

# Espaces de Hurwitz et Structure de Frobenius

Etienne MANN

Septembre 2001

Mémoire de DEA préparé à  
l'UFR de mathématiques de Strasbourg

Sous la direction de Claude SABBAH



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Comment remonter une structure complexe ?</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Espaces de Hurwitz</b>	<b>10</b>
3.1	Définition et structure complexe d'un espace de Hurwitz . . . . .	10
3.2	Construction de la courbe universelle . . . . .	17
3.3	Construction locale du revêtement universel fibré de $\mathcal{C}_V^\circ$ . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Multi-formes abéliennes sur une surface de Riemann</b>	<b>22</b>
4.1	Définition d'une multi-forme . . . . .	22
4.2	Multi-formes abéliennes . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Structure de Frobenius locale sur un sous-espace de <math>H_{g,t}</math></b>	<b>27</b>
5.1	Définition des formes descendantes . . . . .	27
5.2	Définition de la structure de Frobenius locale sur $H_\omega$ . . . . .	28



# 1 Introduction

Au début des années 1990, B.Dubrovin explique, dans l'article [Dub93], le lien entre les solutions des WDVV équations (Witten-Dijkgraaf-E.Verlinde-H.Verlinde) et les variétés de Frobenius, notion apparue à la fin des années 1970. Dans ce même article, B.Dubrovin construit une structure de Frobenius sur les espaces de Hurwitz. Ces résultats ont été raffinés par Markus Rosellen dans l'article [Ros98].

Les espaces de Hurwitz, notés  $\mathbf{H}_{g,t}$ , sont des espaces de modules de fonctions méromorphes d'une surface de Riemann de genre  $g$  avec des pôles d'ordre  $n_0 + 1, \dots, n_M + 1$  et des points critiques simples sur  $\mathbb{C}$ .

Pour mon mémoire de DEA, j'ai étudié certains objets que Rosellen a introduits dans son article.

La première partie regroupe des résultats sur les revêtements qui seront utilisés dans la suite. Tout d'abord, on montre qu'on peut remonter de façon unique une structure complexe grâce à un revêtement topologique d'une variété complexe. Puis, sous de bonnes hypothèses, il existe un lien entre les revêtements, les revêtements ramifiés et une action transitive d'un groupe fondamental sur un ensemble fini.

Dans la deuxième partie, on définit de façon ensembliste les espaces de Hurwitz  $\mathbf{H}_{g,t}$ . Puis, grâce à un revêtement, on met une structure complexe sur  $\mathbf{H}_{g,t}$ . Ensuite, on construit une courbe "universelle"  $\mathcal{C}$  et un revêtement ramifié  $\Gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{H}_{g,t} \times \mathbb{CP}^1$ . Finalement, on construit, localement, un revêtement "universel fibré"  $\tilde{\mathcal{C}}_U$  de  $\mathbf{H}_{g,t_U} \times \mathbb{CP}^1$ .

Dans la troisième partie, on fixe une surface de Riemann de genre  $g$ . On définit le faisceau des 1-multi-formes abéliennes et on en donne une expression locale.

Dans la quatrième partie, on définit le faisceau des 1-formes descendantes et on donne, sans démonstration, la structure de Frobenius sur  $H_\omega \subset \mathbf{H}_{g,t}$ .

Je voudrais remercier :

- Michèle Audin, Yann Bugeaud, Thomas Delzant, Mihai Paun et Tilmann Wurzbacher pour leurs cours de DEA ;
- Olivier Debarre qui a organisé la semaine spéciale, ce qui m'a permis de découvrir le monde de la recherche ;
- Vincent Blanloeil et Sébastien Racanière qui par des discussions m'ont grandement aidé ;
- Claude Sabbah qui m'a consacré beaucoup de temps pour m'expliquer les différentes idées de cet article. De plus, ses précieuses corrections ont considérablement amélioré la rédaction de ce mémoire.



## 2 Comment remonter une structure complexe ?

**Proposition 2.1.** *Soient  $X$  une variété complexe connexe et  $(E, \lambda)$  un revêtement topologique à  $d$  feuillets de  $X$ . Alors il existe sur  $E$  une unique structure complexe telle que  $\lambda$  soit holomorphe, c'est-à-dire  $(E, \lambda)$  est un revêtement holomorphe.*

**Preuve :** – **Existence :**

La structure complexe de  $X$  est la donnée d'une classe d'équivalence d'atlas : soit  $(U_i, g_i)_{i \in I}$  un atlas qui définit la structure complexe de  $X$ . De plus, quitte à réduire les  $U_i$ , on peut supposer que chaque  $U_i$  est trivialisé par  $\lambda$ , c'est-à-dire pour  $i \in I$  on a  $\lambda^{-1}(U_i) = \coprod_{j=1}^d V_j^i$  où les  $V_j^i$  sont des ouverts disjoints homéomorphe à  $U_i$  via  $\lambda_j^i := \lambda|_{V_j^i}$ . Les applications  $g_j^i := g_i \circ \lambda_j^i$  de  $V_j^i$  dans  $\mathbb{C}$  sont des cartes sur  $E$ . De plus sur  $V_j^i \cap V_k^l$  on a :

$$g_j^i \circ g_k^l{}^{-1} = g_i \circ \lambda_j^i \circ \lambda_k^l{}^{-1} \circ g_l^{-1} = g_i \circ g_l^{-1}$$

car  $\lambda_j^i \circ \lambda_k^l{}^{-1} = \lambda \circ \lambda^{-1}|_{V_j^i \cap V_k^l} = id$ . Comme  $g_i \circ g_l^{-1}$  est biholomorphe, on a construit un atlas  $\mathcal{A}$  holomorphe sur  $E$ . On a alors remonté une structure complexe sur  $E$  et  $\lambda$  est holomorphe.

– **Unicité :**

Supposons que  $E$  soit muni d'une autre structure complexe, un atlas noté  $\mathcal{A}'$ , telle que  $\lambda$  soit une application revêtement holomorphe. Ainsi l'application  $\lambda$  est holomorphe pour deux structures différentes de  $E$ . On note  $\lambda_{\mathcal{A}}$  (resp.  $\lambda_{\mathcal{A}'}$ ) l'application  $\lambda$  de  $E$  sur  $X$  où  $E$  est muni de la structure complexe associée à l'atlas  $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{A}'$ ).

Ainsi on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (E, \mathcal{A}) & \xrightarrow{id} & (E, \mathcal{A}') \\ \lambda_{\mathcal{A}} \downarrow & \swarrow \lambda_{\mathcal{A}'} & \\ X & & \end{array}$$

Comme les applications  $\lambda_{\mathcal{A}}$  et  $\lambda_{\mathcal{A}'}$  sont des revêtements holomorphes, elles sont localement des biholomorphismes. Ainsi l'identité de  $(E, \mathcal{A})$  sur  $(E, \mathcal{A}')$  est un biholomorphisme et les deux atlas définissent la même structure complexe sur  $E$ . □

**Remarque 2.1.** Ainsi, quand on a un revêtement d'une variété complexe, on peut toujours supposer que le revêtement est holomorphe.

**Définition 2.1.** *Soient  $E$  et  $X$  deux surfaces de Riemann,  $(E, \lambda)$  est un **revêtement ramifié de degré  $d$**  de  $X$  si on a :*

1.  $\lambda$  est une application holomorphe surjective de  $E$  dans  $X$  ;
2. il existe un ensemble discret  $A \subset X$  tel que  $(E - \lambda^{-1}(A), \lambda)$  soit un revêtement de  $X - A$  de degré fini, noté  $d$  ;
3. pour tout  $a \in A$  et  $x_a \in \lambda^{-1}(a)$ , il existe un voisinage  $U_{x_a} \subset E$  de  $x_a$  tel que  $\lambda$ , vu dans les cartes, soit la fonction  $z \mapsto z^{e_{x_a}(\lambda)}$ , où  $z$  est la coordonnée complexe. On appelle **multiplicité** de  $x_a$ , l'entier  $e_{x_a}(\lambda)$ . On dit que  $a \in A$  est une valeur critique.

**Remarque 2.2.** 1. Le point  $x \in E$  est un point critique de  $\lambda$  si et seulement si  $e_x(\lambda) > 1$ .

On dit que  $a$  est une valeur critique **simple** si  $\#\lambda^{-1}(a) = d-1$ . Il existe alors un unique  $x_0 \in \lambda^{-1}(a)$  tel que  $e_{x_0}(\lambda) = 2$  et  $e_x(\lambda) = 1$  si  $x \in \lambda^{-1}(a) - \{x_0\}$ .

2. On a pour tout  $b \in B$ ,  $\sum_{x \in \lambda^{-1}(b)} e_x(\lambda) = d$ .

**Définition 2.2.** Soit  $X$  une surface topologique (resp. complexe). Deux revêtements topologiques (resp. holomorphes), ou deux revêtements ramifiés,  $f : Y \rightarrow X$  et  $g : Y' \rightarrow X$  sont **équivalents** s'il existe un homéomorphisme (resp. biholomorphisme)  $\varphi : Y \rightarrow Y'$  tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\varphi} & Y' \\ f \downarrow & \swarrow g & \\ X & & \end{array}$$

Le théorème ci-dessous répond par l'affirmative à la question suivante : peut-on prolonger un revêtement holomorphe défini sur  $X - A$ , où  $A$  est un ensemble discret, en un revêtement ramifié sur  $X$  ?

**Théorème 2.1.** [Ful69, p.544] Soient  $X$  une surface de Riemann connexe,  $A$  un sous ensemble discret de  $X$ ,  $d$  un entier positif et  $x$  un élément de  $X - A$ . Les ensembles suivants sont en correspondance bijective :

- (i) l'ensemble des classes d'équivalence des revêtements ramifiés holomorphes connexes à  $d$  feuillets de  $X$  où les valeurs critiques sont dans  $A$  ;
- (ii) l'ensemble des classes d'équivalence des revêtements holomorphes connexes à  $d$  feuillets de  $X - A$  ;
- (iii) le sous-ensemble de  $\text{Hom}(\pi_1(X - A, x), \mathfrak{S}_d)$  dont les éléments ont pour image un sous-groupe transitif de  $\mathfrak{S}_d$ .

**Preuve :** – On va montrer que les ensembles définis par (ii) et (iii) sont en bijection : la donnée d'un revêtement  $f$  induit une action du groupe fondamental  $\pi_1(X - A, x)$  sur  $f^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_d\}$ . En effet, si  $\gamma \in \pi_1(X - A, x)$ , on note  $\tilde{\gamma}_i$  le relevé de  $\gamma$  d'origine  $y_i$ , alors on note  $\gamma^*y_i$  l'extrémité de  $\tilde{\gamma}_i$ . On a bien défini une action de  $\pi_1(X - A, x)$  sur  $f^{-1}(x)$ . Cette action est transitive car le revêtement est connexe (cf. [God71, p. 122]).

Inversement, soit le morphisme  $\alpha : \pi_1(X - A, x) \longrightarrow \mathfrak{S}_d$ . On pose  $H_1 := \{g \in \pi_1(X - A, x) \mid \alpha(g) \text{ laisse fixe } 1\}$ ; alors  $H_1$  est un sous-groupe de  $\pi_1(X - A, x)$ . Comme  $Im(\alpha)$  est un sous-groupe transitif de  $\mathfrak{S}_d$ , alors pour tout  $i \in \{2, \dots, d\}$  il existe  $g_i \in \pi_1(X - A, x)$  tel que  $\alpha(g_i)(1) = i$ . De plus  $H_i := \alpha(g_i)H_1\alpha(g_i^{-1})$  est le sous-groupe de  $\pi_1(X - A, x)$  qui laisse fixe  $i$ . Ainsi  $H_1$  est un sous-groupe d'indice  $d$  de  $\pi_1(X - A, x)$  en d'autres termes on peut lui associer un revêtement topologique connexe  $(E, \lambda)$  à  $d$  feuillets. Puis, d'après la proposition 2.1, on munit  $E$  d'une unique structure complexe telle que  $\lambda$  soit un revêtement holomorphe.

- D'après la définition 2.1, on a une application oubli, noté *oub*, de l'ensemble des revêtements ramifiés de  $X$  où les points critiques sont dans  $A$  dans l'ensemble des revêtements de  $X - A$ . Supposons qu'on ait deux revêtements ramifiés  $\lambda_1 : Y_1 \longrightarrow X$  et  $\lambda_2 : Y_2 \longrightarrow X$  équivalents, c'est-à-dire qu'il existe un biholomorphisme  $\varphi : Y_1 \longrightarrow Y_2$  tel que  $\lambda_1 = \lambda_2 \circ \varphi$ . Alors les applications  $\lambda_1 : Y_1 - \{\lambda_1^{-1}(A)\} \longrightarrow X - A$  et  $\lambda_2 : Y_2 - \{\lambda_2^{-1}(A)\} \longrightarrow X - A$  sont des revêtements. Et ils sont équivalents car  $\varphi : Y_1 - \{\lambda_1^{-1}(A)\} \longrightarrow Y_2 - \{\lambda_2^{-1}(A)\}$  est encore un biholomorphisme qui vérifie  $\lambda_1 = \lambda_2 \circ \varphi$ . Ainsi l'application *oub* passe au quotient, et on a bien une application, noté encore *oub*, de l'ensemble défini par (i) dans celui défini par (ii).

