

Exercices de Géométrie

Jacques Lafontaine

Ces exercices accompagnent le cours dont le résumé se trouve ici. Il est conseillé de les compléter en formulant et en résolvant pour chaque énoncé de géométrie sphérique (resp. hyperbolique) l'énoncé correspondant en géométrie hyperbolique (resp. sphérique).

1 Symétries glissées

Démontrer que la composée de deux symétries glissées d'axes orthogonaux est une symétrie par rapport à un point (rotation d'angle π).

Indication : utiliser la partie linéaire.

À quelle condition deux symétries glissées commutent-elles ?

2 Quelques propriétés du groupe des isométries de la sphère

1° Montrer que si deux applications f et g d'un ensemble E dans lui-même commutent, alors chacune d'elle laisse stable l'ensemble des points fixes de l'autre.

2° Montrer que la seule isométrie de S^2 , autre que l'identité, qui commute avec toute autre, est l'antipodie (restriction à $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ de $x \mapsto -x$).

3° Montrer que deux isométries *directes* f et g de S^2 commutent si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :

a) elles sont les restrictions à S^2 de deux rotations de même axe ;

b) elles sont les restrictions à S^2 de deux retournements d'axes orthogonaux (on rappelle qu'un retournement est une rotation d'angle π).

4° Que peut-on dire du groupe engendré par f et g dans le cas 3° b) ?

3 Groupe de Klein

On rappelle que le *groupe de Klein* K est l'unique groupe non cyclique à 4 éléments : chaque élément différent du neutre est d'ordre 2, et le produit de deux éléments différents du neutre est égal au troisième.

1° Déterminer tous les sous-groupes du groupe des isométries du plan euclidien, ainsi que du groupe des isométries de la sphère, qui sont isomorphes à K .

2° Même question pour le groupe des isométries du plan hyperbolique

4 Droites concourantes dans un triangle sphérique

Nous utiliserons la terminologie (classique) suivante. Les pôles d'un grand cercle C de S^2 sont les deux points d'intersection avec S^2 de la droite orthogonale au plan du grand cercle passant par le centre. Sauf mention contraire expresse, on considèrera la sphère unité.

I. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes pour un triangle sphérique T :

- a) les trois côtés sont égaux ;
- b) les trois angles sont égaux.

On dit alors que T est *équilatéral*. Si a est la longueur des côtés, et α la mesure des angles, montrer que

$$\cos \frac{a}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}.$$

Quelles sont les valeurs possibles de a et de α ?

Que se passe-t-il si on remplace la sphère de rayon 1 par la sphère de rayon r ?

II. 1° Soit C un grand cercle de la sphère unité S^2 , et $x \in S^2 \setminus C$. Montrer qu'il passe par x soit un unique grand cercle orthogonal à C , soit une infinité. Que peut-on dire, dans l'un et l'autre cas, de la fonction sur C définie par $f(y) = d(x, y)$.

2° Soit $T = \langle x, y, z \rangle$ un triangle sphérique dont deux angles au moins différent de $\frac{\pi}{2}$. On appelle *hauteurs* de T les trois grands cercles passant par un sommet de T et orthogonaux au côté opposé. Montrer que les pôles de la hauteur qui passe par x (par exemple) sont colinéaires au vecteur

$$\langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z$$

En déduire que les hauteurs de T sont "concourantes".

Que peut-on dire quand T a deux angles égaux à $\frac{\pi}{2}$?

3° Montrer de la même façon que les médianes d'un triangle sphérique sont concourantes (on pourra par exemple utiliser le produit vectoriel).

5 Itérations d'une homographie

On munit $\mathbf{C} \cup \omega$ d'une topologie en décidant que les ouverts sont soit les ouverts de \mathbf{C} , soit les réunions de ω et du complémentaire d'une partie compacte de \mathbf{C} .

1° a) Montrer pour cette topologie une suite w_n de points de \mathbf{C} converge vers ω si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} |w_n| = +\infty$.

b) Montrer, par exemple en utilisant la projection stéréographique, $\mathbf{C} \cup \omega$ est homéomorphe à S^2 .

c) Montrer que les homographies sont des homéomorphismes de $\mathbf{C} \cup \omega$.

