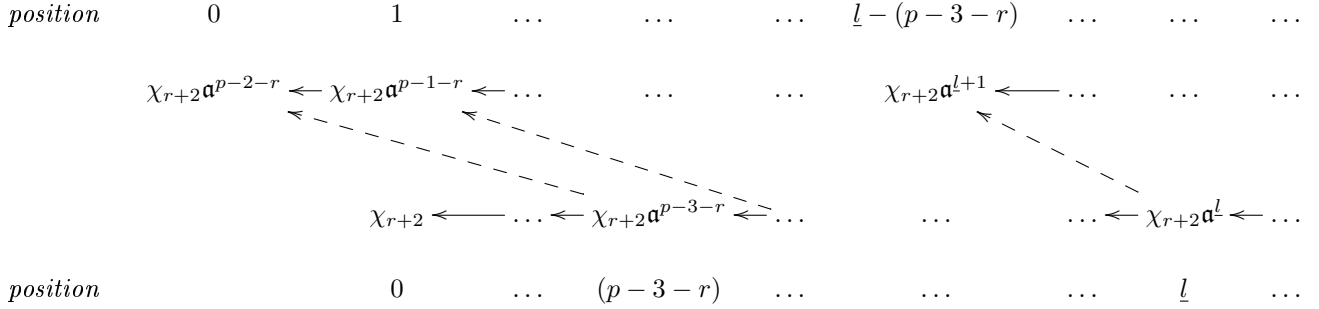
Fixons une n -uplet $\underline{l} = (l_1, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p-1\}^n$ et soit $g = \begin{bmatrix} 1+pa & b \\ pc & 1+pd \end{bmatrix} \in K_0(p)$.

On a la relation suivante dans $\mathcal{B}_{n+1}^{(1)}/M^+$:

$$(g-1) \cdot (\kappa_{\underline{l}} X^{N^\circ(\underline{l})} \cdot \tilde{c}_{n+1}) \in (X^{N^\circ(\underline{l})+1}) \cdot \widetilde{M}_{n+1}^- + (X^{(p-2-r)+N^\circ(\underline{l})}) \cdot M_{n+1}^- + \\ + \eta_{r,n} \bar{b} \left(\kappa_{\underline{l}} \kappa_{p^n-1-(p-3-r)} + 2\delta_{l_1 \neq p-1} \kappa_{l_1+1} \kappa_{p^n-1-(p-2-r)} \right) X^{N^\circ(\underline{l})+(p-3-r)}$$

où l'on a posé $\eta_{r,n} \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{n+r+1} (r+1) \lambda^{-2n}$.

En particulier, la structure de $\mathcal{B}_{n+1}^{(1)}/M^+$ est décrite par le graphe :



où la première ligne correspond à M^- , la deuxième ligne à \widetilde{M}_{n+1}^- et l'extension diagonale entre $\chi_{r+2} \mathfrak{a}^{\underline{l}}$ et $\chi_{r+2} \mathfrak{a}^{\underline{l}+1}$ est non scindée si et seulement si

$$(18) \quad \kappa_{\underline{l}} \kappa_{p^n-1-(p-3-r)} + 2\delta_{l_1 \neq p-1} \kappa_{l_1+1} \kappa_{p^n-1-(p-2-r)} \neq 0$$

Démonstration. — Remarquons d'abord que, si $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbf{F}_p)^n$ et $z_{\underline{\lambda}} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^n p^j [\lambda_j]$, on a

$$(19) \quad \begin{bmatrix} 1+pa & b \\ pc & 1+pd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & b \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$$

où $\alpha = 1 + pa + bz$, $\delta = 1 + pd - pt(z)$ et $t(z) = (z(1+pd) + pc)(1 + pa + bz)^{-1}$.

Fixons donc une n -uplet $(l_1, \dots, l_n) \in \{0, \dots, p-1\}^n$ et écrivons l'élément $F_{\underline{l}}^{(1,n)} \in k[[K_0(p)]]$ de manière compacte

$$F_{\underline{l}}^{(1,n)} = \sum_{\underline{\lambda} \in (\mathbf{F}_p)^n} \underline{\lambda}^{\underline{l}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z_{\underline{\lambda}} & 1 \end{bmatrix}$$

(où l'on a posé $\underline{\lambda}^{\underline{l}} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^n \lambda_j^{l_j}$).

On déduit de (19) l'égalité suivante dans $A/(X^{p^n})$:

$$(20) \quad g \cdot F_{\underline{l}}^{(1,n)} = \sum_{\lambda \in (\mathbf{F}_p)^n} \lambda^{\underline{l}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{t}(z_\lambda) & 1 \end{bmatrix}$$

et, plus en général, si T est un $k[[\mathbf{B}(\mathbf{Z}_p)]]$ -module discret et $t \in T$ on a

$$(21) \quad g \cdot (F_{\underline{l}}^{(1,n)} \otimes_{k[[\mathbf{B}(\mathbf{Z}_p)]]} t) = \sum_{\lambda \in (\mathbf{F}_p)^n} \lambda^{\underline{l}} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{t}(z_\lambda) & 1 \end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix} \alpha & b \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \cdot t \right) \right).$$

Supposons de plus qu'ils existent des éléments $t_i \in T$, $n(t) \in \mathbf{N}$ et des polynômes $P_i \in k[[\overline{\mathbf{U}}(p)]] \cong A$, bien définis modulo $\mathfrak{m}_A^{n(t)}$ de telle sorte que l'on a

$$\begin{bmatrix} 1 + p\epsilon_1 & \epsilon_2 \\ 0 & 1 + p\epsilon_3 \end{bmatrix} \otimes t \in \bar{\epsilon}_2(P_1 + \mathfrak{m}^{n(t)}) \otimes t_1 + (\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_3)(P_2 + \mathfrak{m}^{n(t)}) \otimes t_2$$

pour tout $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in \mathbf{Z}_p$.

