Résumé d'un cours de Géométrie

Jacques Lafontaine

1 Introduction

Ce cours a été donné il y a quelques années en Maîtrise, à une époque où les autorités ministérielles et les instances universitaires n'avaient pas encore réussi à "balkaniser" l'enseignement des mathématiques. Les fondements des géométries euclidienne, sphérique et hyperbolique sont exposés en parallèle, en s'appuyant sur l'utilisation commune des *reflexions*. Vues avec des yeux euclidiens, les réflexions hyperboliques sont des *inversions* (voir **8.1**). Il aurait été dommage de ne pas traiter pour elle-même cette belle transformation, popularisée par Escher.

Il s'agit d'un résumé "détaillé" si j'ose dire. Il devrait donc être possible de boucher les trous. C'est un même un excellent exercice.

La topologie est traitée systématiquement en **11**, mais des aspects élémentaires sont abordés avant. Une fois n'est pas coutume, on commence par la bibliographie. Je ferai référence aux ouvrages suivants :

M. AUDIN, Géométrie, Collection "De la Licence à l'agrégation", Belin 1997.

M. BERGER, Géométrie, Nathan (2 tomes) (très riche, pas facile, à ne pas lire linéairement, mais on y trouve tout).

S. GALLOT, D. HULIN, J. LAFONTAINE, Riemannian Geometry, Springer (pour la géométrie hyperbolique uniquement).

D. LEHMANN, R. BKOUCHE, Géométrie élémentaire, PUF

R. MNEIME, F. TESTARD, Groupes de Lie classiques, Hermann (style et contenu très différents de Berger, pas facile non plus).

J. STILWELL, Geometry of surfaces, Springer

Un exercice prioritaire est d'illustrer ce résumé qui, faute de temps, ne comporte pas de figures. Des blancs ont été réservés pour ça !

2 Le groupe orthogonal

2.1 Généralités

Un espace vectoriel euclidien E est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$, c'est–à–dire une forme bilinéaire symétrique telle que la forme quadratique $x \mapsto \langle x, x \rangle$ soit définie positive. Une conséquence fondamentale de cette propriété est *l'inégalité de Schwarz*

$$\forall x, y \in E,\ \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle,$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires.

On en déduit que $\sqrt{\langle x, x \rangle}$ définit une norme sur E, appelée norme euclidienne, et notée $\|x\|$.

Si F est un sous–espace vectoriel, l'ensemble

$$\{x \in E, \forall y \in E,, \langle x, y \rangle = 0\}$$

est un espace vectoriel de dimension $\dim E - \dim F$, appelé *l'orthogonal de* F, et noté $F^\perp$. On a $E = F \bigoplus F^\perp$

Definition 2.1 *Si $u \in \mathrm{End}(E)$, la transposée de u est l'application u^* définie par*

$$\forall x, y \in E,\ \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle.$$

On a $(u^*)^* = u$, et $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$; si A est la matrice de u *par rapport à une base orthonormée*, celle de u^* est ${}^tA$.

Théorême 2.2 *Soit f une application linéaire de E dans E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$;

b) $\forall x, y \in E$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$;

c) $ff^* = I$ (ou encore : la matrice A de f par rapport à une base orthonormée vérifie $A^tA = I$.)

d) $f^*f = I$ (ou encore : la matrice A de f par rapport à une base orthonormée vérifie ${}^tAA = I$).

Les f qui satisfont à ces propriétés sont clairement inversibles et forment un groupe, noté $O(E)$, appelé groupe orthogonal. Si E est $\mathbf{R}^n$ muni de son produit scalaire standard, $O(E)$ s'identifie à l'ensemble des matrices (n, n) telles que ${}^tAA = A^tA = I$ (matrices orthogonales), et se note $O(n)$. Toute une base orthonormée de E définit, en associant à f sa matrice, un isomorphisme entre $O(E)$ et $O(n)$. Le groupe orthogonal est *compact*, car il est fermé et borné dans l'espace vectoriel des endomorphismes.