2° Soient f une homographie non parabolique, a et b ses points fixes.

a) Rappeler pourquoi le birapport $[a; b; w; f(w)]$ est constant.

b) Cette constante, notée k_f , étant supposée de module différent de 1, montrer que l'on peut se ramener au cas où $|k_f| > 1$.

3° On se place dans la situation de 2° , b). Montrer que

$$\begin{aligned} \forall w \in \mathbf{C} \cup \omega, \quad w \neq b, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(w) = a; \\ \forall w \in \mathbf{C} \cup \omega, \quad w \neq a, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} f^n(w) = b \end{aligned}$$

(pour $n < 0$, on a posé $f^n = (f^{-1})^{-n}$).

Indication : se ramener par conjugaison à un cas où l'expression de f est particulièrement simple.

4° On suppose maintenant que $|k_f| = 1$. Montrer que pour tout x différent de a et b , les points $f^n(w)$, ($n \in \mathbf{Z}$), sont situés sur un même cercle-droite, ne contenant ni a ni b , qui rencontre orthogonalement les cercles-droites passant par a et b .

5° Sous les mêmes hypothèses que 4° , montrer que si l'argument de k_f est un multiple rationnel de π , le groupe engendré par f est un groupe cyclique fini.

6° Que peut-on dire dans le cas des itérées d'une homographie parabolique ?

6 Triangles hyperboliques

Notations. Si x et y sont deux points du plan hyperbolique, on désigne par $\langle x, y \rangle$ l'unique segment géodésique (ou géodésique minimale) qui les joint. Si x, y, z sont trois points non alignés, on désigne par \widehat{xyz} la mesure de l'angle en y des segments $\langle y, x \rangle$ et $\langle y, z \rangle$ (dans la suite, on parlera d'angle au lieu de mesure d'angle).

I. Montrer que pour un triangle hyperbolique les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) les trois côtés sont égaux ;
- b) les trois angles sont égaux.

On dit alors que T est *équilatéral*. Si a est la longueur des côtés, et α la mesure des angles, montrer que

$$\cosh \frac{a}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}.$$

Quelles sont les valeurs possibles de a et de α ?

II. 1° On considère le modèle hyperboloïde du plan hyperbolique. Soient x, y, z trois points non alignés. On désigne par a, b, c les longueurs des segments géodésiques (côtés du triangle) $\langle y, z \rangle$, $\langle z, x \rangle$, $\langle x, y \rangle$, par α, β, γ les mesures des angles en x, y, z du triangle $\langle x, y, z \rangle$. Soient u et v les vecteurs unitaires tangents en x aux segments géodésiques $\langle x, y \rangle$ et $\langle x, z \rangle$.

- a) Exprimer y (resp. z) en fonction de c, x et u (resp. de b, x et v).
- b) En déduire, en utilisant le déterminant des vecteurs x, y, z , que

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$$

(on utilisera le fait que le déterminant d'une base pseudo-orthonormée de l'espace de Minkowski par rapport à une autre est ± 1). c) Rappeler brièvement pourquoi, si d est une géodésique du plan

hyperbolique et si $p \notin d$, il passe par p une unique géodésique rencontrant d orthogonalement, et si x' est le point de rencontre de cette géodésique avec d , on a

$$\text{dist}(x, x') = \inf_{y \in d} \text{dist}(x, y) = \text{dist}(x, d).$$

2° On suppose que $\gamma = \frac{\pi}{2}$, autrement dit que le triangle est rectangle en z . Montrer que

$$\cosh a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}$$

(utiliser la formule fondamentale de la trigonométrie hyperbolique ainsi que 1° b). 3° Soit $\langle p, q, r \rangle$ un triangle du plan hyperbolique. Soit x un point de $\langle p, q \rangle$. Alors l'un des angles \widehat{pxr} ou \widehat{qxr} est supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$ (pourquoi?). On suppose que $\widehat{pxr} \geq \frac{\pi}{2}$. Montrer, en utilisant 2°, que

$$\cosh(\text{dist}(x, \langle p, r \rangle)) < \sqrt{2}.$$

4° Montrer que pour tout triangle hyperbolique, la distance d'un point situé sur un côté à la réunion des deux autres côtés est strictement inférieure à $\log(1 + \sqrt{2})$. Par exemple

$$\forall x \in \langle p, q \rangle, \text{dist}(x, \langle p, r \rangle \cup \langle q, r \rangle) < \log(1 + \sqrt{2}).$$

5° Montrer que l'inégalité précédente est optimale.