On déduit alors de (21), (19) et (20) les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} g \cdot (F_{\underline{l}}^{(1,n)} \otimes t) &\equiv \bar{b} \left(\sum_{\lambda \in (\mathbf{F}_p)^n} \lambda^{\underline{l}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{t}(z_\lambda) & 1 \end{bmatrix} \right) (P_1 + \mathfrak{m}^{n(t)}) \otimes t_1 + \\ &\quad + (\bar{a} - \bar{d} - \bar{b}\bar{c}) \left(\sum_{\lambda \in (\mathbf{F}_p)^n} \lambda^{\underline{l}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{t}(z_\lambda) & 1 \end{bmatrix} \right) (P_2 + \mathfrak{m}^{n(t)}) \otimes t_2 + \\ &\quad + 2\bar{b} \left(\sum_{\lambda \in (\mathbf{F}_p)^n} \lambda^{\underline{l}} \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{t}(z_\lambda) & 1 \end{bmatrix} \right) (P_2 + \mathfrak{m}^{n(t)}) \otimes t_2 \\ (22) \quad &\equiv \bar{b}(g \cdot F_{\underline{l}}^{(1,n)})(P_1 + \mathfrak{m}^{n(t)}) \otimes t_1 + (\bar{a} - \bar{d} - \bar{b}\bar{c})(g \cdot F_{\underline{l}}^{(1,n)})(P_2 + \mathfrak{m}^{n(t)}) \otimes t_2 + \\ &\quad + 2\bar{b}(g \cdot F_{[\underline{l}_1+1], \underline{l}_2, \dots, \underline{l}_n}^{(1,n)})(P_2 + \mathfrak{m}^{n(t)}) \otimes t_2 \end{aligned}$$

où $[\underline{l}_1 + 1] \stackrel{\text{def}}{=} \underline{l}_1 + 1$ si $\underline{l}_1 < p - 1$ et $[\underline{l}_1 + 1] = 0$ sinon.

D'après le Corollaire 7.1, la Proposition 5.4 et (22) on déduit finalement

$$\begin{aligned} (g-1) \cdot F_{\underline{l}}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1}) &\in (X^{1+N^\circ(\underline{l})}) \widetilde{M}_{n+1}^- + \eta_{r,n} \left((g \cdot F_{\underline{l}}^{(1,n)}) (\bar{b}\kappa_{p^n-1-(p-3-r)} X^{p-3-r} + \right. \\ &\quad \left. + (\bar{a} - \bar{d} - \bar{b}\bar{c})\kappa_{p^n-1-(p-2-r)} X^{p-2-r} + (X^{(p-3-r)+(p-2)})) + \right. \\ &\quad \left. + (g \cdot F_{[\underline{l}_1+1], \underline{l}_2, \dots, \underline{l}_n}^{(1,n)}) (2\bar{b}\kappa_{p^n-1-(p-2-r)} X^{p-2-r} + (X^{(p-3-r)+(p-2)})) \right) \end{aligned}$$

où l'on a posé $\eta_{r,n} \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{n+1+r} (r+1) \lambda^{-2n}$.

Comme $(g \cdot F_{[\underline{l}_1+1], \underline{l}_2, \dots, \underline{l}_n}^{(1,n)}) \in \kappa_{\underline{l}_1+1} X^{N^\circ(\underline{l})-1} + (X^{N^\circ(\underline{l})})$ si $\underline{l}_1 < p - 1$ et $(g \cdot F_{[\underline{l}_1+1], \underline{l}_2, \dots, \underline{l}_n}^{(1,n)}) \in (X^{N^\circ(\underline{l})})$ si $\underline{l}_1 = p - 1$, on déduit

$$\begin{aligned} (g-1) \cdot F_{\underline{l}}^{(1,n)}(\tilde{e}_{n+1}) &\in (X^{1+N^\circ(\underline{l})}) \widetilde{M}_{n+1}^- + (X^{N^\circ(\underline{l})+(p-2-r)}) M_{n+1}^- + \\ &\quad + \kappa_{n,r,\lambda} \bar{b} (\kappa_{p^n-1-(p-3-r)} \kappa_{\underline{l}} + 2\delta_{\underline{l}_1 \neq p-1} \kappa_{p^n-1-(p-2-r)} \kappa_{\underline{l}_1+1}) X^{N^\circ(\underline{l})+(p-3-r)}. \end{aligned}$$

Cela démontre la première partie de la Proposition.