Pour montrer la bijectivité de *oub*, on va construire son application inverse. Supposons qu'on ait un revêtement connexe  $\lambda : Y^\circ \longrightarrow X - A$ . Il faut voir comment on complète  $Y^\circ$  en un revêtement ramifié de  $X$ .

Comme il n'y a qu'un seul modèle de revêtement connexe du disque épointé : le modèle cyclique, on va recoller ce modèle aux points de  $A$ .

Soit  $a \in A$  et  $U_a$  un ouvert de  $X$  provenant, par une carte  $g_a$ , d'un disque  $D_a$  de  $\mathbb{C}$  tel que  $U_a \cap A = \{a\}$ . On note  $U_a^\circ = U_a - \{a\}$ . L'ensemble  $\lambda^{-1}(U_a^\circ)$  est une réunion disjointe d'ouverts connexes, notons les  $V_1^\circ, \dots, V_k^\circ$ . Et pour chaque  $V_i^\circ$ , l'application  $g_a \circ \lambda|_{V_i^\circ} : V_i^\circ \longrightarrow D_a^\circ$  est un revêtement. Or les revêtements connexes de  $D_a^\circ$  sont de la forme  $D^\circ \longrightarrow D_a^\circ, z \longmapsto z^k$  où  $D^\circ$  est un disque épointé. Ainsi, pour  $i = 1, \dots, k$ , le revêtement  $g_a \circ \lambda|_{V_i^\circ}$  est équivalent au revêtement  $\pi_i : D_i^\circ \longrightarrow D_a^\circ$  qui à  $z$  associe  $z^{e(i)}$ , où  $D_i^\circ$  est un disque épointé; c'est à dire, il existe un biholomorphisme  $\varphi_i^\circ$  de  $V_i^\circ$  sur  $D_i^\circ$  tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V_i^\circ & \xrightarrow{\varphi_i^\circ} & D_i^\circ \\ g_a \circ \lambda|_{V_i^\circ} \downarrow & \swarrow \pi_i & \\ D_a^\circ & & \end{array}$$

On va préciser l'indice  $e(i)$  : au revêtement  $\lambda$  correspond, d'après (iii), un morphisme  $\phi_\lambda$  de  $\pi_1(U_a^\circ, x) \sim \mathbb{Z}$  dans  $\mathfrak{S}_d$ . On considère alors un lacet  $\gamma$  qui engendre  $\pi_1(U_a^\circ, x)$ . Puis on décompose  $\phi_\lambda(\gamma)$  en produit de cycles, il y en a  $k$  (autant que de composantes connexes de  $\lambda^{-1}(U_a^\circ)$ ), et  $e(i)$  est la longueur

du cycle qui correspond à  $V_i^\circ$ .

On définit la relation d'équivalence suivante :  $x \sim y$  si et seulement si  $x \in V_i^\circ$ ,  $y \in D_i$  et  $\varphi_i^\circ(x) = y$ . L'application  $(\varphi_i^\circ, Id) : V_i^\circ \amalg D_i \longrightarrow D_i$  passe au quotient par cette relation d'équivalence. On note  $\varphi_i$  l'application quotient de  $V_i := (V_i^\circ \amalg D_i) / \sim$  sur  $D_i$ . Et  $\varphi_i$  est clairement un homéomorphisme. Puis, on met une structure complexe sur  $V_i$ ; elle coïncide avec celle sur  $V_i^\circ$  c'est-à-dire  $\varphi_i$  est un biholomorphisme.

Ensuite, si pour chaque  $i = 1, \dots, k$  on complète  $V_i^\circ$  en  $V_i$ , on a construit  $(Y, \tilde{\lambda})$  un revêtement ramifié de  $X$ .

Supposons que  $(Y_1^\circ, \lambda_1)$  et  $(Y_2^\circ, \lambda_2)$  soient deux revêtements équivalents de  $X - A$  via le biholomorphisme  $\varphi^\circ : Y_1^\circ \longrightarrow Y_2^\circ$ , alors on complète ces deux revêtements en des revêtements ramifiés  $Y_1$  et  $Y_2$  de  $X$ . Soit  $a \in A$  et  $U_a$  un petit voisinage de  $a$  dans  $X$ . Soit  $y_1 \in Y_1$  tel que  $\lambda_1(y_1) = a$ . Localement, autour de  $y_1$ , l'application  $\varphi^\circ$  s'écrit dans les cartes comme une application holomorphe de  $U_a - \{a\}$  dans lui même. Donc on peut prolonger cette application de manière unique en une application holomorphe de  $U_a$  dans lui même, c'est-à-dire qu'on a prolonger  $\varphi^\circ$  en un biholomorphisme de  $Y_1$  sur  $Y_2$ .

Finalement, la complétion d'un revêtement de  $X - A$  en un revêtement ramifié de  $X$  est clairement l'application réciproque de *oub*.

□

**Proposition 2.2.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux surfaces de Riemann compactes où  $X$  est connexe. Soit  $\lambda$  une application holomorphe de  $Y$  dans  $X$ . Alors  $\lambda$  est surjective. De plus  $\lambda$  est un revêtement ramifié, plus précisément  $\lambda$  est ramifiée en ses points critiques.*

**Preuve :** Comme  $Y$  est compacte et  $\lambda$  est continue alors  $\lambda(Y)$  est compact donc fermé dans  $X$ .

De plus comme  $\lambda$  est holomorphe, alors  $\lambda$  est ouverte donc  $\lambda(Y)$  est ouvert. Ainsi par connexité de  $X$ ,  $\lambda$  est surjective.

On note  $\lambda'$  la différentielle de  $\lambda$  vu dans les cartes. Soit  $A := \{x \in X \mid \exists y \in \lambda^{-1}(x) \text{ tel que } \lambda'(y) = 0\}$ . Comme  $\lambda'$  est une fonction holomorphe,  $A$  est un ensemble discret. De plus  $X$  est compacte donc  $A$  est un ensemble fini.

D'abord, on va montrer que pour tout  $x \in X - A$  le cardinal de  $\lambda^{-1}(x)$ , noté  $n(x)$ , est localement constant.

Soient  $x_0 \in X - A$  et  $\{y_1, \dots, y_{n(x_0)}\} = \lambda^{-1}(x_0)$ . Comme en chaque  $y_i$ , on peut appliquer le théorème d'inversion locale, il existe un ouvert connexe  $U_{x_0}$  de  $X - A$  contenant  $x_0$  et des ouverts disjoints  $V_i$  de  $Y - \{\lambda^{-1}(A)\}$  contenant  $y_i$  tels que  $\lambda$  est un biholomorphisme de  $V_i$  sur  $U_{x_0}$ . Ainsi, pour tout  $x \in U_{x_0}$  on a  $n(x) \geq n(x_0)$ . Soit  $E(n(x_0)) := \{x \in U_{x_0} \text{ tel que } n(x) = n(x_0)\}$ . Comme la fonction  $x \longmapsto n(x)$  est localement croissante, le complémentaire de  $E(n(x_0))$  dans  $U_{x_0}$  est un ouvert, c'est-à-dire  $E(n(x_0))$  est fermé. Supposons que  $E(n(x_0))$  ne soit pas un ouvert, alors il existe  $x \in E(n(x_0))$  et une suite  $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$  dans

$X - A$  telle que  $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x$ . On construit une suite  $(y_p)_{p \in \mathbb{N}}$  dans  $Y - \{\lambda^{-1}(A)\}$  telle que  $y_p \in \lambda^{-1}(x_p)$  et  $y_p \notin \amalg V_i$ . Soit  $y$  un point d'accumulation de la suite  $(y_p)_{p \in \mathbb{N}}$ . On a  $\lambda(y) = x$  et  $y \notin \amalg V_i$ , ce qui est absurde. Ainsi,  $E(n(x_0))$  est ouvert et fermé dans  $U_{x_0}$ , donc par connexité de  $U_{x_0}$ ,  $E(n(x_0)) = U_{x_0}$ , c'est-à-dire le cardinal de  $\lambda^{-1}(x)$  est localement constant pour tout  $x \in X - A$ . En d'autres termes,  $\lambda^{-1}(U_{x_0}) = V_1 \amalg \dots \amalg V_{n(x_0)}$ .

Finalement,  $\lambda$  est localement trivialisable sur un recouvrement convenable de  $X - A$ , c'est-à-dire  $\lambda : Y - \{\lambda^{-1}(A)\} \rightarrow X - A$  est un revêtement.

De plus, au voisinage d'un point de  $\lambda^{-1}(A)$ ,  $\lambda$  s'écrit, via des cartes,  $\lambda(z) = z^k$  où  $k$  est le plus petit indice tel que  $\lambda^{(k)}(0) \neq 0$ .  $\square$

**Remarque 2.3.** Cette proposition permet de voir les fonctions holomorphes comme des revêtements ramifiés. Ainsi, se donner une fonction holomorphe sur une surface de Riemann compacte et connexe revient à se donner un revêtement ramifié.

## 3 Espaces de Hurwitz

### 3.1 Définition et structure complexe d'un espace de Hurwitz

On va construire l'espace de Hurwitz  $\mathbf{H}_{g,t}$  qui est un revêtement d'une variété complexe ; ainsi on pourra munir  $\mathbf{H}_{g,t}$  d'une structure complexe en utilisant les résultats du paragraphe 2.

**Définition 3.1.** Soient  $g$  et  $M$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $t = (n_0, \dots, n_M) \in \mathbb{N}^{M+1}$  et  $d := \sum_{j=0}^M (n_j + 1)$ .

On fixe le point à l'infini sur  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ .

- (i) Un revêtement ramifié  $\lambda : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  est **de type**  $t$  si les pôles de  $\lambda$  sont d'ordres  $n_0 + 1, \dots, n_M + 1$ .
- (ii) **L'espace de Hurwitz**, noté  $\mathbf{H}_{g,t}$ , est le quotient ensembliste de l'ensemble des revêtements ramifiés de type  $t$  à valeurs critiques simples sur  $\mathbb{C}$  par la relation d'équivalence de la définition 2.2. On note  $[\lambda]$  les classes dans  $\mathbf{H}_{g,t}$ .
- (iii) Un revêtement ramifié **marqué** de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  est un couple  $(\lambda, Q)$  où  $\lambda : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  est un revêtement ramifié et  $Q \in \lambda^{-1}(\infty)$ .
- (iv) **L'espace de Hurwitz marqué**, noté  $\mathbf{H}'_{g,t}$ , est le quotient ensembliste de l'ensemble des revêtements ramifiés marqués  $(\lambda, Q)$  de type  $t$ , où  $Q$  est un pôle de  $\lambda$  d'ordre  $n_0 + 1$ , à points critiques simples sur  $\mathbb{C}$  par la relation d'équivalence :  $(\lambda, Q) \sim (\lambda', Q')$  si et seulement s'il existe un biholomorphisme  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}'$  qui envoie  $Q$  sur  $Q'$  tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
C & \xrightarrow{\varphi} & C' \\
\lambda \downarrow & \searrow \lambda' & \\
\mathbb{CP}^1 & & 
\end{array}$$

On note  $\bar{\lambda}$  les classes dans  $\mathbf{H}'_{g,t}$ .

On note  $C(\lambda)$ , la courbe associée au revêtement  $\lambda : C(\lambda) \rightarrow \mathbb{CP}^1$ .

**Remarque 3.1.** 1. Le nombre de points critiques de  $\lambda$ , compté avec multiplicité, est  $b := 2(g + d) - 2$ .

En effet la fonction  $\lambda : C \rightarrow \mathbb{CP}^1$  est un revêtement ramifié de degré  $d$ . Puis la formule de Riemann-Hurwitz (voir [Mir91, p.52]) donne

$$2g - 2 = -2d + \sum_{p \in C} (e_p(\lambda) - 1) = -2d + b$$

d'où  $b = 2(g + d) - 2$ .

2. Soient  $P_n(\lambda) \in C(\lambda)$  les points critiques simples de  $\lambda$ . Ainsi les valeurs critiques, notées  $u_n(\lambda) := \lambda(P_n) \in \mathbb{C}$ , sont distinctes et il y en a exactement  $N := b - \sum n_i$ .

En effet on a :

$$b = \sum_{p \in C} (e_p(\lambda) - 1) = \sum_{i=0}^M (e_{Q_i}(\lambda) - 1) + N.$$

De plus si  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont équivalents au sens de la définition 2.2 alors pour  $i = 1, \dots, N$ , on a  $u_i(\lambda) = \lambda(P_i) = \lambda' \circ \varphi(P_i)$ , où  $\varphi$  est un biholomorphisme de  $C(\lambda)$  sur  $C(\lambda')$ . Comme  $\varphi(P_i)$  est un point critique de  $\lambda'$  qui n'est pas un pôle pour  $\lambda'$ , il existe  $j \in \{1, \dots, N\}$  tel que  $u_i(\lambda) = u_j(\lambda')$ . Ainsi les valeurs critiques ne dépendent que de la classe de  $\lambda$  dans  $\mathbf{H}_{g,t}$ . On les notes  $\{u_1([\lambda]), \dots, u_N([\lambda])\}$ .