7 Trouver un triangle connaissant les milieux des côtés

Il s'agit du problème de géométrie suivant : trouver un triangle connaissant les milieux des côtés. La première partie concerne la géométrie plane, la seconde la géométrie sphérique. Elles sont "logiquement" indépendantes, mais la première peut aider beaucoup à comprendre la suivante. Le signe * désigne une question plus difficile.

I. Géométrie plane.

Rappels. La rotation d'angle π par rapport à un point A du plan euclidien, notée s_A , est caractérisée par le fait que $s_A(M) = M'$ si et seulement si A est le milieu du segment MM' (on convient, ici et dans la suite du problème, que si $M = M'$, le milieu du segment MM' est $M = M'$). La transformation s_A s'appelle aussi "symétrie ponctuelle de centre A ".

1° Montrer que le produit de deux symétries ponctuelles est une translation, et que le produit de trois symétries ponctuelles est une symétrie ponctuelle.

Peux-t-on généraliser cet énoncé?

2° Soient A, B, C trois points du plan, a le milieu de segment BC , b le milieu de segment CA , c le milieu de segment AB . Montrer que

$$s_c s_a s_b = s_A$$

Donner cinq autres relations analogues.

3° Trois points a, b et c non alignés étant donnés, montrer qu'il existe au plus un triangle dont ces points soient les milieux des côtés.

4° Montrer qu'un tel triangle existe bien.

a) par des méthodes de géométrie élémentaire.

* b) en montrant que le centre de la symétrie ponctuelle $s_c s_a s_b$ n'est ni a , ni b , ni c .

II. Géométrie sphérique.

Rappels. Soit S^2 la sphère unité de l'espace euclidien \mathbf{R}^3 . On rappelle que deux points M, M' distincts et non diamétralement opposés sont inclus dans un unique grand cercle, et que le segment MM' est l'arc de longueur inférieure à π délimité par ces points.

Soient d une droite vectorielle, A et A' ses points d'intersection avec S^2 . Le retournement d'axe d est une transformation orthogonale de \mathbf{R}^3 . Sa restriction à S^2 est une isométrie T de S^2 qui peut se définir ainsi.

a) $T(A) = A, T(A') = A'$. b) Sinon, il existe un unique grand cercle contenant M, A et A' , et M' est l'unique point de ce grand cercle, distinct de M , tel que $\text{dist}(A, M) = \text{dist}(A, M')$ (ce qui équivaut à $\text{dist}(A', M) = \text{dist}(A', M')$); dist désigne bien sûr de la distance sphérique).

Cela justifie pour T l'appellation de "symétrie ponctuelle de centre A ", et la notation s_A (attention : $s_A = s_{A'}$!).

1° Montrer que dans $SO(3)$, le produit de deux retournements est un retournement si et seulement si leurs axes sont orthogonaux. En déduire que $s_A s_B$ est une symétrie ponctuelle si et seulement si $\text{dist}(A, B) = \frac{\pi}{2}$.

2° Montrer que le produit dans $Isom(S^2)$ d'un nombre quelconque de symétries ponctuelles, s'il n'est pas l'identité, a exactement deux points fixes.

3° Soit (ABC) un triangle sphérique, a le milieu de segment BC , b le milieu de segment CA , c le milieu de segment AB . Montrer que

$$(s_c s_a s_b)(A) = A$$

Donner, en s'inspirant de I.3° , cinq relations analogues.

4° a) Soit (abc) un triangle sphérique dont les trois côtés ont pour longueur $\frac{\pi}{2}$. Montrer que les trois angles sont aussi égaux à $\frac{\pi}{2}$.

b) Existe-t-il de tels triangles?

c) Montrer que $s_a s_b s_c = Id$.

d) Montrer qu'il existe une infinité de triplets A, B, C de points de S^2 tels que

a, B, C appartiennent à un même grand cercle et $\text{dist}(a, B) = \text{dist}(a, C)$;

b, C, A appartiennent à un même grand cercle et $\text{dist}(b, C) = \text{dist}(b, A)$;

c, A, B appartiennent à un même grand cercle et $\text{dist}(c, A) = \text{dist}(c, B)$.