La non-nullité des extensions en “diagonal” entre $\chi_{r+2}\mathbf{a}^l$ et $\chi_{r+2}\mathbf{a}^{l+1}$ suit alors de l’argument habituel, en remarquant que les caractères χ_{r+2} et $\chi_{r+2}\mathbf{a}^2$ sont distincts si $p > 3$. \square

Remarque 7.3. —

- i) Notons que la condition (18) est équivalent à $l_1 + 1 \not\equiv -\frac{r+2}{2} \pmod{p}$.
- ii) On s’attend à ce que l’énoncé de la Proposition 7.2 reste valable pour $r = 0$ et pour $p = 3$. Comme l’on a annoncé, on peut vérifier à la main que le K -socle de $A_{r,\lambda} \otimes \det$ est irréductible pour $p \geq 3$, $0 \leq r \leq p - 3$. La technicité des manipulations, qui de plus n’ajoutent pas des nouvelles perspectives à l’approche de la preuve du résultat ci-dessous, nous ont fait désister de les poursuivre.
- iii) Par réciprocity de Frobenius, la Proposition 7.2 nous permet de décrire la structure de $A_{r,\lambda} \otimes \det$ en termes de poids de Serre : il s’agit d’étudier le passage de $\mathrm{Ext}_{K_0(p)}^1(\chi, \chi\mathbf{a})$ à $\mathrm{Ext}_K^1(\mathrm{ind}_{K_0(p)}^K \chi, \mathrm{ind}_{K_0(p)}^K \chi\mathbf{a})$ où χ est un caractère lisse de $K_0(p)$.

8. Appendice

On consacre cette appendice à des résultats techniques qui se révèlent nécessaires afin d’obtenir la Proposition clé 5.4. On étudie d’abord certains polynômes de Witt qui apparaissent naturellement lorsque l’on étudie les actions supplémentaires de $\mathbf{B}(\mathbf{Z}_p)$ sur l’algèbre d’Iwasawa $A = k[[\overline{\mathbf{U}(p)}]]$ (§8.1).

Remarquons que, même si le tore fini $\mathbf{T}(\mathbf{Z}_p)$ agit sur A par des automorphismes de k -algèbres (ce qui permet de simplifier certains arguments concernant l’action de ce dernier sur A), l’action de $\mathbf{U}(\mathbf{Z}_p)$ n’est que k -linéaire et les manipulation effectués dans §8.1 restent, par l’instant, incontournables afin de pouvoir la contrôler.

Ensuite, on utilise au §8.2 les résultats précédents afin d’obtenir des renseignements cruciaux sur le comportement de l’élément e_{n+1} introduit dans la section 4.3.

8.1. Sur certains polynômes de Witt. — Dans ce numéro on a pour objectif l’étude de certains polynômes de Witt qui apparaissent naturellement dans les manipulations nécessaires à la détermination de la structure interne des représentations p -modulaires de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. On utilise ici les notations de [Mo2], §A.1 (en invitant le lecteur à se référer à *loc. cit.* pour plus de détails, ou à des références classiques [Ser], [Bou], [Bos] pour le cadre général).

Les éléments de $W(\mathbf{F}_p) \cong \mathbf{Z}_p$ seront noté indifféremment par $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots)$ ou, de manière plus parlante, $\sum_{j=0}^{\infty} p^j [\lambda_j]$. La loi de la somme (resp. du produit, resp. de la puissance N -ième) est alors déterminé par les polynômes universels

$$S_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} S_n(X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_n) \in \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_n]$$

(resp. $\mathrm{Prod}_n(X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_n) \in \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_n]$, resp. $\mathrm{Pot}_n^N(X_0, \dots, X_n) \in \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_n]$) définis pour tout $n \in \mathbf{N}$ (cf. [Mo2], §A.1).

La structure récursive de S_n est décrite par le résultat suivant :

Lemme 8.1. — Soit $n \geq 1$. Alors

$$S_n = X_n + Y_n - (S_{n-1} - X_{n-1})X_{n-1}^{p-1} + R_n$$

où $R_n \in \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_{n-2}, Y_0, \dots, Y_{n-1}][X_{n-1}]$, $(S_{n-1} - X_{n-1}) \in \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_{n-2}, Y_0, \dots, Y_{n-1}]$ et R_n est un polynôme de degré au plus $p-2$ en X_{n-1} .

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{p^n} \left(p^n X_n + p^n Y_n + p^{n-1} X_{n-1}^p + p^{n-1} Y_{n-1}^p + \dots + X_0^{p^n} + Y_0^{p^n} - p^{n-1} S_{n-1}^p - \dots - S_0^{p^n} \right) \\ &= X_n + Y_n + \frac{1}{p^n} \left(p^{n-1} X_{n-1}^p - p^{n-1} (S_{n-1})^p + P_n \right) \end{aligned}$$

où $P_n \in \mathbf{Z}_{(p)}[X_0, \dots, X_{n-2}, Y_0, \dots, Y_{n-1}]$.

Or, il existe un élément convenable $Q_{n-1} \in \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_{n-2}, Y_0, \dots, Y_{n-2}]$ de telle sorte que l'on a :

$$\begin{aligned} (S_{n-1})^p &= (X_{n-1} + Y_{n-1} + Q_{n-1})^p \\ &= X_{n-1}^p + pX_{n-1}^{p-1}Y_{n-1} + pX_{n-1}^{p-1}Q_{n-1} + U_{n-1} \end{aligned}$$

pour un un polynôme $U_{n-1} \in \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_{n-2}, Y_0, \dots, Y_{n-1}][X_{n-1}]$ de degré au plus $p-2$ en X_{n-1} .