On peut alors définir l'application  $\Pi$  suivante :

$$\begin{array}{ccc}
\Pi & : & \mathbf{H}_{g,t} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}^N} \\
& & [\lambda] \longmapsto \{u_1([\lambda]), \dots, u_N([\lambda])\}
\end{array}$$

avec  $\widehat{\mathbb{C}^N} := (\mathbb{C}^N - D)/\mathfrak{S}_N$  où  $D$  est la réunion des hyperplans diagonaux d'équation  $u_i = u_j$  pour  $i \neq j$ , et  $\mathfrak{S}_N$  agit par permutation des coordonnées sur  $\mathbb{C}^N$ .

3. Soient  $\lambda \sim \lambda'$ , c'est-à-dire il existe un biholomorphisme, noté  $\varphi$ , de  $C(\lambda)$  sur  $C(\lambda')$ . On note  $P_1(\lambda), \dots, P_N(\lambda)$  (resp.  $P_1(\lambda'), \dots, P_N(\lambda')$ ) les points critiques de  $\lambda$  (resp.  $\lambda'$ ). Comme les valeurs critiques ne dépendent que de

la classe de  $\lambda$ ,  $\varphi$  envoie les fibres des valeurs critiques sur elles-mêmes. De plus, les valeurs critiques sont simples, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'un seul point critique par fibre. Ainsi, pour  $i = 1, \dots, N$ ,  $\varphi(P_i(\lambda)) = P_i(\lambda')$ . On note  $P_i([\lambda])$  les points critiques de  $[\lambda]$ .

**Proposition 3.1 (Exemple).** [Dub93, p. 298] Soient  $g = 0$ ,  $M = 0$  et  $n_0 = N$ . L'espace de Hurwitz  $\mathbf{H}_{0,N}$  s'identifie à l'ensemble  $E$  des polynômes  $\lambda$  de la forme :

$$\lambda(p) := p^{N+1} + a_{N-1}p^{N-1} + \dots + a_1p + a_0 \text{ avec } a_i \in \mathbb{C}$$

tels que  $\lambda(\lambda'^{-1}(0))$  soit un ensemble à  $N$  éléments distincts.

**Remarque 3.2.** Comme la dimension de l'espace de Hurwitz est  $N$ , il est normal d'avoir le choix sur  $N$  coefficients.

**Preuve : Existence :** Soit  $\lambda \in [\lambda]$  où  $[\lambda]$  est un élément de  $\mathbf{H}_{0,N}$ . Puisque toute surface de Riemann compacte connexe de genre 0 est biholomorphe à  $\mathbb{CP}^1$ , on peut supposer que  $\lambda$  est une fonction méromorphe sur  $\mathbb{CP}^1$ . Par hypothèse,  $\lambda$  a un pôle, noté  $Q$ , d'ordre  $N + 1$ . Soit  $h$  une homographie qui envoie  $Q$  sur l'infini. Ainsi on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{CP}^1 & \xrightarrow{h} & \mathbb{CP}^1 \\ \lambda \downarrow & \swarrow \lambda_1 & \\ \mathbb{CP}^1 & & \end{array}$$

Et  $\lambda_1$  appartient à  $[\lambda]$  avec un pôle d'ordre  $N + 1$  à l'infini. Comme les fonctions méromorphes sur  $\mathbb{CP}^1$  sont les fractions rationnelles,  $\lambda_1$  s'écrit :

$$\lambda_1(p) = c_{N+1}p^{N+1} + c_Np^N + \dots + c_0 \text{ avec } c_i \in \mathbb{C} \text{ et } c_{N+1} \neq 0.$$

Puis en considérant l'homographie  $h(p) = p/c$  où  $c$  est une racine  $N + 1$  ième de  $c_{N+1}$ ,  $\lambda_1$  est équivalente à une fonction du type :

$$\lambda_2(p) = p^{N+1} + b_Np^N + \dots + b_0 \text{ avec } b_i \in \mathbb{C}.$$

Finalement, la fonction  $p \mapsto \lambda_2(p - \frac{b_N}{N})$  est encore dans  $[\lambda]$  et elle est de la forme :

$$\begin{aligned} \lambda_2(p - \frac{b_N}{N}) &= \left(p - \frac{b_N}{N}\right)^{N+1} + b_N \left(p - \frac{b_N}{N}\right)^N + \dots + b_0 \\ &= p^{N+1} + p^N \left(b_N - \frac{Nb_N}{N}\right) + \dots + a_0 \\ &= p^{N+1} + a_{N-1}p^{N-1} + \dots + a_0. \end{aligned}$$

En conclusion, chaque  $[\lambda] \in \mathbf{H}_{0,N}$  a un représentant qui est de la forme  $p^{N+1} + a_{N-1}p^{N-1} + \dots + a_0$  avec  $a_i \in \mathbb{C}$ .

**Unicité :** Supposons qu'étant donné une classe de l'espace de Hurwitz on ait deux représentants  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de la forme :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= p^{N+1} + a_{N-1}p^{N-1} + \dots + a_0 \\ \lambda_2 &= p^{N+1} + b_{N-1}p^{N-1} + \dots + b_0. \end{aligned}$$

Puisque les biholomorphismes de  $\mathbb{CP}^1$  sont les homographies, il existe une homographie  $h$  telle que  $\lambda_1 = \lambda_2 \circ h$ . Comme  $h$  envoie le pôle de  $\lambda_1$  sur celui de  $\lambda_2$ ,  $h$  préserve l'infini c'est-à-dire  $h$  est de la forme :  $h(p) = ap + b$  avec  $a, b \in \mathbb{C}$ . Le coefficient dominant de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  impose  $a = 1$  et le fait que  $a_N = b_N = 0$  impose  $b = 0$  c'est-à-dire  $h = id$  et donc  $\lambda_1 = \lambda_2$ .  $\square$

**Proposition 3.2 (Exemple).** [Dub93, p. 298] Soient  $g = 0$  et  $n_0 = \dots = n_M = 0$ . L'espace de Hurwitz  $\mathbf{H}'_{0,(0,\dots,0)}$  s'identifie à l'ensemble des fractions rationnelles de la forme :

$$p + \sum_{i=1}^M \frac{r_i}{p - Q_i} \text{ avec } r_i, Q_i \in \mathbb{C} \text{ et } Q_i \neq Q_j \text{ si } i \neq j.$$

**Preuve : Existence :**

Soit  $(\lambda, Q) \in \bar{\lambda}$ . Les pôles de  $\lambda$  sont  $Q, Q_1, \dots, Q_M$ . On envoie  $Q$  à l'infini en composant à droite par une homographie  $h$ . Ainsi  $(\lambda_1 := \lambda \circ h, \infty) \in \bar{\lambda}$  et  $\lambda_1$  est de la forme :

$$\lambda_1 = r_0 p + C_0 + \sum_{i=1}^M \frac{r'_i}{p - Q'_i} \text{ où } C_0, r'_i, Q'_i \in \mathbb{C} \text{ et } r_0 \neq 0.$$

Puis, on note  $\lambda_0$  la fonction  $p \mapsto \lambda_1(\frac{p-C_0}{r_0})$ . On a alors  $(\lambda_0, \infty) \in \bar{\lambda}$  et  $\lambda_0$  est de la forme :

$$\lambda_0(p) = p + \sum_{i=1}^M \frac{r''_i}{p - Q''_i} \text{ où } r''_i, Q''_i \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

**Unicité :**

Soit  $(\lambda', Q') \sim (\lambda, Q)$  c'est-à-dire il existe une homographie  $h$  de  $\mathbb{CP}^1$  dans  $\mathbb{CP}^1$  qui envoie  $Q$  sur  $Q'$  telle que  $\lambda = \lambda' \circ h$ . Il reste à montrer que  $\lambda'_0 = \lambda_0$ .

Quitte à renuméroter les pôles  $\lambda'$ , on peut supposer que  $h(Q_i) = Q'_i$  pour  $i = 1, \dots, N$ . Puis comme précédemment, on considère  $(\lambda_0, \infty) \in \bar{\lambda}$  et  $(\lambda'_0, \infty) \in \bar{\lambda}'$  de la forme (1), ainsi on a la diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{CP}^1 & \xrightarrow{h_0} & \mathbb{CP}^1 & \xrightarrow{h} & \mathbb{CP}^1 & \xrightarrow{h_0^{-1}} & \mathbb{CP}^1 \\ & \searrow \lambda_0 & \downarrow \lambda & \nearrow \lambda' & \swarrow \lambda'_0 & & \\ & & \mathbb{CP}^1 & & & & \end{array}$$

où

$$\begin{aligned} \lambda_0(p) &= p + \sum_{i=1}^N \frac{r_i}{p - Q_i} \\ \lambda'_0(p) &= p + \sum_{i=1}^N \frac{r'_i}{p - Q'_i}. \end{aligned}$$

On pose  $H := h_0^{-1} \circ h \circ h_0$  et  $H$  vérifie  $\lambda_0 = \lambda'_0 \circ H$ . On en déduit que  $H$  préserve l'infini c'est-à-dire  $H$  est de la forme  $ap + b$ . Puis, d'après la forme de  $\lambda'_0$  et  $\lambda_0$  on a  $a = 1$  et  $b = 0$ . Ce qui impose  $Q_i = Q'_i$  et  $r_i = r'_i$ .

On conclut que  $\mathbf{H}'_{0,(0,\dots,0)}$  s'identifie à l'ensemble des fractions rationnelles de la forme (1).  $\square$

**Remarque 3.3.** L'espace  $\mathbf{H}'_{0,(0,\dots,0)}$  s'identifie à  $(\mathbb{C}^N \times (\mathbb{C}^N - D)) / \mathfrak{S}_N$  où  $D$  est la réunion des hyperplans diagonaux et  $(\underline{r}, \underline{Q}) \sim (\underline{r}', \underline{Q}')$  si et seulement s'il existe  $\sigma \in \mathfrak{S}_N$  tel que  $\sigma \cdot \underline{r} = \underline{r}'$  et  $\sigma \cdot \underline{Q} = \underline{Q}'$ . A l'élément  $\bar{\lambda} \in \mathbf{H}'_{0,(0,\dots,0)}$ , on associe  $(\underline{r}(\bar{\lambda}), \underline{Q}(\bar{\lambda})) := (\{r_1(\bar{\lambda}), \dots, r_N(\bar{\lambda})\}, \{Q_1(\bar{\lambda}), \dots, Q_N(\bar{\lambda})\})$ .

**Théorème 3.1.** *L'ensemble  $\mathbf{H}_{g,t}$  est naturellement muni d'une structure complexe telle que  $\Pi : \mathbf{H}_{g,t} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}^N}$  soit un revêtement holomorphe.*

**Preuve :** On va mettre une topologie sur  $\mathbf{H}_{g,t}$  pour laquelle  $\Pi$  est une application de revêtement. D'après la proposition 2.1 p.6, ceci permet de munir  $\mathbf{H}_{g,t}$  d'une structure complexe pour laquelle  $\Pi$  est holomorphe.

Pour munir  $\mathbf{H}_{g,t}$  d'une topologie et pour montrer que  $\Pi$  est un revêtement il est nécessaire de trivialisier l'application  $\Pi$  sur tout ouvert d'un recouvrement convenable de  $\widehat{\mathbb{C}^N}$ .

Soient  $B := \{u_1, \dots, u_N\} \in \Pi(\mathbf{H}_{g,t})$  et  $\Delta_i \subset \mathbb{C}$  des petits disques autour des  $u_i$  choisis de sorte que  $\Delta := (\Delta_1 \times \dots \times \Delta_N) / \mathfrak{S}_N$  soit inclus dans  $\widehat{\mathbb{C}^N}$ . On fixe  $u_0 \in \mathbb{C} - S$ , où  $S := \cup \Delta_i \subset \mathbb{C}$ .