* e) Que faudrait-il préciser si on voulait montrer l'existence de triangles ABC dont a, b et c soient les milieux des côtés?

5° Soit maintenant (abc) un triangle sphérique ayant deux angles égaux à $\frac{\pi}{2}$, le troisième étant différent de $\frac{\pi}{2}$. Montrer qu'il n'existe aucun triangle sphérique (ABC) dont a, b et c soient les milieux des côtés.

Indication : en supposant par exemple que c'est l'angle en b qui est différent de $\frac{\pi}{2}$, montrer que

$$(s_c s_a s_b)(b) = b \quad \text{et que} \quad s_c s_a s_b \neq Id.$$

*6° Montrer que si (abc) est un triangle sphérique dont au plus un angle est égal à $\frac{\pi}{2}$, il existe un triangle sphérique (ABC) et un seul dont a , b et c soient les milieux des côtés.

d) Montrer que pour tout x du segment bc , $\text{dist}(a, x) = \frac{\pi}{2}$. En déduire que si x est intérieur au triangle, $\text{dist}(a, x) < \frac{\pi}{2}$.

Indication : partir de A intérieur au triangle $(a'bc)$, où $a' = -a$.

III. On peut bien sûr faire la même étude en géométrie hyperbolique.

8 Isométries paraboliques

1° Dans le demi-plan de Poincaré, montrer que

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \text{dist}_P(x_1 + iy, x_2 + iy) = 0 \quad (x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont réels, } y \text{ réel positif})$$

Remarque : il n'est pas forcément nécessaire de calculer la distance pour répondre à cette question.

2° Soient D et D' deux géodésiques distinctes de P ayant un point commun à l'infini. Montrer que $\text{dist}_P(D, D') = 0$.

3° Montrer que si T est une isométrie parabolique de P ,

$$\inf_{z \in P} \text{dist}(z, T(z)) = 0.$$

4° Soit T une isométrie directe de P , sans point fixe dans P , telle que $\inf_{z \in P} \text{dist}(z, T(z)) = 0$. Montrer que T est parabolique.

9 Quelques propriétés du groupe des isométries du plan hyperbolique

1° a) Montrer que les isométries du demi-plan de Poincaré qui fixent le point i peuvent se mettre sous la forme

$$z \mapsto \frac{\cos \theta z + \sin \theta}{-\sin \theta z + \cos \theta}.$$

b) Notons $R(\theta)$ l'isométrie ainsi définie. A quelle condition a-t-on $R(\theta_1) = R(\theta_2)$?

2° En déduire que pour tout $p \in P$, il existe une infinité d'isométries elliptiques ayant p pour point fixe.

3° Montrer le centre du groupe $\text{Isom}^+(P)$ est réduit à l'élément neutre.

4° a) Soient T_1 et T_2 deux isométries directes de P , du même type, et ayant les mêmes points fixes. Montrer que T_1 et T_2 commutent.

b) Réciproquement, que peut-on dire de deux isométries directes qui commutent ?

5° Soit E un ensemble muni d'une action transitive d'un groupe G . Pour $x \in E$, on pose $G_x = \{g \in G, g(x) = x\}$. Montrer que pour $x, y \in E$, les groupes G_x et G_y sont isomorphes.

6° Déterminer G_x dans les cas suivants :

a) E est le plan euclidien \mathbf{R}^2 , $G = \text{Isom}^+(\mathbf{R}^2)$.

b) $E = S^2$, $G = \text{Isom}^+(S^2)$.

c) $E = P$, $G = \text{Isom}^+(P)$. Dans ce dernier cas, on procèdera de deux façons différentes : en se ramenant au disque de Poincaré, ou en utilisant le 1°.

d) Même question, en remplaçant, dans chacun des trois cas précédents, Isom^+ par Isom .

10 Produit de deux inversions

Dans tout ce problème, on travaille dans la droite projective complexe vue comme $\mathbf{C} \cup \omega$. Le mot inversion désigne une inversion-symétrie, le mot cercle un cercle-droite.