Ainsi

$$\begin{aligned} S_n &= X_n + Y_n + \frac{1}{p^n} \left(p^{n-1} X_{n-1}^p - p^{n-1} (X_{n-1}^p + pX_{n-1}^{p-1}Y_{n-1} + pX_{n-1}^{p-1}Q_{n-1} + U_{n-1}) + P_n \right) \\ &= X_n + Y_n - X_{n-1}^{p-1} (Y_{n-1} + Q_{n-1}) + \frac{1}{p^n} (-p^{n-1} U_{n-1} + P_n) \end{aligned}$$

Comme $Q_{n-1} = S_{n-1} - X_{n-1} - Y_{n-1} \in \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_{n-2}, Y_0, \dots, Y_{n-2}]$ on déduit que $R_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p^n} (-p^{n-1} U_{n-1} + P_n)$ est un élément de $\mathbf{Z}[X_0, \dots, X_{n-2}, Y_0, \dots, Y_{n-1}][X_{n-1}]$ de degré au plus $p-2$ en X_{n-1} , ce qui permet de conclure. \square

Le lemme 8.1 nous permet d'utiliser des procédés de récurrence relativement à certains polynômes de Witt qui apparaissent naturellement dans l'étude des représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Plus précisément, on a les corollaires suivantes :

Corollaire 8.2. — Soit $z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^n p^j [\lambda_j] \in \mathbf{Z}_p$ et considérons $\mu \in \mathbf{F}_p^\times$.

Alors

$$[\mu] + z = \sum_{j=0}^{\infty} p^j [\lambda_j + \tilde{S}_j]$$

où $\tilde{S}_0 = \mu$ et pour tout $j \geq 1$, $\tilde{S}_j \in \mathbf{F}_p[\lambda_0, \dots, \lambda_{j-2}, \mu][\lambda_{j-1}]$ est un polynôme de degré $p-1$ en λ_{j-1} et coefficient dominant $-\tilde{S}_{j-1}$.

Démonstration. — Immédiate du Lemme 8.1. \square

Corollaire 8.3. — Supposons $p \geq 3$. Soit $n \geq m \geq 0$, $z = \sum_{j=m}^n p^j [\lambda_j] \in \mathbf{Z}_p$, $\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} p^j [\alpha_j] \in \mathbf{Z}_p$.

Alors,

$$z + p\alpha z \equiv \sum_{j=m}^n p^j [\lambda_j + \tilde{Q}_{j-m}] \pmod{p^{n+1}}$$

où $\tilde{Q}_0 = 0$, $\tilde{Q}_1 = \alpha_0 \lambda_m$ et, pour $j \geq m+2$

$$\tilde{Q}_{j-m} \in \mathbf{F}_p[\alpha_0, \dots, \alpha_{j-m-1}, \lambda_m, \dots, \lambda_{j-1}]$$

est un polynôme de degré $p-1$ en λ_{j-1} et coefficient dominant $-\tilde{Q}_{j-m-1}$.

Démonstration. — On a dans $W(\mathbf{F}_p)$

$$p \cdot \alpha \cdot z = (0, \dots, 0, \underbrace{Prod_0(\alpha_0, \lambda_m)}_{\text{position } Y_{m+1}}, \underbrace{Prod_1(\alpha_0, \alpha_1, \lambda_m, \lambda_{m+1})}_{\text{position } Y_{m+2}}, \dots)$$

où $Prod_j(\alpha_0, \dots, \alpha_j, \lambda_m, \dots, \lambda_{j+m})$ est le spécialisé en $(\alpha_0, \dots, \alpha_j, \lambda_m, \dots, \lambda_{j+m})$ du j -ième polynôme universel de Witt pour le produit.

En particulier pour $j \geq m+1$ on trouve en position Y_j un élément de $\mathbf{F}_p[\alpha_0, \dots, \alpha_{j-m-1}, \lambda_m, \dots, \lambda_{j-1}]$.

Le résultat suit donc du lemme 8.1, en remarquant que (cf. l'appendice A.1 dans [Mo2])

$$Prod_j(X_0, \dots, X_j, Y_0, \dots, Y_j) = Y_j \left(\sum_{i=0}^j p^i X_i^{p^{j-i}} \right) + Q_0(X_0, \dots, X_j, Y_0, \dots, Y_{j-1})$$

pour un élément $Q_0(X_0, \dots, X_j, Y_0, \dots, Y_{j-1}) \in \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_j, Y_0, \dots, Y_{j-1}]$, ce qui montre que la spécialisation $Prod_j(\alpha_0, \dots, \alpha_j, \lambda_m, \dots, \lambda_{j+m})$ est un polynôme de degré $1 < p-1$ en λ_{j+m} et coefficient dominant α_0 . \square

Corollaire 8.4. — Supposons $p \geq 3$. Soit $n \geq m \geq 1$, $z = \sum_{j=m}^n p^j [\lambda_j] \in \mathbf{Z}_p$ et $\mu \in \mathbf{F}_p^\times$.

Alors

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{m} \rfloor} z^{j+1} (-1)^j [\mu^j] \equiv \sum_{j=m}^n p^j [\lambda_j + \tilde{U}_j] \pmod{p^{n+1}}$$

où

i) $\tilde{U}_j = 0$ pour $j = m, \dots, 2m-1$;

ii) $\tilde{U}_{2m} = -\mu \lambda_m^2$;

iii) pour $j \geq 2m+1$, $\tilde{U}_j \in \mathbf{F}_p[\lambda_m, \dots, \lambda_{j-1}, \mu]$ est un polynôme de degré $p-1$ en λ_{j-1} et coefficient dominant $-\tilde{U}_{j-1}$.