Soit  $[\lambda] \in \Pi^{-1}(\Delta)$ , c'est-à-dire  $[\lambda]$  est une classe de revêtement ramifié de valeurs critiques  $\{u_1([\lambda]), \dots, u_N([\lambda])\} \subset S$ . On a :

$$(\mathbb{C} - \{u_1([\lambda]), \dots, u_N([\lambda])\}) \xleftarrow{i} (\mathbb{C} - S) \xrightarrow{j} (\mathbb{C} - B)$$

où  $i$  et  $j$  sont les inclusions canoniques. On en déduit des isomorphismes canoniques  $i_\star$  et  $j_\star$  :

$$\pi_1(\mathbb{C} - \{u_1([\lambda]), \dots, u_N([\lambda])\}, u_0) \xleftarrow{i_\star \sim} \pi_1(\mathbb{C} - S, u_0) \xrightarrow{j_\star \sim} \pi_1(\mathbb{C} - B, u_0)$$

D'après le théorème 2.1 p.7, la donnée de  $[\lambda]$  est équivalente à la donnée d'un morphisme de  $\pi_1(\mathbb{C} - \{u_1([\lambda]), \dots, u_N([\lambda])\}, u_0)$  dans  $\mathfrak{S}_N$ , car ce morphisme ne dépend que de la classe de  $[\lambda]$ . Comme  $i_\star \circ j_\star^{-1}$  est un isomorphisme canonique de  $\pi_1(\mathbb{C} - B, u_0)$  sur  $\pi_1(\mathbb{C} - \{u_1([\lambda]), \dots, u_N([\lambda])\}, u_0)$ , on en déduit un morphisme de  $\pi_1(\mathbb{C} - B, u_0)$  dans  $\mathfrak{S}_N$ . Soit  $[\mu]$  la classe du revêtement ramifié associé à cette action. On pose  $\beta_\Delta([\lambda]) := ([\mu], \Pi([\lambda])) \in \Pi^{-1}(B) \times \Delta$ .

On va montrer que  $\beta_\Delta : \Pi^{-1}(\Delta) \rightarrow \Pi^{-1}(B) \times \Delta$  est une bijection. Soit  $([\mu], \{v_1, \dots, v_N\}) \in \Pi^{-1}(B) \times \Delta$  où  $[\mu]$  a ses valeurs critiques en  $B$ . Comme précédemment,  $[\mu]$  définit un morphisme de  $\pi_1(\mathbb{C} - B, u_0)$  vers  $\mathfrak{S}_N$  et  $\pi_1(\mathbb{C} - B, u_0)$  est canoniquement isomorphe à  $\pi_1(\mathbb{C} - \{v_1, \dots, v_N\}, u_0)$ . On en déduit alors un morphisme de  $\pi_1(\mathbb{C} - \{v_1, \dots, v_N\}, u_0)$  dans  $\mathfrak{S}_N$ , c'est-à-dire une classe de revêtement ramifié  $[\lambda] \in \Pi^{-1}(\Delta)$ . On pose  $\alpha([\mu], \{v_1, \dots, v_N\}) := [\lambda]$  et il est clair que  $\alpha = \beta_\Delta^{-1}$ .

On va définir une topologie sur  $\mathbf{H}_{g,t}$ . Pour chaque  $\{u_1, \dots, u_N\} \in \widehat{\mathbb{C}^N}$ , on construit un ouvert du type  $\Delta$ , et soit  $\mathcal{U}$  la famille des tels ouverts. Pour  $U \in \mathcal{U}$ ,

on a trivialisé  $\Pi$  au dessus de  $U$ , c'est-à-dire  $\beta_U$  réalise une bijection de  $\Pi^{-1}(U)$  sur  $\Pi^{-1}(B) \times U$ . On prend comme ouverts élémentaires les ensembles  $\beta_U^{-1}(\{[\mu]\} \times U)$  où  $\Pi(\mu) = B$ . Sur  $\mathbf{H}_{g,t}$ , on met la topologie engendrée par ces ouverts.

Pour cette topologie, soit  $U$  un ouvert du type  $\Delta$ . On va montrer que  $\beta_U$  est un homéomorphisme. Soit  $V$  un ouvert du type  $\Delta$ . Alors, par définition de la topologie, l'ensemble  $\beta_V^{-1}(V) = \bigcup_{[\mu] \mid \Pi([\mu])=B} \beta_V^{-1}(\{[\mu]\} \times V)$  est un ouvert. Comme les bijections du type  $\beta_\Delta$  sont canoniques alors si  $V \subset U$ , on a  $\beta_V = \beta_U|_V$ . Pour vérifier, la continuité, il suffit de le faire pour des ouverts élémentaires, et  $\beta_U^{-1}(V) = \beta_V^{-1}(V)$  qui est ouvert. Donc  $\beta_U$  est continue et le même raisonnement montre que  $\beta_U^{-1}$  est continue.

Cette topologie rend aussi  $\Pi$  continue. En effet, soit  $U$  un ouvert du type  $\Delta$ . Alors  $\Pi^{-1}(U) = \bigcup_{[\mu] \mid \Pi([\mu])=B} \beta_V^{-1}(\{[\mu]\} \times V)$  est un ouvert par définition de la topologie.

Finalement, cette topologie rend  $\Pi$  continue, donc  $\Pi$  est un revêtement.  $\square$

**Définition 3.2.** *D'après le théorème précédent,  $(u_1, \dots, u_N)$  est un système de coordonnées sur  $\mathbf{H}_{g,t}$ . On définit, sur l'espace tangent, le produit suivant :*

$$e_n \circ e_m := \delta_{nm} e_n \text{ où } e_n := \frac{\partial}{\partial u_n}$$

**Remarque 3.4.** Pour cette loi, le neutre est  $e := \sum e_n$ .

**Proposition 3.3 (Exemple).** *Soient  $g = 0, M = 0$  et  $n_0 = N$ . L'espace de Hurwitz  $\mathbf{H}_{0,N}$  est biholomorphe à un ouvert de  $\mathbb{C}^N$  muni de la structure complexe standard.*

**Preuve :** En gardant les notations de la proposition 3.1,  $E$  est biholomorphe à un ouvert  $\mathbb{C}^N$  muni de sa structure complexe standard. Ainsi  $E$  est muni d'une structure complexe d'atlas  $\mathcal{A}'$ .

Soit  $r$  l'application de  $E$  dans  $\widehat{\mathbb{C}^N}$  qui à un polynôme  $P$  associe l'ensemble  $\{P(r_i), i = 1, \dots, N\}$ , où  $r_i$  sont les racines du polynôme dérivé de  $P$ .

On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i} & \mathbf{H}_{0,N} \\ r \downarrow & \swarrow \Pi & \\ \widehat{\mathbb{C}^N} & & \end{array}$$

où  $i$  est la bijection ensembliste de la proposition 3.1.

Comme l'application qui à un polynôme associe son polynôme dérivé et l'application qui à un polynôme associe ses racines sont holomorphes alors  $r$  est holomorphe.

Soit un ouvert qui engendre la topologie de  $\mathbf{H}_{0,N}$ . Il est biholomorphe à  $\{[\lambda]\} \times U$  d'après la preuve du théorème 3.1. Comme  $i$  est une bijection, on trivialise  $i$  sur  $\{[\lambda]\} \times U$ . On peut alors munir  $E$  d'une structure complexe d'atlas  $\mathcal{A}$ .

Il faut montrer que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  sont deux atlas équivalents. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (E, \mathcal{A}') & \xrightarrow{id_E} & (E, \mathcal{A}) \\ r \downarrow & & \downarrow \Pi \circ i \\ \widehat{\mathbb{C}^N} & \xrightarrow{id_{\widehat{\mathbb{C}^N}}} & \widehat{\mathbb{C}^N} \end{array}$$

Localement dans  $E$ ,  $\Pi \circ i$  est un biholomorphisme car c'est un revêtement. Ainsi  $id_E$  est bien holomorphe. De plus elle est injective et de dérivée partout non nulle et donc biholomorphe par le théorème d'inversion globale.  $\square$

**Proposition 3.4 (Exemple).** *Soient  $g = 0$  et  $n_0 = \dots = n_M = 0$ . L'espace  $\mathbf{H}'_{0,(0,\dots,0)}$  est naturellement muni d'une topologie telle que l'application  $\phi$  de  $\mathbf{H}'_{0,(0,\dots,0)}$  dans  $\mathbf{H}_{0,(0,\dots,0)}$  définie par  $\phi(\bar{\lambda}) = [\lambda]$ , soit un revêtement.*

*Preuve :* Comme  $g = 0$ , on peut fixer la courbe  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  marquée avec le point  $\infty$ .

Tout d'abord l'application  $\phi$  est bien définie car si  $(\lambda, \infty) \sim (\lambda', \infty)$  alors  $\lambda \sim \lambda'$ .

Comme dans la preuve du théorème 3.1, on va trivialiser  $\phi$  puis mettre une topologie telle que  $\phi$  soit un revêtement holomorphe.

Soit  $\lambda \in [\lambda]$  un élément de  $\mathbf{H}_{0,(0,\dots,0)}$ . On note  $Q_0(\lambda), \dots, Q_N(\lambda)$  les pôles de  $\lambda$ . Si on compose  $\lambda$  par une homographie qui envoie  $Q_i(\lambda)$  sur  $\infty$ , alors on a une fonction, notée  $\lambda_i$ , telle que  $\lambda_i \in [\lambda]$  mais pour  $i \neq j$ ,  $(\lambda_i, \infty) \not\sim (\lambda_j, \infty)$ . De plus, on a  $\phi^{-1}([\lambda]) = \{\bar{\lambda}_i, i = 0, \dots, N\}$ .

Soit  $U$  un ouvert assez petit contenant  $[\lambda]$ . Soit  $\bar{\mu} \in \phi^{-1}(U)$ . Dans chaque classe de  $\mathbf{H}'_{0,(0,\dots,0)}$ , on choisit le représentant privilégié de la forme (1). Ainsi, les pôles de  $\bar{\mu}$  sont  $\infty, Q_1(\bar{\mu}), \dots, Q_N(\bar{\mu})$ . Et il existe  $i \in \{0, \dots, N\}$  tel que pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ ,  $Q_j(\bar{\lambda}_i)$  soit proche de  $Q_j(\bar{\mu})$ . On pose  $i_U : \phi^{-1}(U) \rightarrow \phi^{-1}([\lambda]) \times U$ ,  $i_U(\bar{\mu}) := (\bar{\lambda}_i, \phi(\bar{\mu}))$ .

On va montrer que  $i_U$  est une bijection. Soit  $(\bar{\lambda}_i, [\mu]) \in \phi^{-1}([\lambda]) \times U$ . Comme précédemment, dans  $\phi^{-1}([\mu])$  il existe  $k \in \{0, \dots, N\}$  tel que pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ ,  $Q_j(\bar{\lambda}_i)$  soit proche de  $Q_j(\bar{\mu}_k)$ . Ainsi, l'application réciproque de  $i_U$  envoie  $(\bar{\lambda}_i, [\mu])$  sur  $\bar{\mu}_k$ .

Finalement, comme dans la preuve du théorème 3.1, on munit  $\mathbf{H}'_{0,(0,\dots,0)}$  d'une topologie telle que  $\phi$  soit un revêtement holomorphe.  $\square$

**Proposition 3.5.** *Avec les notations ci-dessus,  $\mathbf{H}'_{0,(0,\dots,0)}$  est biholomorphe à  $(\mathbb{C}^N \times (\mathbb{C}^N - \text{Diag})) / \mathfrak{S}_N$  muni de la structure complexe standard.*

*Preuve :* D'après la proposition 3.2, on a une bijection  $i$  entre  $\mathbf{H}'_{0,(0,\dots,0)}$  et  $(\mathbb{C}^N \times (\mathbb{C}^N - \text{Diag})) / \mathfrak{S}_N$  définie par la remarque 3.3.

On peut trivialisier cette bijection, donc mettre une structure complexe sur  $\mathbf{H}'_{0,(0,\dots,0)}$ . On note  $\mathcal{A}'$  son atlas.

De plus l'application  $\varphi$  de  $(\mathbb{C}^N \times (\mathbb{C}^N - \text{Diag})) / \mathfrak{S}_N$  sur  $\mathbf{H}_{0,(0,\dots,0)}$  qui à  $(\underline{r}, \underline{Q})$  associe la fonction de la forme (1) est holomorphe.

Ainsi, sur  $\mathbf{H}'_{0,(0,\dots,0)}$ , on a deux structures complexes : l'une provenant de la proposition précédente, on note  $\mathcal{A}$  son atlas, et l'autre de l'atlas  $\mathcal{A}'$ .

On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{H}'_{0,(0,\dots,0)}, \mathcal{A}) & \xrightarrow{id_{\mathbf{H}'_{0,(0,\dots,0)}}} & (\mathbf{H}'_{0,(0,\dots,0)}, \mathcal{A}') \\ \phi \downarrow & & \downarrow \varphi \circ i \\ \mathbf{H}_{0,(0,\dots,0)} & \xrightarrow{id_{\mathbf{H}_{0,(0,\dots,0)}}} & \mathbf{H}_{0,(0,\dots,0)} \end{array}$$

Localement dans  $\mathbf{H}'_{0,(0,\dots,0)}$ ,  $\phi$  est un biholomorphisme car c'est un revêtement. Ainsi  $id_{\mathbf{H}'_{0,(0,\dots,0)}}$  est bien holomorphe. De plus elle est injective et de dérivée partout non nulle et donc biholomorphe par le théorème d'inversion globale.  $\square$

## 3.2 Construction de la courbe universelle

On va supposer qu'il n'y a que des valeurs critiques simples. Soit  $N$  leur nombre.