1° Montrer que toute homothétie de centre a s'écrit, d'une infinité de façons, comme le produit de deux inversions de pôle a .

2° Montrer que toute homographie parabolique peut s'écrire, d'une infinité de façons, comme le produit de deux inversions dont les ensembles de points fixes sont tangents. Indication : on rappelle que toute homographie parabolique est conjuguée à une translation.

Montrer que réciproquement, le produit de deux inversions-symétries dont les ensembles de points fixes sont tangents est une homographie parabolique.

3° Soit f une homographie non parabolique de points fixes a et b . On rappelle que le birapport $[a, b, z, f(z)]$ est constant. Soit k_f cette constante. Montrer que si k_f est réel, alors f est produit de deux inversions.

4° Montrer que, si k_f est un nombre complexe de module 1, f est encore le produit de deux inversions

5° Soient I_1 et I_2 deux inversions. On suppose que $\text{card}(\text{Fix}(I_1) \cap \text{Fix}(I_2)) = 2$ (*Attention : il s'agit de l'intersection dans $\mathbf{C} \cup \omega$*).

a) Montrer que $f = I_1 \circ I_2$ est une homographie non parabolique, et que $|k_f| = 1$

b) Sous les mêmes hypothèses, montrer que I_1 et I_2 commutent si et seulement si les cercles-droites $\text{Fix}(I_1)$ et $\text{Fix}(I_2)$ sont orthogonaux. Que vaut alors k_f ?

6° On considère maintenant deux inversions telles que $\text{Fix}(I_1)$ et $\text{Fix}(I_2)$ soient non vides, et que $\text{Fix}(I_1) \cap \text{Fix}(I_2) = \emptyset$. On suppose de plus que $\text{Fix}(I_1)$ est une droite.

a) Montrer que $\text{Fix}(I_2)$ est un "vrai" cercle.

b) Montrer (par exemple par un calcul direct) que $I_1 \circ I_2$ a deux points fixes, situés sur la droite passant par le centre de $\text{Fix}(I_2)$ et orthogonale à $\text{Fix}(I_1)$. Si $f = I_1 \circ I_2$, montrer que k_f est réel.

c) On note a et b ces points fixes. Montrer que tout cercle passant par a et b est globalement invariant par I_1 et I_2 , et orthogonal à $\text{Fix}(I_1)$ et $\text{Fix}(I_2)$.

d) Soit J une inversion de pôle a ou b . Montrer que $J(\text{Fix}(I_1))$ et $J(\text{Fix}(I_2))$ sont deux cercles concentriques. En déduire une autre preuve de ce que k_f est réel. Montrer que ce réel est positif.

7° On fait les mêmes hypothèses qu'au 6°, sauf que $\text{Fix}(I_1)$ n'est plus nécessairement une droite. Montrer que k_f est encore un réel positif.

8° En déduire que, si C_1 et C_2 sont deux cercles disjoints, il existe une inversion J telle que $J(C_1)$ et

$J(C_2)$ soient des cercles concentriques.

9° On suppose maintenant que l'un au moins des ensembles $\text{Fix}(I_1)$ et $\text{Fix}(I_2)$ est vide. Montrer que tout point fixe de $f = I_1 \circ I_2$ est sur la droite qui joint les pôles d'inversion (raisonner par l'absurde, en montrant que sinon on aurait quatre points fixes). Montrer ensuite qu'il y a deux points fixes. En déduire que k_f est réel.

11 Ensemble des points à distance donnée d'une droite hyperbolique

1° Soit d_o la droite hyperbolique du demi-plan de Poincaré H^2 représentée par la demi-droite $\{(x, y), x = 0, y > 0\}$. Ecrire la symétrie (hyperbolique) par rapport à cette droite.

2° On se place toujours dans H^2 .

a) Soit $z \notin d_o$. Montrer qu'il existe une unique droite hyperbolique δ_0 contenant z et orthogonale à d_o .

b) Soit p l'intersection de d_o et δ_0 . Montrer que $\text{dist}(z, p)$ ne dépend que de la valeur absolue l'angle du vecteur \vec{Oz} avec la droite d_o .

c) Soit α cet angle. Calculer $\text{dist}(z, p)$ en fonction de α .