Démonstration. — Comme p est impair, on a $(-1)^j [\mu^j] = [(-\mu)^j]$ pour tout $j \geq m$. Écrivons

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n+1}{m} \rfloor} z^{j+1} (-1)^j [\mu^j] \equiv z + \underbrace{\sum_{j=2}^{\lfloor \frac{n+1}{m} \rfloor + 1} z^j [(-\mu)^{j-1}]}_{\stackrel{\text{def}}{=} \tilde{z}}$$

Si $z = (0, \dots, 0, \lambda_m, \dots, \lambda_n, 0, \dots) \in W(\mathbf{F}_p)$ on a

$$z^j = (0, \dots, 0, \underbrace{Pot_0^j(\lambda_m)}_{\text{position } Y_{jm}}, \dots, \underbrace{Pot_{k-jm}^j(\lambda_m, \dots, \lambda_{k-jm+m})}_{\text{position } Y_k}, \dots, \underbrace{Pot_{n-jm}^j(\lambda_m, \dots, \lambda_{n-jm+m})}_{\text{position } Y_n}, \dots)$$

où Pot_k^j est le k -ième polynôme universel de Witt pour la puissance j -ième. On est donc amené à considérer la famille suivante d'éléments de $W(\mathbf{F}_p)$:

$$\begin{array}{cccccccccccc} (0, & \dots, & 0, & \overbrace{Pot_0^2(\lambda_m)}^{\text{position } Y_{2m}}, & \overbrace{Pot_1^2(\lambda_m, \lambda_{m+1})}^{\text{position } Y_{2m+1}}, & \dots, & \overbrace{Pot_m^2(\lambda_m, \dots, \lambda_{2m})}^{\text{position } Y_{3m}}, & \dots, & \overbrace{Pot_{(j-2)m}^2(\lambda_m, \dots, \lambda_{(j-1)m})}^{\text{position } Y_{jm}}, & \dots \\ (0, & \dots, & 0, & 0, & \dots, & 0, & Pot_0^3(\lambda_m), & \dots, & Pot_{(j-3)m}^3(\lambda_m, \dots, \lambda_{(j-2)m}), & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (0, & \dots, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & \dots, & Pot_0^j(\lambda_m), & \dots) \end{array}$$

Rappelons (cf. l'appendice A.1 de [Mo2]) que le n -ième polynôme universel de Witt pour la puissance carrée est de la forme

$$Pot_n^2(X_0, \dots, X_n) = \frac{1}{p^n} \left(\left(\sum_{j=0}^n X_j^{p^{n-j}} p^j \right)^2 - \sum_{j=0}^{n-1} p^{n-1-j} (Pot_{n-1-j}^2(X_0, \dots, X_{n-1-j}))^{p^{j+1}} \right)$$

ce qui donne

$$Pot_n^2(X_0, \dots, X_n) = p^n X_n^2 + 2X_n Q_1(X_0, \dots, X_{n-1}) + Q_2(X_0, \dots, X_{n-1})$$

pour des polynômes convenables $Q_1(X_0, \dots, X_{n-1}), Q_2(X_0, \dots, X_{n-1}) \in \mathbf{Z}[X_0, \dots, X_{n-1}]$.

On déduit que la spécialisation de $Pot_{k-2m}^2(X_0, \dots, X_{k-2m})$ est de la forme $Pot_{k-2m}^2(\lambda_m, \dots, \lambda_{k-m}) \in \mathbf{F}_p[\lambda_m, \dots, \lambda_{k-m-1}][\lambda_{k-m}]$, qui est un polynôme de degré au plus 1 en λ_{k-m} lorsque $k > 2m$.

De plus, au dessous de $Pot_{k-2m}^2(\lambda_m, \dots, \lambda_{k-m})$ on a les éléments $Pot_{k-jm}^j(\lambda_m, \dots, \lambda_{k-jm+m}) \in \mathbf{F}_p[\lambda_m, \dots, \lambda_{k-m-1}]$ (pour $j \geq 3$), de telle sorte que

$$\tilde{z} = (0, \dots, 0, P_{2m}(\lambda_m), P_{2m+1}(\lambda_m, \lambda_{m+1}), \dots, \underbrace{P_k(\lambda_m, \dots, \lambda_{k-m})}_{\text{position } Y_k}, \dots)$$

où $P_k(\lambda_m, \dots, \lambda_{k-m}) \in \mathbf{F}_p[\lambda_m, \dots, \lambda_{k-m}, \mu]$ est un polynôme de degré au plus 1 en λ_{k-m} lorsque $k > 2m$.

Ceci, en vue du lemme 8.1, permet de conclure. \square

8.2. Manipulation à l'intérieur de $A_{r,\lambda}$. — On reprends ici les notations et conventions du §4.3 et du §5. En particulier, on fixe $n \geq 1$, $p \geq 3$ et $0 \leq r \leq p-3-r$.

L'objectif de cette section est d'utiliser les informations sur les polynômes de Witt déterminées au §8.1 afin de contrôler l'action de $\mathbf{B}(\mathbf{Z}_p)$ sur l'élément $e_{n+1} \in \mathcal{B}_{n+1}^{(n+1)}$ défini au §4.3.