On va construire un revêtement ramifié  $\Gamma$  de  $\mathcal{C}$  sur  $\mathbf{H}_{g,t} \times \mathbb{CP}^1$  telle que pour tout  $[\lambda] \in \mathbf{H}_{g,t}$ , l'application  $\Gamma_{[\lambda]} : \mathcal{C}_{[\lambda]} \rightarrow \{[\lambda]\} \times \mathbb{CP}^1$  soit un revêtement ramifié de classe  $[\lambda]$  où  $\mathcal{C}_{[\lambda]} := \Gamma^{-1}\{[\lambda]\} \times \mathbb{CP}^1$  et  $\Gamma_{[\lambda]} := \Gamma|_{\mathcal{C}_{[\lambda]}}$ .

Soit  $\underline{u}^0 \in \widehat{\mathbb{C}^N}$ . Soit  $U$  un ouvert de  $\widehat{\mathbb{C}^N}$  qui contient  $\underline{u}^0$  tel que  $\pi_1(U, \underline{u}^0) = \pi_2(U, \underline{u}^0) = 0$ . Soit l'ensemble  $X^N := ((\mathbb{CP}^1)^{N+1} - D) / \mathfrak{S}_N$  où  $D$  est la réunion des hyperplans diagonaux et  $\mathfrak{S}_N$  agit sur les  $N$  premières composantes de  $(\mathbb{CP}^1)^N$ , c'est-à-dire  $(u_1, \dots, u_N, u_{N+1})$  est équivalent à  $(x_1, \dots, x_N, x_{N+1})$  si et seulement si  $\{u_1, \dots, u_N\} = \{x_1, \dots, x_N\}$  et  $u_{N+1} = x_{N+1}$ . Les éléments de  $X^N$  sont notés  $(\{u_1, \dots, u_N\}, u_{N+1})$  avec  $u_i \neq u_j$  si  $i \neq j$ .

On a une application oubli, noté  $oub$  :

$$\begin{array}{ccc} oub & : & X^N \rightarrow \widehat{\mathbb{C}^N} \\ & & (\{u_1, \dots, u_N\}, u_{N+1}) \mapsto \{u_1, \dots, u_N\} \end{array}$$

On pose  $U' := oub^{-1}(U)$  et on restreint l'application  $oub$  à  $U'$ . Pour  $\underline{u} \in U$ , la fibre au dessus de  $\underline{u}$  est  $oub^{-1}(\underline{u})$  qui est biholomorphe à  $\mathbb{CP}^1 - \{\underline{u}\}$ . De même, on pose  $\mathbf{H}_{g,t_U} := \Pi^{-1}(U)$  et on restreint  $\Pi$  de  $\mathbf{H}_{g,t_U}$  dans  $U$ .

**Proposition 3.6 (Construction locale).** *Avec les notations ci-dessus, il existe un ensemble  $\mathcal{C}^\diamond_U$ , qui sera naturellement muni d'une structure complexe, et une application de revêtement  $\phi_U$  de  $\mathcal{C}^\diamond_U$  dans  $U' \times_U \mathbf{H}_{g,t_U}$  qui vérifie :*

*si  $[\lambda] \in \mathbf{H}_{g,t_U}$ , alors l'application  $\phi_{[\lambda]}$  de  $\mathcal{C}^\diamond_{U,[\lambda]}$  dans  $\mathbb{CP}^1 - \{\Pi([\lambda])\}$  est un revêtement de classe  $[\lambda]$  où on a identifié  $U' \times_U \{[\lambda]\} = \{\Pi([\lambda])\} \times (\mathbb{CP}^1 - \{\Pi([\lambda])\}) \times \{[\lambda]\}$  avec  $\mathbb{CP}^1 - \{\Pi([\lambda])\}$  et où  $\mathcal{C}^\diamond_{U,[\lambda]} := \phi^{-1}(U' \times_U \{[\lambda]\})$  et  $\phi_{[\lambda]} := \phi|_{\mathcal{C}^\diamond_{U,[\lambda]}}$ .*

**Preuve :** Soit  $\underline{u}^0 \in U$ . Comme  $\pi_1(U, \underline{u}^0) = 0$ , le revêtement  $\Pi : \mathbf{H}_{g,t_U} \longrightarrow U$  est trivialisable ; c'est-à-dire,  $\mathbf{H}_{g,t_U}$  est biholomorphe à  $U \times \Pi^{-1}(\underline{u}^0)$ . Ainsi  $U' \times_U \mathbf{H}_{g,t_U}$  est biholomorphe à  $U' \times \Pi^{-1}(\underline{u}^0)$ .

De plus, on a la suite exacte :

$$\pi_2(U, \underline{u}^0) \longrightarrow \pi_1(\text{oub}^{-1}(\underline{u}^0), (\underline{u}^0, x_0)) \longrightarrow \pi_1(U', (\underline{u}^0, x_0)) \longrightarrow \pi_1(U, \underline{u}^0)$$

où  $x_0 \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1 - \{\underline{u}^0\}$ . Et comme  $\pi_1(\text{oub}^{-1}(\underline{u}^0), (\underline{u}^0, x_0)) = \pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^1 - \{\underline{u}^0\}, x_0)$ ,  $\pi_1(U', x_0)$  est isomorphe à  $\pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^1 - \{\underline{u}^0\}, x_0)$ .

Soient  $[\lambda] \in \Pi^{-1}(\underline{u}^0)$ . D'après le théorème 2.1,  $[\lambda]$  induit un morphisme de  $\pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^1 - \{\underline{u}^0\}, x_0)$  dans  $\mathfrak{S}_d$ . On a alors un revêtement, noté  $\phi_{[\lambda]}$ , de  $\mathcal{C}^\diamond_{U, [\lambda]}$  sur  $U'$ .

$$\text{Puis on pose } \mathcal{C}^\diamond_U := \coprod_{\substack{[\lambda] \in \mathbf{H}_{g,t_U} \\ \Pi([\lambda]) = \underline{u}^0}} \mathcal{C}^\diamond_{U, [\lambda]}.$$

Ainsi on a construit une application, noté  $\phi_U$  :

$$\begin{aligned} \phi_U : \quad \mathcal{C}^\diamond_U &\longrightarrow U' \times \Pi^{-1}(\underline{u}^0) \\ x \in \mathcal{C}^\diamond_{U, [\lambda]} &\longmapsto (\phi_{[\lambda]}(x), [\lambda]) \end{aligned}$$

L'application  $\phi_U$  est un revêtement car  $\phi_{[\lambda]}$  est un revêtement. Finalement,  $\mathcal{C}^\diamond_U$  est naturellement muni d'une structure complexe.  $\square$

**Remarque 3.5.** On ne s'est pas servi de l'hypothèse sur les valeurs critiques.

Comme  $U' \subset U \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ , on va compléter  $\mathcal{C}^\diamond_U$  en un revêtement ramifié de  $\mathbf{H}_{g,t_U} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ .

**Proposition 3.7 (Complétion de  $\mathcal{C}^\diamond_U$ ).** *Il existe un ensemble  $\mathcal{C}_U$  et une application  $\widetilde{\phi}_U$  tels que  $\mathcal{C}_U \longrightarrow \mathbf{H}_{g,t_U} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  soit une application holomorphe qui vérifie : pour tout  $[\lambda] \in \mathbf{H}_{g,t}$  l'application  $\widetilde{\phi}_{[\lambda]} : \mathcal{C}_{U, [\lambda]} \longrightarrow \{[\lambda]\} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  où  $\mathcal{C}_{U, [\lambda]} := \widetilde{\phi}_{[\lambda]}^{-1}(\{[\lambda]\} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1)$  est un revêtement ramifié de classe  $[\lambda]$ .*

**Preuve :** On pose  $\Sigma := (U \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1) - U' = \{(\underline{u}, u') \text{ avec } u' \in \underline{u} \text{ et } \underline{u} \in U\}$ . Soit  $\underline{u}^0 \in U$ . L'application  $\text{proj} : \Sigma \longrightarrow U$ ,  $(\underline{u}, u') \longmapsto \underline{u}$  est un revêtement qui est trivialisable car  $\pi(U, \underline{u}^0) = 0$ . On note  $\Sigma_i$  la composante connexe de  $\Sigma$  contenant  $(\underline{u}^0, u_i^0)$ . Ainsi, chaque  $\Sigma_i$  est biholomorphe à  $U$  et  $\Sigma = \Sigma_1 \amalg \dots \amalg \Sigma_N$ .

Soit  $\sigma_i$  la section holomorphe de  $\text{proj}$  telle que  $\sigma_i(U) = \Sigma_i$ .

**Lemme 3.1.** *Avec les notations précédentes, il existe un biholomorphisme  $f_i$  de  $U \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  sur lui-même tel que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_i & \xrightarrow{f_i} & U \times \{\infty\} \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & U \end{array}$$

où  $\text{pr}_1(\underline{u}, \infty) = \underline{u}$ .

**Preuve du lemme :** Comme  $proj$  est un biholomorphisme entre  $U$  et  $\Sigma_i$  d'application réciproque  $\sigma_i$ , l'expression en coordonnées de  $\sigma_i$  est :  $\sigma_i(\underline{u}) = (\underline{g}(\underline{u}), h(\underline{u}))$  où  $\underline{g}$  est un biholomorphisme de  $U$  dans  $U$  et  $h$  une application holomorphe de  $U$  dans  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ .

Ainsi le biholomorphisme donné par  $f_i(\underline{u}, z) := (\underline{g}^{-1}(\underline{u}), \frac{1}{z-h(\underline{u})})$  convient.  $\square$

Pour chaque  $i$ , quitte à appliquer le lemme précédent, on peut supposer que  $\Sigma_i = \sigma_i(U) = U \times \{\infty\}$ .

Puis, on prend un voisinage tubulaire  $D_i := U \times D_\infty$  de  $\Sigma_i$  où  $D_\infty$  est un voisinage de l'infini dans  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  tel que pour  $i \neq j$  on ait  $D_i \cap \Sigma_j = \emptyset$ . On pose  $D_i^\circ := D_i - \Sigma_i \subset U'$ .

On peut restreindre l'application  $oub$  à  $D_i^\circ$  et pour  $\underline{u} \in oub(D_i^\circ)$  alors  $oub^{-1}(\underline{u})$  est homéomorphe à un disque épointé. Ainsi on a la suite exacte :

$$\pi_2(U, \underline{u}^0) \longrightarrow \pi_1(\text{disque épointé}) \longrightarrow \pi_1(D_i^\circ, (\underline{u}^0, x_0)) \longrightarrow \pi_1(U, \underline{u}^0)$$

où  $x_0 \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1 - \{\underline{u}^0\}$ .

Les hypothèses sur  $U$  implique que  $\pi_1(D_i^\circ, (\underline{u}^0, x_0)) = \mathbb{Z}$ . De plus, comme dans la preuve du théorème 2.1, les revêtements de  $D_i^\circ$  sont de la forme  $U \times D^\circ \longrightarrow D_i^\circ$ ,  $(\underline{u}, z) \longmapsto (\underline{u}, z^n)$  où  $D^\circ$  est un disque épointé et  $n \in \mathbb{N}$ .

On note  $V_{k,i}^\circ$  avec  $k \in K$  le nombre de composante connexe de  $\phi^{-1}(D_i^\circ \times_U \mathbf{H}_{g,tU})$  et pour chaque  $k$ ,  $\phi|_{V_{k,i}^\circ} : V_{k,i}^\circ \longrightarrow D_i^\circ \times_U \mathbf{H}_{g,tU}$  est un revêtement équivalent à  $\pi_{k,i} : (U \times D^\circ) \times_U \mathbf{H}_{g,tU} \longrightarrow D_i^\circ \times_U \mathbf{H}_{g,tU}$ ,  $((\underline{u}, z), [\lambda]) \longmapsto ((\underline{u}, z^{n_{k,i}}), [\lambda])$  où  $n_{k,i}$  est un entier bien déterminé (dans notre cas  $n_{k,i} = 2$  car les valeurs critiques sont simples) ; c'est-à-dire, il existe un biholomorphisme  $\varphi_{k,i}^\circ$  de  $V_{k,i}^\circ$  sur  $(U \times D^\circ) \times_U \mathbf{H}_{g,tU}$  tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V_{k,i}^\circ & \xrightarrow{\varphi_{k,i}^\circ} & (U \times D^\circ) \times_U \mathbf{H}_{g,tU} \\ \phi \downarrow & \swarrow \pi_{k,i} & \\ D_i^\circ \times_U \mathbf{H}_{g,tU} & & \end{array}$$

On définit la relation d'équivalence suivante :  $x \sim y$  si et seulement si  $x \in V_{k,i}$ ,  $y \in (U \times D) \times_U \mathbf{H}_{g,tU}$  et  $\varphi_{k,i}^\circ(x) = y$ . L'application  $(\varphi_{k,i}^\circ, Id) : V_{k,i}^\circ \Pi((U \times D) \times_U \mathbf{H}_{g,tU}) \longrightarrow (U \times D) \times_U \mathbf{H}_{g,tU}$  passe au quotient par cette relation d'équivalence. On note  $\varphi_{k,i}$  l'application quotient de  $V_{k,i} := V_{k,i}^\circ / \sim$  sur  $(U \times D) \times_U \mathbf{H}_{g,tU}$ . Et  $\varphi_{k,i}$  est un homéomorphisme. Puis on met sur  $V_{k,i}$  un structure complexe qui coincide avec celle sur  $V_{k,i}^\circ$ , c'est-à-dire  $\varphi_{k,i}$  est un biholomorphisme. Finalement, pour chaque  $i, k$  on complète  $V_{k,i}^\circ$  en  $V_{k,i}$ , et on a construit le revêtement ramifié souhaité  $\widetilde{\phi_U} : \mathcal{C}_U \longrightarrow \mathbf{H}_{g,tU} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ .  $\square$

**Remarque 3.6.** Ici on a utilisé l'hypothèse qu'il y a des points critiques avec des ordres fixés. Mais on n'a pas fait de différence entre les pôles et les points critiques à valeur finie.