3° a) Montrer que le groupe des isométries du plan hyperbolique opère transitivement sur l'ensemble des droites hyperboliques.

b) Soit d une droite hyperbolique et $m \notin d$. Montrer qu'il existe une droite hyperbolique δ et une seule contenant m et orthogonale à d .

c)* Soit p l'intersection $\delta \cap d$. Montrer que pour tout $q \in d$ différent de p on a l'inégalité stricte

$$\text{dist}(m, q) > \text{dist}(m, p).$$

Indication : en utilisant la symétrie hyperbolique \bar{r}_d , se ramener à l'inégalité du triangle stricte.

4° D'après 3° c), $\text{dist}(m, p)$ est la distance de m à la droite hyperbolique d . On revient à la droite hyperbolique d_o du 1°. Montrer que l'ensemble

$$\{z \in H^2, \text{dist}(z, d_o) = u\}$$

est formé de deux demi-droites *euclidiennes* passant par 0.

5° Soit maintenant une droite hyperbolique de H^2 dont les points à l'infini sont les réels a et b .

a) Montrer que pour tout réel positif u , l'ensemble

$$\{z \in H^2, \text{dist}(z, d) = u\}$$

est formé de deux arcs de cercles euclidiens d'extrémités a et b .

b) Montrer que ces deux arcs de cercles se correspondent par la symétrie \bar{r}_d .

6° Réciproquement, soit Γ un arc de cercle euclidien, contenu dans H^2 , d'extrémités a, b appartenant à \mathbf{R} . On suppose que Γ n'est pas orthogonal à \mathbf{R} , autrement dit que Γ n'est pas une droite hyperbolique. Montrer qu'il existe une droite hyperbolique d et un réel u , déterminés de façon unique, tels que

$$\Gamma \subset \{z \in H^2, \text{dist}(z, d) = u\}.$$

7° Quels sont, dans le disque de Poincaré, les énoncés analogues à 5° et 6° ? Justifiez votre réponse.

12 Anneau orthogonal

Il s'agit d'une configuration remarquable de cercles de l'espace

Les trois premières questions sont des préliminaires : ne pas hésiter à admettre leurs résultats si besoin est.

On rappelle que deux cercles du plan euclidien sont dits orthogonaux s'ils s'intersectent et si les tangentes aux points d'intersection sont orthogonales. De même, deux sphères de l'espace euclidien sont orthogonales si elles s'intersectent et si les plans tangents aux points d'intersection sont perpendiculaires.

Si a, b, c sont trois points alignés distincts d'un espace affine réel, on note $\frac{\overrightarrow{ca}}{\overrightarrow{cb}}$ le réel λ tel que $\overrightarrow{ca} = \lambda \overrightarrow{cb}$;

si a, b sont deux points d'une droite *orientée* d'un espace affine euclidien, on note \overline{ab} le réel μ tel que $\overrightarrow{ab} = \mu \overrightarrow{u}$, où \overrightarrow{u} est le vecteur unitaire définissant l'orientation.

1° Soient a, b, c, d quatre points de la droite affine réelle, et m le milieu du segment $[a, b]$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\text{a) } [a, b, c, d] = -1; \quad \text{b) } (c - m)(d - m) = (a - m)^2.$$

On pourra se ramener au cas où l'origine est en m , en expliquant avec précision pourquoi il suffit de traiter ce seul cas particulier.

2° Soient maintenant a, b, c, d quatre points alignés distincts d'un espace affine euclidien. On définit leur *birapport* $[a, b, c, d]$ par la formule

$$[a, b, c, d] = \frac{\overrightarrow{ca}}{\overrightarrow{cb}} : \frac{\overrightarrow{da}}{\overrightarrow{db}}.$$

Vérifier que pour quatre points de la droite affine réelle, on retrouve la définition classique, et montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

$$\text{a) } [a, b, c, d] = -1; \quad \text{b) } \overline{mc} \cdot \overline{md} = \overline{ma}^2,$$

où l'on a désigné par m le milieu du segment $[a, b]$.

Montrer, sans utiliser l'équivalence, que la propriété b) ne dépend pas de la structure euclidienne.