Lemme 8.5. — Soit $\mu \in \mathbf{F}_p^\times$. Si $p \geq 5$ on a l'égalité suivante :

$$\left(\left[\begin{array}{cc} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{array} \right] - 1 \right) \tilde{e}_{n+1} \equiv (-1)^{n+r+1} (r+1) \lambda^{-2n} \left(\mu F_{r+2,p-1,\dots,p-1}^{(1,n)} - \frac{1}{2} \mu^2 \delta_{n \neq 1} F_{[r+4],p-2,p-1,\dots,p-1}^{(1,n)} \right) \text{ mod } V_{n+1}$$

où l'on a défini le sous $k[K_0(p^{n+1})]$ -module V_{n+1} de $\pi(r, \lambda, \omega)$ par :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &\stackrel{\text{def}}{=} \left\langle F_{\leq (r+2, p-1, \dots, p-1)_{-p}}^{(1, n)} \right\rangle \oplus \langle [1, x^r] \rangle_{\overline{\mathbf{F}}_p} \\ &= \mathfrak{m}^{(p-3-r)+p} M_{n+1}^- \oplus (\sigma_r \otimes \det)^{K_1(p)}. \end{aligned}$$

Si $p \geq 3$ on a

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1 \right) \tilde{e}_{n+1} \equiv (-1)^{n+r+1} (r+1) \lambda^{-2n} \mu F_{r+2, p-1, \dots, p-1}^{(1, n)} \text{ mod } V_\emptyset$$

où, cette fois,

$$\begin{aligned} V_\emptyset &\stackrel{\text{def}}{=} \left\langle F_{\leq (r+2, p-1, \dots, p-1)_{-(p-2)}}^{(1, n)} \right\rangle \oplus \langle [1, x^r] \rangle_{\overline{\mathbf{F}}_p} \\ &= \mathfrak{m}^{(p-3-r)+(p-2)} M_{n+1}^- \oplus (\sigma_r \otimes \det)^{K_1(p)}. \end{aligned}$$

Démonstration. — On commence par remarquer que

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1 \right) e_{n+1} = 0, \quad \left(\begin{bmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1 \right) F_{r+1}^{(n+1)}(0) = 0$$

de telle sorte qu'on est intéressé à l'étude des éléments $F_{r, 0, \dots, 0}^{(m, n)}(1)$ (resp. $F_{r, 0, \dots, 0, 1}^{(m, n+1)}(0)$ si $r = 0$), pour $1 \leq m \leq n$. Notons également que si $m \in \{3, \dots, n\}$ on a

$$(23) \quad F_{l'_m, \dots, l'_n}^{(m, n)} \in V_{n+1} \quad \text{si } (l'_m, \dots, l'_n) \neq (p-1, \dots, p-1)$$

et que $F_{l'_2, \dots, l'_n}^{(2, n)} \in V_{n+1}$ si $(l'_2, \dots, l'_n) \prec (p-2, p-1, \dots, p-1)$.

Supposons désormais que $n \geq 2$ et $r > 0$. On a

$$\begin{aligned} &\left(\begin{bmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1 \right) F_{r, 0, \dots, 0}^{(m, n)}(1) = \\ &= \sum_{\lambda_m \in \mathbf{F}_p} \lambda_m^r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^m [\lambda_m] & 1 \end{bmatrix} \sum_{j=m+1}^{n-1} \sum_{\lambda_j \in \mathbf{F}_p} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^j [\lambda_j + \tilde{U}_j] & 1 \end{bmatrix} \sum_{\lambda_n \in \mathbf{F}_p} \tilde{U}_{n+1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^n [\lambda_n + \tilde{U}_n] & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ p^{n+1} & 0 \end{bmatrix} [1, x^r] \end{aligned}$$

où les polynômes \tilde{U}_j , pour $j = m+1, \dots, n+1$, sont ceux définis dans l'énoncé du corollaire 8.4.

Grâce au corollaire 8.4 et la remarque (23) on déduit :

$$\begin{aligned} &\left(\begin{bmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1 \right) F_{r, 0, \dots, 0}^{(m, n)}(1) \equiv \\ &\equiv (-1)^{n-2m} \sum_{\lambda_m \in \mathbf{F}_p} \lambda_m^r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^m [\lambda_m] & 1 \end{bmatrix} \cdots \sum_{\lambda_{2m} \in \mathbf{F}_p} \tilde{U}_{2m+1}(\lambda_{2m}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^{2m} [\lambda_{2m} + \tilde{U}_{2m}] & 1 \end{bmatrix} F_{p-1, \dots, p-1}^{(2m+1, n)} \text{ mod } V_{n+1}. \end{aligned}$$

Si $m \geq 2$ la remarque (23) nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} &(-1)^{n-2m} \sum_{\lambda_m \in \mathbf{F}_p} \lambda_m^r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^m [\lambda_m] & 1 \end{bmatrix} \cdots \sum_{\lambda_{2m} \in \mathbf{F}_p} \tilde{U}_{2m+1}(\lambda_{2m}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^{2m} [\lambda_{2m} + \tilde{U}_{2m}] & 1 \end{bmatrix} F_{p-1, \dots, p-1}^{(2m+1, n)} \equiv \\ &\equiv (-1)^{n-2(m-1)} F_{r+2, 0, \dots, 0, p-1, \dots, p-1}^{(m, n)} \equiv 0. \end{aligned}$$

Pour le cas $m = 1$ il faut s'intéresser au polynôme \tilde{U}_3 . Cela est déterminé par la condition

$(p[\lambda_1] + p^2[\lambda_2] + p^3[\lambda_3]) + [-\mu](p[\lambda_1] + p^2[\lambda_2])^2 + p^3[\lambda_3][\mu^2] \equiv p[\lambda_1] + p^2[-\lambda_1^2\mu + \lambda_2] + p^3[\lambda_3 + \tilde{U}_3] \pmod{p^4}$
et, en rappelant la loi de la somme dans \mathbf{Z}_p , on trouve

$$\begin{aligned} \tilde{U}_3(\lambda_2) &\equiv -\sum_{s=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{s}}{p} \lambda_2^{p-s} (-\mu\lambda_1^2)^s - 2\mu\lambda_2\lambda_1 + \lambda_1^3\mu^2 \\ &= (\lambda_2^{p-1}(\mu\lambda_1^2) - \frac{p(p-1)}{2p} \lambda_2^{p-2}\mu^2\lambda_1^4) + * \end{aligned}$$

où, pour $p \geq 5$, l'élément $* \in \mathbf{F}_p[\lambda_2]$ est un polynôme en λ_2 de degré au plus $p-3$ (notons que pour $p=3$, on aurait $* = -2\mu\lambda_2^{p-2}\lambda_1 + \lambda_1^3\mu^2$).