Pour construire globalement la courbe universelle on a besoin de supposer  $d > 2$  et que les points critiques (à valeur finie ou infinie) sont simples.

**Proposition 3.8.** *Soit  $\mathcal{U}$  un recouvrement de  $\widehat{\mathbb{C}^N}$  tel que pour tout ouvert  $U \subset \mathcal{U}$  on ait  $\pi_1(U) = \pi_2(U) = 0$ . Soient  $U, V \in \mathcal{U}$ . Il existe un unique biholomorphisme, noté  $f_{U,V}$ , tel que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{U|U \cap V} & \xrightarrow{f_{U,V}} & \mathcal{C}_{V|U \cap V} \\ \tilde{\phi}_U \downarrow & \swarrow \tilde{\phi}_V & \\ \mathbf{H}_{g,t|U \cap V} \times \mathbb{CP}^1 & & \end{array}$$

**Preuve : Existence :** Soient  $\phi_U : \mathcal{C}_{U|U \cap V}^\circ \rightarrow (U \cap V)'$  et  $\phi_V : \mathcal{C}_{V|U \cap V}^\circ \rightarrow (U \cap V)'$ . D'après la construction locale (cf. la preuve de la proposition 3.6),  $\phi_U$  et  $\phi_V$  sont deux revêtements de  $(U \cap V)'$  qui induisent la même action du groupe fondamental de  $(U \cap V)'$ . Ainsi, ces revêtements sont équivalents, c'est-à-dire qu'il existe un biholomorphisme  $f_{U,V}^\circ$  de  $\mathcal{C}_{U|U \cap V}^\circ$  sur  $\mathcal{C}_{V|U \cap V}^\circ$ .

Puis, on complète  $\mathcal{C}_{U|U \cap V}^\circ$  et  $\mathcal{C}_{V|U \cap V}^\circ$  en  $\mathcal{C}_{U|U \cap V}$  et  $\mathcal{C}_{V|U \cap V}$ . Localement, autour du diviseur de ramification, l'application  $f_{U,V}^\circ$  et son inverse restent bornées. On peut donc la prolonger en un biholomorphisme  $f_{U,V}$  de  $\mathcal{C}_{U|U \cap V}$  dans  $\mathcal{C}_{V|U \cap V}$ .

**Unicité :** Supposons qu'on ait deux biholomorphismes  $f_{U,V}$  et  $g_{U,V}$ .

On va utiliser le lemme suivant :

**Lemme 3.2.** [Ful69, p. 548] *Soient  $d > 2$  et  $f : Y \rightarrow \mathbb{CP}^1$  un revêtement ramifié de degré  $d$  à valeurs critiques simples. Si  $\varphi : Y \rightarrow Y$  est un biholomorphisme de  $Y$  tel que  $f \circ \varphi = f$  alors  $\varphi$  est l'identité.*

On fixe  $[\lambda] \in \mathbf{H}_{g,t|U \cap V}$ , et on applique ce lemme au revêtement ramifié  $\widetilde{\phi_{U,[\lambda]}} : \mathcal{C}_{U,[\lambda]|U \cap V} \rightarrow \mathbb{CP}^1$  et au biholomorphisme  $f_{U,V,[\lambda]} \circ g_{U,V,[\lambda]}^{-1}$  où  $f_{U,V,[\lambda]}$  et  $g_{U,V,[\lambda]}$  sont deux biholomorphismes de  $\mathcal{C}_{U,[\lambda]|U \cap V}$  sur  $\mathcal{C}_{V,[\lambda]|U \cap V}$ . Ainsi on a  $f_{U,V} = g_{U,V}$ .  $\square$

**Corollaire 3.1.** *Avec les notations de la proposition précédente. Soit la relation  $x \sim y$  si et seulement si  $x \in \mathcal{C}_{U|U \cap V}$ ,  $y \in \mathcal{C}_{V|U \cap V}$  et  $f_{U,V}(x) = y$ . C'est une relation d'équivalence.*

**Preuve :** Pour la réflexivité et la symétrie, il suffit de prendre  $f_{U,U} := id$  et  $f_{V,U} := f_{U,V}^{-1}$ . D'après la proposition 3.8 l'application  $f_{U,V}$  est unique, ceci implique la transitivité de la relation.  $\square$

**Corollaire 3.2 (Construction globale).** *Soit  $\mathcal{C} := \coprod_{U \subset \mathcal{U}} \mathcal{C}_U / \sim$ . On a un revêtement ramifié  $\Gamma : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{H}_{g,t} \times \mathbb{CP}^1$  telle que pour tout  $[\lambda] \in \mathbf{H}_{g,t}$ ,  $\Gamma_{[\lambda]} : \mathcal{C}_{[\lambda]} \rightarrow \{[\lambda]\} \times \mathbb{CP}^1$  soit un revêtement ramifié de classe  $[\lambda]$ .*

**Notation :**

On note  $\Lambda$  la fonction de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{CP}^1$  telle que  $\Lambda|_{\mathcal{C}_{[\lambda]}} : \mathcal{C}_{[\lambda]} \rightarrow \mathbb{CP}^1$  est un revêtement de classe  $[\lambda]$ .

On note  $\kappa$  la fonction de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbf{H}_{g,t}$  qui à  $P \in \mathcal{C}_{[\lambda]}$  associe  $[\lambda]$ .

**Définition 3.3.** Ainsi, les fonctions  $u_1, \dots, u_N, \Lambda$  forment un système de coordonnées locales sur  $\mathcal{C}^\circ$ . On note  $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_N, \partial_\lambda$  leurs champs de vecteurs associés. On définit  $\tilde{e} := \sum \tilde{e}_n$  et  $\tilde{E} := \sum u_n \tilde{e}_n$ .

### 3.3 Construction locale du revêtement universel fibré de $\mathcal{C}_U^\circ$

On garde les notations et les hypothèses du paragraphe 3.2.

Dans le paragraphe précédent, on a complété  $\mathcal{C}_U^\circ$  aux pôles et aux points critiques pour obtenir  $\mathcal{C}_U$ . Dans ce paragraphe, on complète  $\mathcal{C}_U^\circ$  aux points critiques, et on note  $\mathcal{C}_U^\circ$  cette complétion. Ainsi on a construit un revêtement ramifié  $\phi_U^\circ : \mathcal{C}_U^\circ \longrightarrow \mathbf{H}_{g,tU} \times \mathbb{C}$ .

**Proposition 3.9.** Avec les notations ci-dessus, il existe un ensemble  $\tilde{\mathcal{C}}_U$  qui sera muni naturellement d'une structure complexe, et un revêtement  $\pi_U$  de  $\tilde{\mathcal{C}}_U$  sur  $\mathcal{C}_U^\circ$  tels que pour tout  $[\lambda] \in \mathbf{H}_{g,tU}$ ,  $\tilde{\mathcal{C}}_{U,[\lambda]} := \pi_U^{-1}(\mathcal{C}_{U,[\lambda]}^\circ)$  soit un revêtement universel de  $\mathcal{C}_{U,[\lambda]}^\circ$ .

**Preuve :** Sur chaque composante connexe de  $\mathcal{C}_U^\circ$ , on a un revêtement universel. On note  $\tilde{\mathcal{C}}_U$  la réunion disjointe de ces revêtements universels  $\mathcal{C}_U^\circ$ . Ainsi, on a une application  $\pi_U : \tilde{\mathcal{C}}_U \longrightarrow \mathcal{C}_U^\circ$  qui est un revêtement universel sur chaque composante connexe de  $\mathcal{C}_U^\circ$ . On a alors le diagramme suivant :

$$\tilde{\mathcal{C}}_U \xrightarrow{\pi_U} \mathcal{C}_U^\circ \xrightarrow{\phi_U^\circ} \mathbf{H}_{g,tU} \times \mathbb{C}$$

Ainsi on la suite exacte suivante :

$$\pi_2(\mathbf{H}_{g,tU} \times \mathbb{C}) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{C}_{U,[\lambda]}^\circ) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{C}_U^\circ) \longrightarrow \pi_1(\mathbf{H}_{g,tU} \times \mathbb{C})$$

où  $\mathcal{C}_{U,[\lambda]}^\circ = (\phi_U^\circ)^{-1}(\{[\lambda]\} \times \mathbb{C})$ . Or comme  $\mathbf{H}_{g,tU} \times \mathbb{C}$  est biholomorphe à  $(U \times \{\text{ens discret}\}) \times \mathbb{C}$ , sont premier et deuxième groupe fondamental sont réduit au neutre. Donc  $\pi_1(\mathcal{C}_{U,[\lambda]}^\circ)$  est isomorphe à  $\pi_1(\mathcal{C}_U^\circ)$ . Ainsi  $\tilde{\mathcal{C}}_U$  est aussi un revêtement universel fibre à fibre.  $\square$

**Notation :** On note  $\tilde{\kappa}$  l'application de  $\tilde{\mathcal{C}}_U$  dans  $\mathbf{H}_{g,tU}$ . On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{C}}_U & \xrightarrow{\pi_U} & \mathcal{C}_U^\circ \\ \tilde{\kappa} \downarrow & \swarrow \kappa & \\ \mathbf{H}_{g,tU} & & \end{array}$$

## 4 Multi-formes abéliennes sur une surface de Riemann

Dans cette partie, on va définir la notion de multi-forme sur une surface de Riemann compacte.

Soient  $C$  une surface de Riemann compacte connexe de genre  $g$  et  $Q_0, \dots, Q_M$  des points sur  $C$ . On note  $\pi : \tilde{C} \rightarrow C^\circ$  un revêtement universel de  $C^\circ := C - \{Q_0, \dots, Q_M\}$ . Soit  $z_j$  une coordonnée locale définie sur un disque  $D_j$  qui contient  $Q_j$  et telle que  $z_j(Q_j) = 0$  pour  $j = 0, \dots, M$ ; on note  $D_j^\circ := D_j - \{Q_j\}$ . On note aussi  $\mathcal{M}(U)$  et  $\mathcal{M}^1(U)$  l'ensemble des fonctions méromorphes et des 1-formes méromorphes sur une surface de Riemann  $U$ .

On peut alors définir deux faisceaux sur  $C^\circ$  :

1. Soit  $U$  un ouvert de  $C^\circ$ . On pose  $\mathcal{M}_{C^\circ}(U) := \mathcal{M}(U)$  et on note par  $\mathcal{M}_{C^\circ}$  le faisceau des fonctions méromorphes sur  $C^\circ$ .
2. Soit  $U$  un ouvert de  $C^\circ$ . On pose  $\mathcal{M}_{C^\circ}^1(U) := \mathcal{M}^1(U)$  et on note par  $\mathcal{M}_{C^\circ}^1$  le faisceau des 1-formes méromorphes sur  $C^\circ$ .

### 4.1 Définition d'une multi-forme

**Définition 4.1.** 1. Soient  $X$  et  $E$  deux variétés topologiques et  $p$  un revêtement topologique de degré  $d$  de  $E$  sur  $X$ . Soit  $f$  une fonction continue de  $E$  dans  $\mathbb{C}$ . Alors on peut aussi considérer  $f$  comme **une multi-fonction** continue de  $X$  dans  $\mathbb{C}$ . Soient  $x \in X$  et  $p^{-1}(x) := \{y_i, i = 1, \dots, d\}$  alors les  $f(y_i)$ , pour  $i = 1, \dots, d$ , sont les différentes valeurs de la multi-fonction  $f$  en  $x \in X$ . On a diagramme le suivant :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \downarrow p & & \\ X & & \end{array}$$

2. Soient  $X$  et  $E$  deux variétés  $C^\infty$  et  $p$  un revêtement  $C^\infty$  à  $d$  feuillet de  $X$ . Soit  $\omega$  une  $k$ -forme différentielle de  $E$  dans  $\mathbb{C}$ . Alors on peut aussi considérer  $\omega$  comme **une  $k$ -multi-forme** de  $X$  dans  $\mathbb{C}$ . Soient  $x \in X$  et  $p^{-1}(x) := \{y_i, i = 1, \dots, d\}$  alors les  $\omega(y_i)$ , pour  $i = 1, \dots, d$ , sont les  $d$   $k$ -forme-multilinéaires alternées définies sur  $T_{y_i}E$  de la multi-forme  $\omega$  en  $x \in X$ . On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} T_{y_i}E^k & \xrightarrow{\omega(y_i)} & \mathbb{C} \\ \downarrow (p, \dots, p) & & \\ T_x X^k & & \end{array}$$

où  $(p, \dots, p)$  est un difféomorphisme.