3° Soient C et C' deux cercles orthogonaux d'un plan euclidien. Que peut-on dire de leurs images par une inversion dont le pôle se trouve sur l'un d'entre eux ?

4° Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

1. C et C' sont orthogonaux ;
2. Il existe un diamètre de C intersectant C' en a et b , C' en c et d de façon que $[a, b, c, d] = -1$.
3. Même propriétés pour *tous* les diamètres de C intersectant C' .

5° On identifie \mathbf{R}^4 à \mathbf{C}^2 , et la sphère unité S^3 à

$$\{(z, z') \in \mathbf{C}^2, |z|^2 + |z'|^2 = 1\}.$$

Montrer que les parties de S^3 définies respectivement par $z = 0$ et $z' = 0$ sont deux cercles disjoints. On effectue la projection stéréographique de S^3 de pôle $(1, 0, 0, 0)$ sur le 3-plan $x = 0$ (où l'on a posé $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$). Faire un dessin commenté de la figure formée par les images de ces cercles.

6° On considère, dans un espace euclidien de dimension 3, la figure formée par un cercle et son axe (c'est-à-dire la droite orthogonale au plan du cercle et passant par son centre). On effectue une inversion dont le pôle est sur le cercle. Montrer que l'on obtient une figure du même type.

7° On effectue maintenant une inversion dont le pôle n'est ni sur le cercle, ni sur la droite.

a) Montrer que l'on obtient deux cercles tels que toute sphère-plan passant par l'un est orthogonale à

toute sphère-plan passant par l'autre.

b) Montrer que ces cercles sont situés dans des plans perpendiculaires, dont l'intersection est un diamètre commun aux deux cercles.

c) Soient a, b (resp. a', b') les intersections de ce diamètre avec les deux cercles. Montrer que le birapport $[a, b, a', b']$ vaut -1 .

8° On appelle *anneau orthogonal* la figure formée par deux cercles de l'espace euclidien de dimension 3 satisfaisant aux propriétés b) et c) de la question précédente. Montrer que l'inverse d'un anneau orthogonal est soit un anneau orthogonal, soit un cercle et son axe.

13 Polygones dans la sphère ou le plan hyperbolique

Notations : sauf dans la question 7°, la sphère unité et le plan hyperbolique sont plongés dans l'espace euclidien ou minkowskien de dimension 3. La même notation pourra donc désigner, indifféremment, un point de la sphère (ou du plan hyperbolique) ou un vecteur de l'espace vectoriel correspondant.

Pour deux points x et y de la sphère ou du plan hyperbolique, on note $\langle x, y \rangle$ le segment géodésique qui les joint (ce qui sous-entend que $x + y \neq 0$ dans le cas de la sphère).

On dit qu'une partie (propre) A de la sphère ou du plan hyperbolique est *convexe* si quels que soient x et y dans A , le segment $\langle x, y \rangle$ est contenu dans A .

Soit $\langle x, y, z \rangle$ un triangle sphérique rectangle en x . On pose $a = d(x, y)$ et $b = d(x, z)$, et on désigne par u et v les vecteurs unitaires tangents en x aux segments géodésiques orientés de x vers y et de x vers z respectivement.

1° Montrer que le vecteur y (resp. z) est une combinaison linéaire de x et u (resp. de x et v) que l'on précisera.

2° Montrer que la géodésique passant par z (resp. y) et orthogonale au segment géodésique $\langle x, z \rangle$ (resp. $\langle x, y \rangle$) admet une paramétrisation de la forme

$$s \rightarrow z \cos s + u \sin s \quad (\text{resp. } s \rightarrow y \cos s + v \sin s)$$

3° Soit $\langle x, y, t, z \rangle$ un quadrilatère convexe. Cela signifie :

a) que deux des sommets x, y, z, t ne sont pas diamétralement opposés ;

b) que le complémentaire de la réunion des segments géodésiques $\langle x, y \rangle, \langle y, t \rangle, \langle t, z \rangle, \langle z, x \rangle$ a deux composantes connexes, dont une est convexe.

Montrer que la somme des angles est strictement supérieure à 2π .