Si $f \in O(E), \det f = \pm 1$. On note $O^+(E)$ (resp. $SO(n)$) le sous–groupe de $O(E)$ (resp. de $O(n)$) des applications de déterminant égal à 1 (groupe orthogonal direct, ou groupe spécial orthogonal). On note $O^-(E)$ l'ensemble des applications orthogonales de déterminant -1.

Attention Etant donné que le déterminant d'une application linéaire en dépend pas du choix d'une base, il n'est pas nécessaire d'orienter E pour définir $O^+(E)$.

2.2 Cas de la dimension deux

Les matrices orthogonales directes d'ordre 2 sont de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{avec } a^2 + b^2 = 1.$$

Une telle matrice s'écrit

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{où } \theta \text{ est déterminé modulo } 2\pi.$$

Ainsi, $SO(2)$ est isomorphe au groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1, ainsi qu'à $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$.

Munissons maintenant E d'une *orientation*. Alors la formule du changement de base nous dit que la matrice de $f \in O^+(E)$ *est la même dans toute de la base orthonormale directe*. Cette propriété, qui vient de la commutativité de $SO(2)$, est bien sûr spécifique à la dimension 2). Cela permet de parler de la rotation d'angle θ, notée r_θ.

Les matrices orthogonales de $O^-(2)$ sont de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{avec } a^2 + b^2 = 1.$$

Si E est rapporté à une base orthonormée (e, f), et si $f \in O^-(E)$ a pour matrice dans cette base la matrice ci-dessus, on pose $(a, b) = (\cos\theta, \sin\theta)$. La droite $D = \mathbf{R}(\cos\theta/2\, e + \sin\theta/2\, f)$ est sous–espace propre pour la valeur propre $+1$, tandis que la droite $D' = \mathbf{R}(-\sin\theta/2\, e + \cos\theta/2\, f)$, orthogonale à D, est sous–espace propre pour la valeur propre -1.

On dit que f est la *réflexion orthogonale*, ou en abrégé la réflexion, par rapport à D, et on la note σ_D.

Remarque. Comme θ est déterminé module 2π, $\theta/2$ l'est modulo π, donc D et D' sont bien définies.

On sait déjà que $O^+(E)$ est un sous–groupe de $O(E)$. En dimension 2, plus précisément,

$$r_{\theta_1} \circ r_{\theta_2} = r_{\theta_1 + \theta_2}.$$

On montre aussi que

$$\sigma_{D_2} \circ \sigma_{D_1} = r_{2\alpha},$$

où r_α est une rotation qui transforme D_1 en D_2 (il y a deux telles rotations, si r_α est l'une d'elle, l'autre est $r_{\alpha+\pi}$).

Pour plus de détails, voir **Audin** ch. 2 et 3.1, ainsi que **Berger** 8.3.

2.3 Cas général

Cette partie ne sera pas utilisée dans la suite.

2.3.1 Structure des éléments de $O(E)$

Si $f \in O(E)$, il existe une décomposition de E en somme directe orthogonale, soit

$$E = E_1 \bigoplus E_{-1} \bigoplus P_1 \bigoplus \cdots \bigoplus P_r,$$

où $E_1 = \{x \in E, f(x) = x\}$, $E_{-1} = \{x \in E, f(x) = -x\}$, les P_i sont de dimension 2, laissés stables par f, et $f_{|P_i} \in SO(P_i)$. Bien entendu, certaines composantes peuvent ne pas figurer. Pour la preuve, voir **Berger**, 8.4 ou **Mneimé–Testard**, p. 35.

Conséquences

1. Si $f \in O^-(E)$, la dimension de E_{-1} est impaire (et en particulier $E_{-1} \neq 0$!).
2. Si $f \in O^+(E)$ et si E est de dimension est impaire, $E_1 \neq 0$.
3. Le groupe $O^+(E)$ est connexe par arcs, donc connexe ; $O(E)$ a deux composantes connexes.

2.3.2 Réflexions

Ce sont les transformations orthogonales pour lesquelles $\dim E_1 = n-1$ et $\dim E_{-1} = 1$. Il est d'usage de poser $E_1 = H$ (H comme hyperplan), et de désigner σ_H la réflexion laissant H fixe. Notons au passage que si une transformation orthogonale laisse fixe un hyperplan H, mais n'est pas l'identité, c'est la réflexion par rapport à H. Si $H = \mathbf{R}a^\perp$, avec $\|a\| = 1$, alors $\sigma_H(x) = x - \langle a, x\rangle a$.