Encore une fois, d'après (23) on a

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} 1 & [\mu] \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1 \right) F_{r,0,\dots,0}^{(1,n)}(1) &\equiv (-1)^{n-2} \sum_{\lambda_1 \in \mathbf{F}_p} \lambda_1^r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p[\lambda_1] & 1 \end{bmatrix} \sum_{\lambda_2 \in \mathbf{F}_p} \tilde{U}_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p^2[\lambda_2 - \lambda_1^2\mu] & 1 \end{bmatrix} F_{p-1,\dots,p-1}^{(3,n)} \\ &\equiv (-1)^n \left(\mu F_{r+2,p-1,\dots,p-1}^{(1,n)}(0) - \frac{1}{2} \mu^2 F_{[r+4],p-2,\dots,p-1}^{(1,n)} \right). \end{aligned}$$

Le cas $r=0$ est traité de manière similaire, en notant que $F_0^{(n+1)}(0) \mapsto F_0^{(n+1)}$ (via l'isomorphisme du Lemme 2.8) et que $F_0^{(n+1)} \in \text{ind}_{K_0(p^{n+2})}^{K_0(p)} \chi_r^s \det$ est la fonction à support dans $K_0(p^{n+1})$.

Enfin, le cas $n=1$ est aisément démontré de manière directe (avec des manipulations élémentaires). \square

Lemme 8.6. — Soit $\alpha \in \mathbf{Z}_p$ et $p \geq 3$.

Alors on a l'égalité suivante dans $\mathcal{B}_{n+1}^{(n+1)}$:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + p\alpha \end{bmatrix} - 1 \right) \tilde{e}_{n+1} \equiv (-1)^{n+r} \bar{\alpha}(r+1) \lambda^{-2n} F_{r+1,p-1,\dots,p-1}^{(1,n)} \pmod{V_{n+1}}.$$

Démonstration. — C'est analogue à la preuve du lemme précédent et est laissée au lecteur. \square

Proposition 8.7. — Soit $n \geq 1$ et considérons l'extension

$$0 \rightarrow \pi(r, \lambda, \omega) \rightarrow \mathcal{B}_{n+1}^{n+1} \rightarrow \chi_{r+2} \rightarrow 0.$$

Soit $g \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 + pa & b \\ p^{n+1}c & 1 + pd \end{bmatrix} \in K_0(p^{n+1})$.

Alors, pour $p \geq 5$ on a l'égalité suivante dans $\mathcal{B}_{n+1}^{(n+1)}$ modulo V_{n+1}

$$\begin{aligned} (g-1)\tilde{e}_{n+1} &\equiv (-1)^{n+r+1}(r+1)\lambda^{-2n} \left(\bar{b} F_{r+2,p-1,\dots,p-1}^{(1,n)} + (\overline{a-d}) F_{r+1,p-1,\dots,p-1}^{(1,n)} - \right. \\ &\quad \left. - (\overline{a-d}) \delta_{n \neq 1} F_{[r+3],p-2,p-1,\dots,p-1}^{(1,n)} - \frac{1}{2} \bar{b}^2 \delta_{n \neq 1} F_{[r+4],p-2,p-1,\dots,p-1}^{(1,n)} \right). \end{aligned}$$

Pour $p \geq 3$, et si $r > 0$ on peut écrire de manière plus expressive en termes d'algèbres d'Iwasawa :

$$(g-1)\tilde{e}_{n+1} \equiv (-1)^{n+r+1}(r+1)\lambda^{-2n} \left(\bar{b}\kappa_{\underline{p-1-(p-3-r)}}^{(n)} X^{p-3-r} + (\overline{a-d})\kappa_{\underline{p-1-(p-2-r)}}^{(n)} X^{p-2-r} \right)$$

modulo $(\sigma_r \otimes \det)^{K_1(p)} \oplus (X^{(p-3-r)+(p-2)})M_{n+1}^-$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate des Lemmes 5.1, 8.5, 8.6 et de la décomposition d'Iwahori de $K_0(p^{n+1})$.

Remarquons seulement que $\bar{\mathbf{U}}(p^{n+1})$ agit de manière triviale sur $F_{l_1, \dots, l_n}^{(1,n)}$, pour toute uplet (l_1, \dots, l_n) et que, pour $n \geq 2$,

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+p\alpha \end{bmatrix} - 1 \right) \cdot F_{r+2, p-1, \dots, p-1}^{(1,n)} \equiv \alpha F_{[r+3], p-2, \dots, p-1}^{(1,n)}$$

(c'est une manipulation simple en utilisant (23) et le Corollaire 8.3, qu'on laisse au lecteur). \square