4° On suppose que les angles en x, y et z sont droits. On pose

$$a = d(x, y); \quad b = d(x, z); \quad s = d(z, t); \quad s' = d(y, t).$$

En s'inspirant de 2° et en exprimant t de deux façons différentes, établir les relations

$$\begin{aligned} \cos b \cos s &= \cos a \cos s' \\ \sin b \cos s &= \sin s' \\ \sin a \cos s' &= \sin s. \end{aligned}$$

Comment s'interprètent ces relations quand a et b tendent vers 0 ou quand on remplace la sphère unité par une sphère dont le rayon tend vers l'infini ?

Exprimer s et s' en fonction de a et b .

5° Soit α l'angle en t de ce quadrilatère. Montrer que $\cos \alpha = -\sin a \sin b$ (il est déconseillé d'utiliser les formules de la question précédente, conseillé de chercher l'angle des plans vectoriels contenant les segments géodésiques $\langle y, t \rangle$ et $\langle z, t \rangle$, et d'utiliser la base orthonormée x, u, v).

6° Que donnent les formules du 4° si on remplace la sphère par le plan hyperbolique ?

En déduire que si $\langle x, y, t, z \rangle$ est un quadrilatère convexe du plan hyperbolique ayant trois angles droits en x, y, z , et si $a = \text{dist}(x, y)$, $b = \text{dist}(x, z)$, alors $\sinh a \sinh b < 1$.

7° On travaille maintenant dans le disque de Poincaré. Soient $\langle 0, y \rangle$ et $\langle 0, z \rangle$ deux segments géodésiques issus du centre du disque, et orthogonaux en 0. Montrer que si les distances $d(0, y)$ et $d(0, z)$ sont assez grandes, les géodésiques orthogonales à $\langle 0, y \rangle$ et $\langle 0, z \rangle$ en y et z respectivement ne se rencontrent pas (une figure claire sera très bien accueillie).

En déduire l'existence, dans le plan hyperbolique, de pentagônes ayant cinq angles droits.

Quel rapport avec la question précédente ?

8° Montrer que si un quadrilatère convexe du plan hyperbolique a 3 angles droits, le quatrième angle est strictement inférieur à $\frac{\pi}{2}$. Avec les notations du 6°, montrer que cet angle est donné par la formule

$$\cos \alpha = \sinh a \sinh b.$$

Discuter le cas limite.

9° Soit $\langle x, y, z \rangle$ un triangle du plan hyperbolique rectangle en x . Comme auparavant on pose $a = d(x, y)$ et $b = d(x, z)$. Comment s'interprète le nombre $\sinh a \sinh b$ dans le cas où il est supérieur à 1 ?

NB. En suivant les mêmes idées, on peut montrer l'existence, dans le plan hyperbolique, d'hexagones dont tous les angles sont droits. En recollant deux exemplaires d'un tel hexagone le long d'un côté sur deux, on obtient ce qu'on appelle un *pantaloon*. On appelle ainsi une surface à bord, localement isométrique au plan hyperbolique, dont le bord est formé de trois courbes fermées simples qui sont des géodésiques. Pour plus de détails, voir **Gallot-Hulin-Lafontaine**, III.L. A partir de là, on peut obtenir une surface de genre $g > 1$ (voir la dernière section du cours pour la terminologie), compacte sans bord, en recollant $2g - 2$ pantalons.

14 Un peu de topologie

1° On rappelle que le ruban de Möbius est obtenu en quotientant \mathbf{R}^2 par l'action $n \cdot (x, y) = (x + n, (-1)^n y)$ de \mathbf{Z} . Si p est l'application de passage au quotient, $p(\mathbf{R} \times \{0\})$ est homéomorphe à S^1 . Montrer que son complémentaire est connexe (c'est l'explication de ce qui arrive quand on découpe un ruban de Möbius fabriqué avec des ciseaux et de la colle).

2° Montrer que le complémentaire d'un disque dans le plan projectif est homéomorphe au ruban de Möbius. Indication : quotienter par l'antipodie la partie $\{(x, y, z) \in S^2, |z| \leq \frac{1}{2}\}$.

3° Montrer que la bouteille de Klein peut s'obtenir en recollant deux rubans de Möbius suivant leurs bords.