On montre (exercice facile) que tout élément de $O(E)$ est produit d'au plus $\dim E$ réflexions.

Plus généralement, si F est un sous-espace vectoriel, la *symétrie par rapport à* F, notée σ_F, est définie par

$$\sigma_F(x) = x \text{ si } x \in F,\ \sigma_F(x) = -x \text{ si } x \in F^\perp.$$

Notons que

$$\sigma_F \circ \sigma_{F^\perp} = \sigma_{F^\perp} \circ \sigma_F = -I \tag{2.1}$$

2.3.3 Décomposition de Cartan, ou décomposition polaire

[1] On désigne par $\mathrm{Sym}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes symétriques de E (c'est à dire tels que $u^* = u$), et par $\mathrm{Sym}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques strictement positifs (c'est à dire tels que la forme quadratique $x \mapsto \langle x, u(x)\rangle$ est définie positive).

Théorème 2.3 *Soit E un espace vectoriel euclidien. Alors*

a) $\mathrm{Sym}^+(E)$ est un ouvert convexe de $\mathrm{Sym}(E)$;

b) L'application $(s,u) \mapsto su$ de $\mathrm{Sym}^+(E) \times O(E)$ dans $Gl(E)$ est un homéomorphisme.

Application. Le groupe $Gl(E)$ a deux composantes connexes ; $Sl(E)$ est connexe.

3 Espaces affines

Points, vecteurs ... Un couple ordonné de ponts définit un vecteur ; si on se donne une fois pour toute une origine, il revient au même de se donner un point ou de se donner un vecteur. La notion d'espace affine permet de formaliser ces propriétés, constamment utilisées, implicitement ou explicitment, dans l'eneignement élémentaire.

3.1 Généralités

Un *espace affine* sur un corps K est un ensemble E muni d'une action simplement transitive d'un espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ (vu comme groupe additif). On dit que $\overrightarrow{E}$ est l'espace vectoriel *associé* à E.

Dans cette section, pour éviter toute confusion entre un espace affine et l'espace vectoriel associé, les éléments de ce dernier seront surmontés par des flèches.

On note $t_{\overrightarrow{v}}$, et on appelle *translation de vecteur* $\overrightarrow{v}$ la bijection de E définie par $\overrightarrow{v}$. D'après la définition même d'une action de groupe, on a

$$t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{w}} = t_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}}, \tag{3.1}$$

ce qui conduit à noter *additivement* les composées de translations.

Si x et y sont deux points de E, on note $\overrightarrow{xy}$ l'unique vecteur $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$ tel que $t_{\overrightarrow{v}}(x) = y$. Alors la formule (3.1) donne

$$\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz} \quad \text{(relation de Chasles)}.$$

[1] **Mneimé–Testard** fait mention, p. 45, d'une autre décomposition qui s'appelle aussi décomposition de Cartan. La terminologie de décomposition polaire est par contre sans ambigüité

Exemples.

1. Un espace vectoriel, vu comme agissant sur lui–même par translation, est un espace affine. Regarder un espace vectoriel comme un espace affine revient à "oublier" l'origine.
2. Si f est une forme linéaire non nulle sur l'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$, alors
$$H = \{\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{E}, f(\overrightarrow{x}) = 1\}$$
est un espace affine. L'espace vectoriel associé $\overrightarrow{H}$ n'est autre que $\operatorname{Ker} f$. Cet exemple est fondamental : contrairement au précédent, ce n'est pas un espace vectoriel d'une faǫn naturelle. Signalons au lecteur curieux que tout espace affine peut être réalisé ainsi de façon "canonique", voir **Berger**, ch. **3**.