Références

- [AB] K. Ardakov, K. A. Brown, *Ring theoretic properties of Iwasawa algebras : a survey*, Doc. Math., Extra Volume Coates (2006) 7-33.
- [Ba-Li] L. Barthel, R. Livné *Irreducible modular representation of \mathbf{GL}_2 of a local field*, Duke Math. J. 75 (1994), 261-292.
- [Ber10] L. Berger, *La correspondance de Langlands locale p -adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$* , Séminaire Bourbaki, Exp. numéro 1017 (2010).
- [Bos] S. Bosh, *Algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [Bou] *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre 9*, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [Bre1] C. Breuil, *Sur quelques représentations modulaire et p -adique de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ I*, Comp. Math. 138 (2003), 165-188.
- [Bre2] C. Breuil, *Sur quelques représentation modualire et p -adique de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ II*, J. de l'Inst. Math. de Jussieu 2 (2003), 1-36.
- [Bre10] C. Breuil, *Introduction Générale*, Astérisque 319 (2008), 1-12.
- [Bre12] C. Breuil, *Correspondance de Langlands p -adique, compatibilité local-global et applications'*, Séminaire Bourbaki 1031, Astérisque 348 (2012), 119-147.
- [BD] C. Breuil, F. Diamond, *Formes modulaires de Hilbert modulo p et valeurs d'extensions galoisiennes*, prépublication (2012)
- [BH] C. Breuil, F. Herzig *Ordinary Galois representations and fundamental algebraic representations*, prépublication (2012)
- [Br-Pa] C. Breuil, V. Paskunas, *Towards a mod p Langlands correspondence*, Memoirs of the AMS 216 (2012).
- [BDJ] K. Buzzard, F. Diamond, F. Jarvis, *On Serre's conjectures for mod ℓ Galois representations over totally real fields*, Duke Math. J. 155 (2010), 105-161.
- [Col] P. Colmez, *Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ) -modules*, Astérisque 330 (2010), 281-509

- [Dos] G. Dospinescu, *Actions infinitesimales dans la correspondance de Langlands locale p -adique* Math. Ann. 354 (2012), 627-657.
- [Eme] M. Emerton, *Local-global compatibility in the p -adic Langlands programme for \mathbf{GL}_2/\mathbf{Q}* , prépublication, disponible sur <http://www.math.uchicago.edu/emerton/pdffiles/lg.pdf>.
- [EH] M. Emerton, D. Helm, *The local Langlands correspondence for \mathbf{GL}_n in families* Annales de l'ENS, à paraître (2013).
- [Hel] D. Helm, *On the modified mod p local Langlands correspondence for $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_\ell)$* prépublication, disponible sur <http://www.ma.utexas.edu/users/dhelm/correspondence.pdf>.
- [Her1] F. Herzig, *The weight in a Serre-type conjecture for tame n -dimensional Galois representations*, Duke Math. J. 149 (2009), 37-116.
- [Her2] F. Herzig, *The classification of irreducible admissible mod p representations of a p -adic \mathbf{GL}_n* , Inv. Math. 186 (2011), 373-434.
- [Her3] F. Herzig, *A Satake isomorphism in characteristic p* , Comp. Math. 147 (2011), 263-283.
- [Ka-Sh] M. Kashiwara, P. Schapira *Categories and Sheaves*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 332, Springer-Verlag, Berlin (2006).
- [Jen] U. Jentzen, *Les foncteurs dérivés de \varprojlim et leurs applications en théorie des modules*, Lectures Notes in Mathematics 254, Springer-Verlag, Berlin (1972).
- [Laz] M. Lazard, *Groupes analytiques p -adiques*, Pub. Math de l'IHÉS 26 (1965).
- [Mo] S. Morra, *Explicit description of irreducible $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -representations over $\overline{\mathbf{F}}_p$* , J. of Algebra 339 (2011), 252-303.
- [Mo1] S. Morra, *Invariant elements for p -modular representations of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$* , Transaction of the Am. Math. Soc. , à paraître.
- [Mo2] S. Morra, *On some representations of the Iwahori subgroup*, J. of Number Theory 132 (2012), 1074-1150.
- [Mo3] S. Morra *Iwasawa modules with extra structures and p -modular representations of \mathbf{GL}_2* , prépublication (2012).
- [MS] S. Morra, B. Schraen, *En préparation*.
- [Nad] D. Nadimpalli, *Thèse de l'Université de Paris 11*, en préparation.
- [Oll] R. Ollivier, *An inverse Satake isomorphism in characteristic p* , prépublication (2012).
- [Sche] M. Schein, *Weights in Serre's conjectures for Hilbert modular forms : the ramified case*, Israel J. Math. 166 (2008), 369-391.
- [Schr] B. Schraen, *Sur la présentation des représentations supersingulières de $\mathbf{GL}_2(F)$* , prépublication, disponible sur <http://arxiv.org/pdf/1201.4255v2>
- [Ser87] J-P. Serre, *Sur les représentations modulaires de degré 2 de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$* , Duke Math. J. 54 (1987), 179-230.
- [Ser] J-P. Serre, *Corps Locaux*, (1968) Hermann, Paris
- [S-W] P. Symonds, T. Weigel, *Cohomology of p -adic analytic groups* New Horizons in pro- p groups, Du Sautoy, Segal, Shalev ed., Birkhäuser (2000), 349-416.

STEFANO MORRA • *E-mail* : smorra@math.toronto.edu, University of Toronto, Department of Mathematics, 40 St. George St, M5S 2E4 Toronto, Canada, & Laboratoire de Mathématiques de Montpellier, place Eugène Bataillon, Case courrier 051, 34095 Montpellier cedex 5, France
Url : <http://www.math.univ-montp2.fr/~morra/>