**Remarque 4.1.** La donnée d'une multi-fonction ou d'une multi-forme dépend de l'application  $p$ . On omet cette dépendance dans la notation quand il n'y a pas d'ambiguïté. Par la suite l'application  $\pi$  jouera le rôle de  $p$ .

**Exemple 4.1.** Soient  $p$  l'application  $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$  et  $f$  l'identité de  $\mathbb{C}$ . On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{C} \\ \exp \downarrow & \nearrow \log & \\ \mathbb{C}^* & & \end{array}$$

La multi-fonction associée à l'identité correspond, sur l'ensemble  $\exp^{-1}(z_0)$  avec  $z_0 \in \mathbb{C}^*$ , aux différentes déterminations du logarithme de  $z_0$ .

**Proposition 4.1.** Soit l'application  $\pi : \tilde{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}^\circ$  définie au début du paragraphe 4. Ainsi on définit le faisceau des **1-multi-fonctions méromorphes** sur  $\mathbb{C}^\circ$ , noté  $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}^\circ}$ , en posant :

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}^\circ}(U) := \mathcal{M}(\pi^{-1}(U)) \text{ où } U \text{ est un ouvert de } \mathbb{C}^\circ.$$

**Preuve :** – Soit  $V \subset U \subset \mathbb{C}^\circ$  alors  $\pi^{-1}(V) \subset \pi^{-1}(U)$  et donc  $\mathcal{M}(\pi^{-1}(V))$  est inclus dans  $\mathcal{M}(\pi^{-1}(U))$ . Soient les applications suivantes :

$$\begin{array}{ccc} r_{U,V} & : & \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}^\circ}(U) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}^\circ}(V) \\ & & f \longmapsto f|_V \end{array}$$

- On a clairement  $r_{U,U} = \text{id}|_U$  et  $r_{W,V} \circ r_{V,U} = r_{U,W}$  avec  $U \subset V \subset W \subset \mathbb{C}^\circ$ .
- Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement d'ouverts de  $\mathbb{C}^\circ$ . Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}^\circ$  et  $f, g \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}^\circ}(U)$  tels que  $f|_{U_i} = g|_{U_i}$  pour tout  $i \in I$ . Alors  $f - g = 0$  sur chaque  $U_i$  donc sur  $\mathbb{C}^\circ$  c'est-à-dire  $f = g$ .
  - Pour  $i \in I$ , soient  $s_i \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}^\circ}(U_i)$  tels que sur  $U_i \cap U_j$  on a  $s_i = s_j$  alors il existe  $f \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}^\circ}(\mathbb{C}^\circ)$  tel que  $f|_{U_i} = s_i$  pour tout  $i \in I$ .

Ainsi on a bien vérifié que  $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}^\circ}$  est un faisceau sur  $\mathbb{C}^\circ$ . □

**Remarque 4.2.** On peut, de la même manière, vérifier que les **1-multi-formes méromorphes** sur  $\mathbb{C}^\circ$ , noté  $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}^\circ}^1$ , est un faisceau sur  $\mathbb{C}^\circ$ . C'est-à-dire on pose : pour  $U$  un ouvert  $\mathbb{C}^\circ$ ,  $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}^\circ}^1(U) := \mathcal{M}^1(\pi^{-1}(U))$ .

## 4.2 Multi-formes abéliennes

Comme  $\mathbb{C}$  est connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe alors  $\tilde{\mathbb{C}}$  est simplement connexe d'après la propositions 5.3. de [God71, p. 137]. Ainsi le groupe fondamental  $\pi_1(\mathbb{C}^\circ) \cong \text{Aut}(\tilde{\mathbb{C}}/\mathbb{C}^\circ)$  agit transitivement sur les fibres de  $\pi$ . Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}^\circ$  et  $u^0 \in U$ . Alors  $\pi_1(\mathbb{C}^\circ, u^0)$

agit transitivement et par biholomorphisme sur  $\pi^{-1}(U)$ . On définit alors l'action suivante :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{C}^\circ, u^0) \times \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}^\circ}^1(U) & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}^\circ}^1(U) \\ (\gamma, \omega) & \longmapsto & \gamma^*\omega \end{array}$$

où  $\gamma^*\omega$  est l'image inverse de  $\omega$  par le biholomorphisme donné par  $\gamma$ .

**Définition 4.2.** Soient  $\gamma \in \pi_1(\mathbb{C}^\circ)$  et  $\omega \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}^\circ}^1(U)$ , on définit l'application suivante :

$$\begin{array}{ccc} \text{incr}(\omega) : \pi_1(\mathbb{C}^\circ, u^0) & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}^\circ}^1(U) \\ \gamma & \longmapsto & \text{incr}_\gamma(\omega) := \gamma^*\omega - \omega \end{array}$$

on appelle  $\text{incr}_\gamma(\omega)$  **l'incrément** de  $\omega$  le long de  $\gamma$ .

**Remarque 4.3.** 1. On sait que le revêtement universel du disque unité époinché  $D^\circ$  est  $\widetilde{D}^\circ := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \Im m(\zeta) > 0\}$  (cf. [Mir91, p.86]) où l'application revêtement est l'application  $\zeta \mapsto \exp(\zeta)$ . Ainsi si on appelle  $z$  la coordonnée complexe sur  $D^\circ$  et  $\zeta$  la coordonnée sur  $\widetilde{D}^\circ$  alors on a  $\exp(\zeta) = z$  c'est-à-dire  $\zeta$  est un "logarithme". Remarquons aussi que  $d\zeta = \pi^*(\frac{dz}{z})$ .

2. Le nombre de composantes connexes de  $\pi^{-1}(D_j^\circ)$  peut être indexé par les ensembles  $K_j$ . On les note par  $\widetilde{D}_j^i$  avec  $i$  dans  $K_j$ . Si on applique le point précédent à chaque  $\widetilde{D}_j^i$  alors on définit un logarithme  $\zeta_j^{(i)}$  sur chaque  $\widetilde{D}_j^i$  et on note  $\zeta$  l'application

$$\zeta : \coprod_{i \in K_j} \widetilde{D}_j^i \subset \widetilde{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ où } \zeta|_{\widetilde{D}_j^i} := \zeta_j^{(i)}.$$

Comme  $\pi$  est un revêtement alors localement on peut remonter la coordonnée  $z_j$  de  $D_j^\circ$  sur  $\widetilde{D}_j^i$  où on la note encore  $z_j$ . Ainsi sur  $\widetilde{D}_j^i$  on peut choisir  $\zeta_j^{(i)}$  telle que pour  $P \in \widetilde{D}_j^i$  on ait :

$$\zeta_j^{(i)}(P) = \log(z_j(P)) \tag{2}$$

où  $\log$  est le logarithme défini sur  $\mathbb{C} - \mathbb{R}^+$ .

Soit  $j$  l'injection canonique de  $\mathbb{C}^\circ$  dans  $\mathbb{C}$  alors sur  $\mathbb{C}$  on a le faisceau  $j_*\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}^\circ}^1$ , qui est défini par  $j_*\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}^\circ}^1(U) := \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}^\circ}^1(U \cap \mathbb{C}^\circ)$  avec  $U$  un ouvert de  $\widetilde{C}$ . On peut prolonger l'application :

$$\begin{array}{ccc} \gamma^* & : & j_*\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}^\circ}^1 \longrightarrow j_*\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}^\circ}^1 \\ & & \omega \longmapsto \gamma^*\omega \end{array}$$

Dans la définition ci-dessous, on veut définir un sous faisceau de  $j_*\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}^\circ}^1$ ; pour cela il suffit d'imposer une ou plusieurs conditions aux points  $Q_j$ .

**Définition 4.3.** 1. Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Une 1-multi-forme  $\omega \in j_* \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}^\circ}^1(U)$  est une 1-multi-forme méromorphe **logarithmique à l'infini** sur  $U$  si pour tout  $Q_j \in U$ , il existe des fonctions méromorphes  $\varphi_{1,j}$  et  $\varphi_{2,j}$  sur un voisinage ouvert  $U_j \subset U$  de  $Q_j$  telles que :

$$\text{sur } \widetilde{U}_j := \pi^{-1}(U_j), \text{ on ait } \omega = \phi_{1,j} + \zeta \phi_{2,j}$$

où  $\phi_{k,j}(\zeta) = \pi^*(\varphi_{k,j}(z) \frac{dz}{z})$  pour  $k = 1, 2$ .

2. Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $u^0 \in U$ . Une 1-multi-forme  $\omega \in j_* \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}^\circ}^1(U)$  est une **1-multi-forme abélienne** sur  $U$  si  $\omega$  est logarithmique à l'infini sur  $U$  et si pour tout  $\gamma \in \pi_1(\mathbb{C}^\circ, u^0)$  on a  $\text{incr}_\gamma(\omega) \in d\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(U)$ , où  $d\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(U)$  est l'ensemble des 1-formes méromorphes exactes sur  $U$ . On note par  $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}^1$  le faisceau des 1-multi-formes abéliennes sur  $\mathbb{C}$ .

**Remarque 4.4.** 1. On reprend les notations de la remarque 4.3 point 2. Soient  $\gamma \in \pi_1(\mathbb{C}^\circ, u^0)$  (où  $u^0 \in D_j^\circ$ ) et  $\omega$  une 1-forme méromorphe logarithmique à l'infini sur  $D_j$  alors sur  $\widetilde{D}_j^i$  avec  $i \in K_j$ , on a :

$$\begin{aligned} \text{incr}_\gamma(\omega)^{(i)} &= (\gamma^*\omega)^{(i)} - \omega^{(i)} \\ &= \phi_{1,j} + (\gamma^*\zeta)^{(i)} \phi_{2,j} - \phi_{1,j} - \zeta^{(i)} \phi_{2,j} \\ &= 2i\pi k_\gamma^{(i)} \phi_{2,j} \end{aligned} \quad \text{où } k_\gamma^{(i)} \in \mathbb{Z}$$

car comme  $\phi_{1,j}$  et  $\phi_{2,j}$  proviennent de 1-formes sur  $D_j$ , elles sont invariantes par l'action de  $\gamma$  et  $(\gamma^*\zeta)^{(i)} = \zeta^{(i)} + 2i\pi k_\gamma^{(i)}$  (deux déterminations du logarithme différent de  $2ik\pi$ ).

2. Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Si  $\omega \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}^1(U)$  et  $\text{incr}(\omega) = 0$  alors  $\omega \in \mathcal{M}^1(U)$ . En effet, si on prend  $\gamma$  un petit lacet autour de  $Q_j$  alors, d'après le point précédent,  $\text{incr}_\gamma(\omega) = 2i\pi \phi_{2,j}$  donc  $\phi_{2,j} = 0$  c'est-à-dire  $\omega = \phi_{1,j}$  donc  $\omega$  est bien une 1-forme méromorphe sur  $U \subset \mathbb{C}$ .

3. Dans la définition des 1-multi-formes méromorphes logarithmiques à l'infini, on a unicité de  $\varphi_{1,j}$  et  $\varphi_{2,j}$ .

En effet, comme  $\pi^*$  est injective (car  $\pi$  est surjective), ainsi l'unicité de  $\varphi_i$  revient à celle de  $\phi_i$ . Supposons que  $\omega = \phi_{1,j} + \zeta \phi_{2,j} = \phi'_{1,j} + \zeta \phi'_{2,j}$ , alors l'incrément de  $\phi_{1,j} - \phi'_{1,j} + \zeta(\phi_{2,j} - \phi'_{2,j})$  est nul. La remarque précédente implique que  $\phi_{2,j} - \phi'_{2,j} = 0$ , d'où  $\phi_{1,j} - \phi'_{1,j} = 0$ .

4. Pour les 1-multi-formes abéliennes, la condition sur l'incrément impose deux choses :

- (i) l'incrément n'est plus une multi-forme c'est-à-dire  $\text{incr}_\gamma(\omega) \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}^1(U)$  pour  $U \subset \mathbb{C}$ ;
- (ii) l'incrément est exacte sur  $\mathbb{C}$  c'est-à-dire  $\phi_{2,j} = \pi^*(\varphi_{2,j} \frac{dz}{z})$  est une 1-multi-forme exacte sur  $\mathbb{C}$  (cf le point 1 ci-dessus) et donc  $\varphi_{2,j}(0) = 0$ .

La condition sur l'incrément permet d'intégrer  $\omega \in \widetilde{\mathcal{M}}_C^1(\mathbb{C})$  sur un élément de  $H^1(\mathbb{C}^\circ, \mathbb{Z})$ , plus précisément on a le lemme suivant :

**Lemme 4.1.** *Soient  $\omega \in \widetilde{\mathcal{M}}_C^1(\mathbb{C})$  sans résidu sur  $\widetilde{C}$  et  $P_0 \in \mathbb{C}^\circ$  telle que  $\omega$  soit holomorphe en tous les points  $\widetilde{P}_0 \in \pi^{-1}(P_0)$ . Pour un lacet  $\gamma$  dans  $\mathbb{C}^\circ$  d'origine  $P_0$ , on note  $\gamma_{\widetilde{P}_0}$  le relevé du chemin  $\gamma$  d'origine  $\widetilde{P}_0$ . Alors l'intégrale*

$$\int_{\gamma} \omega := \int_{\gamma_{\widetilde{P}_0}} \omega \quad (3)$$

ne dépend que de  $P_0$  et de la classe d'homologie de  $\gamma$  dans  $H^1(\mathbb{C}^\circ, \mathbb{Z})$ .

**Preuve :** Soit  $\delta \in \pi_1(\mathbb{C}^\circ, P_0)$ . On note  $\delta_* \widetilde{P}_0$  l'extrémité du relevé de  $\delta$  d'origine  $\widetilde{P}_0$ . Comme l'action du groupe fondamental est transitive, on a :

$$\{\delta_* \widetilde{P}_0 \text{ avec } \delta \in \pi_1(\mathbb{C}^\circ, P_0)\} = \pi^{-1}(P_0).$$

De plus,

$$\int_{\gamma_{\delta_* \widetilde{P}_0}} \omega = \int_{\delta_* \gamma_{\widetilde{P}_0}} \omega = \int_{\gamma_{\widetilde{P}_0}} \delta^* \omega = \int_{\gamma_{\widetilde{P}_0}} \omega + \int_{\gamma_{\widetilde{P}_0}} \text{incr}_\delta(\omega) = \int_{\gamma_{\widetilde{P}_0}} \omega$$

En effet, comme  $\omega \in \widetilde{\mathcal{M}}_C^1(\mathbb{C})$  alors d'après la remarque 4.4 point 4,  $\text{incr}_\delta(\omega)$  est une forme exacte sur  $\mathbb{C}$ . Ainsi on a :

$$\int_{\gamma_{\widetilde{P}_0}} \text{incr}_\delta(\omega) = \int_{\gamma} \text{incr}_\delta(\omega) = 0 \text{ par Stokes.}$$

On a montré que cette intégrale est indépendante de choix de  $\widetilde{P}_0$ .

Soient  $\gamma$  et  $\gamma'$  deux lacets homotopes dans  $\mathbb{C}^\circ$ . Leurs relevés  $\gamma_{\widetilde{P}_0}$  et  $\gamma'_{\widetilde{P}_0}$  sont aussi homotopes dans  $\widetilde{C}$  ainsi l'intégrale est bien définie sur  $\pi_1(\mathbb{C}^\circ, P_0)$  car  $\omega$  n'a pas de résidus sur  $\widetilde{C}$ . Comme l'intégrale est additive et  $H^1(\mathbb{C}^\circ, \mathbb{Z}) = \pi_1 / [\pi_1, \pi_1]$  alors l'intégrale peut être définie sur  $H^1(\mathbb{C}^\circ, \mathbb{Z})$ .  $\square$

**Remarque 4.5.** Soient  $\omega \in \widetilde{\mathcal{M}}_C^1(\mathbb{C})$  et  $P_0 \in \mathbb{C}^\circ$  tels que  $\omega$  soit holomorphe sur  $\pi^{-1}(P_0)$ , alors l'incrément peut être défini sur  $H^1(\mathbb{C}^\circ, \mathbb{Z})$  :

$$\text{incr}(\omega) : H^1(\mathbb{C}^\circ, \mathbb{Z}) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{C}, d\mathcal{M}_C)$$

car  $\Gamma(\mathbb{C}, d\mathcal{M}_C)$  est abélien.

De plus  $\text{incr}(\omega)$  est un morphisme de groupe car on a :

$$\text{incr}_{\gamma\delta}(\omega) = (\gamma\delta)^* \omega - \omega = \delta^*(\gamma^* \omega - \omega) + \delta^* \omega - \omega = \text{incr}_\delta(\omega) + \text{incr}_\gamma(\omega)$$

en effet  $\delta^*(\text{incr}_\gamma(\omega)) = \text{incr}_\gamma(\omega)$  car l'incrément n'est pas un multi-forme (cf. la remarque 4.4 point 4).

**Proposition 4.2.** Soit  $\omega \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C})$ . Dans un voisinage de  $\widetilde{D}_j^i$ ,  $\omega$  s'écrit :

$$\omega = \sum_{k \geq -K} c_{k,j} z_j^k dz + d(\zeta \widetilde{\phi}_{2,j}) \quad (4)$$

où  $c_{k,j} \in \mathbb{C}$  et  $\widetilde{\phi}_{2,j}$  sont uniquement déterminées par  $2i\pi d\widetilde{\phi}_{2,j} = \text{incr}_{d_j}(\omega)$  et  $\widetilde{\phi}_{2,j}(P_0) = 0$ . On appelle **partie méromorphe** la série  $\sum_{k \geq -K} c_{k,j} z_j^k$ , la **partie polaire de Laurent** le polynôme  $\sum_{k=-K}^{-1} c_{k,j} z_j^k$  et le **résidu** en  $\widetilde{D}_j^i$ , noté  $\text{res}_{\widetilde{D}_j^i}(\omega)$ , le nombre complexe  $c_{-1,j}$ .

**Preuve :** – **Existence :**

Soit  $\omega \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{C})$  alors, d'après la remarque 4.4 point 4, on a  $\text{incr}_{\gamma}(\omega) = 2ik_{\gamma}\pi\phi_{2,j} = 2ik_{\gamma}\pi d\widetilde{\phi}_{2,j}$  car l'incrément est une 1-forme exacte sur  $\mathbb{C}$ . Ainsi sur  $\widetilde{D}_j^i$  on a :

$$\omega = \phi_{1,j} + \zeta \phi_{2,j} = \phi_{1,j} + d(\zeta \widetilde{\phi}_{2,j}) - \widetilde{\phi}_{2,j} d\zeta = \phi_{1,j} - \widetilde{\phi}_{2,j} \frac{dz_j}{z_j} + d(\widetilde{\phi}_{2,j} \zeta).$$

– **Unicité :**

D'après la remarque 4.4 point 3,  $\phi_{1,j}$  et  $\phi_{2,j}$  sont uniques et pour  $\widetilde{\phi}_{2,j}$  on a le choix d'une constante mais la condition  $\phi_{2,j}(P_0) = 0$  impose cette constante.  $\square$

**Définition 4.4.** Une 1-forme  $\omega \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}}^1(U)$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$ , est appelée :

- (i) **holomorphe** en  $Q_j \in U$  si la partie polaire de Laurent de  $\omega$  au voisinage de  $Q_j$  vaut 0 ;
  - (ii) **holomorphe** en  $P \in U$ ,  $P \neq Q_j$ , si  $\omega$  est holomorphe en tout  $\widetilde{P} \in \pi^{-1}(P)$  ;
  - (iii) **1-multi-forme holomorphe** sur  $U$  si  $\omega$  est holomorphe en tout  $P \in U$ .
- On note  $\widetilde{\Omega}_{\mathbb{C}}^1$  le faisceau sur  $\mathbb{C}$  des 1-multi-formes abéliennes holomorphes.

## 5 Structure de Frobenius locale sur un sous-espace de $\mathbf{H}_{g,t}$

### 5.1 Définition des formes descendantes

Dans le paragraphe 3.3, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{C}}_U & \xrightarrow{\pi_U} & \mathcal{C}_U^{\circ} \\ \widetilde{\kappa} \downarrow & \swarrow \kappa & \\ \mathbf{H}_{g,tU} & & \end{array}$$

**Définition 5.1.** Soit  $V$  un ouvert de  $\tilde{\mathcal{C}}_U$ , le faisceau des **1-multi-formes holomorphes de  $\tilde{\mathcal{C}}_U$  relative à  $\mathbf{H}_{g,t_U}$** , noté  $\Omega_{\tilde{\mathcal{C}}_U/\mathbf{H}_{g,t_U}}^1$ , est l'ensemble des 1-forme holomorphe  $\omega$  qui s'écrivent localement :  $\omega(\underline{u}, z) = f(\underline{u}, z)dz$  où  $(\underline{u}, z)$  sont des coordonnées locales sur  $\tilde{\mathcal{C}}_U$ .

**Définition 5.2.** Une 1-forme  $\omega \in \tilde{\kappa}_* \Omega_{\tilde{\mathcal{C}}_U/\mathbf{H}_{g,t_U}}^1(V)$ ,  $V \subset \mathbf{H}_{g,t_U}$ , est appelée une 1-forme descendante sur  $V$  si :

1. pour tout  $[\lambda] \in V$  et pour tout  $\lambda \in [\lambda]$ ,  $\omega(\Pi(\lambda), \cdot)$  appartient à  $\tilde{\Omega}_{\mathbb{C}(\lambda)}^1$  ;
2. les  $a$ -périodes sont constantes ;
3. les incréments sont constants et à valeur dans  $\mathbb{C}(\Lambda)d\Lambda$ .

On note par  $\Omega \subset \tilde{\kappa}_* \Omega_{\tilde{\mathcal{C}}_U/\mathbf{H}_{g,t_U}}^1$  le faisceau des formes descendantes.

Pour  $\omega \in \Omega(V)$ , soit  $H_\omega$  l'ensemble des  $[\lambda] \in V$  tels que pour  $i = 1, \dots, N$  on ait  $\omega(\Pi([\lambda]), P_i([\lambda])) \neq 0$ .

## 5.2 Définition de la structure de Frobenius locale sur $H_\omega$

Soit  $M$  une variété complexe. On note  $\Theta_M$  le faisceau des champs de vecteurs holomorphes sur  $M$  et  $\mathcal{O}_M$  le faisceau des fonctions holomorphes sur  $M$ .

**Définition 5.3 (Structure de Frobenius).** [Sab01, p. 209] Sur chaque espace tangent de  $M$ , on se donne une forme bilinéaire non dégénérée  $g$ , un produit  $\star$  associatif et commutatif d'élément unité  $e$ . On dit que  $M$  est muni d'une **structure de Frobenius** si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. la métrique  $g$  est plate et  $\nabla(e) = 0$  où  $\nabla$  est la connexion sans torsion associé à  $g$  ;
2.  $\nabla c$  est symétrique où  $c(\xi_1, \xi_2, \xi_3) := g(\xi_1 \star \xi_2, \xi_3)$  pour tout  $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \Theta_M$  ;
3. il existe un champ de vecteurs  $\mathfrak{E}$ , appelé champ d'Euler, et un nombre complexe  $D$  tels que ;

(a) l'endomorphisme  $\nabla \mathfrak{E}$  de  $\Theta_M$  est une section  $\nabla$ -horizontale du faisceau  $\text{End}_{\mathcal{O}_M}(\Theta_M)$  ;

(b) on a  $\mathfrak{L}_E(g(\xi, \eta)) - g(\mathfrak{L}_E \xi, \eta) - g(\xi, \mathfrak{L}_E \eta) = D \cdot g(\xi, \eta)$  pour tout champs  $\xi, \eta$  ;

(c) on a  $\mathfrak{L}_E(\xi \star \eta) - \mathfrak{L}_E \xi \star \eta - \xi \star \mathfrak{L}_E \eta = \xi \star \eta$  ;

On note  $D := \mathfrak{L}_{\tilde{e} + \partial_\lambda}$  et  $D_E := \mathfrak{L}_{\tilde{E} + \Lambda \partial_\lambda}$ . Comme  $D$  et  $D_E$  agissent sur  $\tilde{\kappa}_* \Omega_{\tilde{\mathcal{C}}_U/\mathbf{H}_{g,t_U}}^1$ , on définit  $\Omega_0 := \ker(D) \cap \Omega$ .

**Définition 5.4.** 1. Une **forme primitive** est une section du faisceau  $\Omega_0$ .  
2. Une forme primitive  $\omega$  est appelée **primitive homogène** s'il existe un nombre complexe  $[\omega]$  tel que  $D_E \omega = [\omega] \omega$ .

Pour  $\omega \in \Omega_0$ , on pose  $g_\omega := \sum_{n=1}^N \left( \text{res}_{P_n} \frac{\omega^2}{d\Lambda} \right) (du_n)^2$ .

**Théorème 5.1.** *Soit  $\omega \in \Omega_0$ .  $(H_\omega, \circ, g_\omega)$  est un structure de Frobenius avec comme élément unité  $e := \sum e_n$  et comme champ d'Euler  $\mathfrak{E} := \sum u_n e_n$ .*

## Références

- [Dub93] Dubrovin. Geometry of 2d topological field theories. pages 120–348, 1993.
- [Ful69] Fulton. Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves. pages 542–575, 1969.
- [God71] Godbillon. *Eléments de topologie algébrique*. Collection Méthodes. Hermann Paris, 1971.
- [Mir91] Miranda. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, volume 5 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 1991.
- [Ros98] Rosellen. *Hurwitz spaces and Frobenius manifolds*. preprint, 1998.
- [Sab01] Sabbah. *Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius. Une introduction*. preprint, 2001.