Si E est un espace affine et a un point de E, l'application
$$\overrightarrow{v} \mapsto t_{\overrightarrow{v}}(a)$$
est une bijection de $\overrightarrow{E}$ sur E. En transportant par cette bijection la structure vectorielle de $\overrightarrow{E}$, on obtient une structure d'espace vectoriel sur E. Cet espace s'appelle *le vectorialisé de* E *en* a, et se note E_a.

Une *application* f de E dans E est dite *affine* s'il existe une application linéaire $\overrightarrow{f}$ (alors unique) telle que
$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{f(x)f(y)}.$$

Notons que f est une application linéaire de E_x dans $E_{f(x)}$.

Exemple. Les translations sont des applications affines. Notons qu'une application affine f est une translation si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est l'identité.

On note $\operatorname{Aff}(E)$ l'ensemble des applications affines. L'application $f \mapsto \overrightarrow{f}$ est un morphisme (pour la composition des applications) de $\operatorname{Aff}(E)$ dans $\operatorname{End}(\overrightarrow{E})$. On vérifie que f est inversible si et seulement si $\overrightarrow{f}$ l'est. On note $GA(E)$ le groupe des transformations affines inversibles de E, et T le sous–groupe des translations. C'est un sous–groupe distingué (car c'est le noyau de $f \mapsto \overrightarrow{f}$). Plus précisément, si $g \in GA(E)$,
$$g \circ t_{\overrightarrow{v}} \circ g^{-1} = t_{\overrightarrow{g}(\overrightarrow{v})}.$$

Pour tout $x \in E$, le groupe $G_x = \{f \in GA(E),\ f(x) = x\}$ est isomorphe à $Gl(E)$, et l'application
$$(t, g) \mapsto t \circ g \quad \text{de } T \times G_x \text{ dans } GA(E)$$
est une bijection. Attention : ce n'est pas un isomorphisme de groupes.

On dit que $GA(E)$ est *le produit semi–direct* de T et G_x.

Definition 3.1 *Un groupe H est le produit semi–direct des groupes K et L si*

1. *K et L sont des sous–groupes de H, et K est distingué ;*
2. *l'application $(k, l) \mapsto kl$ est une bijection de $K \times L$ sur H.*

A l'attention des algébristes purs et durs : cette définition n'est pas la plus générale.

Pour plus de détails sur les espaces affines, voir **Audin**, ch. 1 et **Berger**, ch. 2.

3.2 Sous–espaces affines, barycentres

Definition 3.2 *Une partie d'un espace affine E est un sous–espace affine si c'est une orbite, pour l'action de $\overrightarrow{E}$ sur E, d'un sous–espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$... ou si elle est vide.*

Pour qu'une partie non vide F de E soit un sous–espace affine, il faut et suffit que F_a soit un sous–espace vectoriel de E_a pour un $a \in F$ (ou pour tout $a \in F$!). Les sous–espaces affines de dimension 0 sont les points de E. On appelle *droites* les sous–espaces de dimension 1, *hyperplans* les sous–espaces de codimension 1. Par convention, $\dim \emptyset = -1$.

Etant donnés k points $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$ de E et k scalaires $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq k}$ de somme non nulle, le *barycentre* des x_i affectés des coefficients λ_i est défini par

$$(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i)\overrightarrow{ax} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{ax_i}$$

On vérifie que x ne dépend pas du choix de a.

Si A est une partie de E, le sous–espace affine engendré par A, noté $\langle A \rangle$, est l'intersection de tous les sous–espaces affines de E qui contiennent A. C'est aussi l'ensemble des barycentres de tous les p–uplets $(1 \leq < \infty)$ de points de A ; en fait, il suffit de prendre $p = \dim E + 1$. Une caractérisation utile des sous–espaces affines est la

Proposition 3.3 *Une partie F d'un espace affine E est un sous–espace affine si et seulement si, quels que soient a et b dans F, le sous-espace affine engendré par a et b (qui est une droite si $a \neq b$) est inclus dans F*

Deux sous–espaces affines F et G sont dit *parallèles* si $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{G}$, *faiblement parallèles* si $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{G}$. Si deux sous–espaces F et G sont faiblement parallèles et d'intersection non vide, alors l'un est inclus dans l'autre. A l'opposé, on a la propriété suivante.

Proposition 3.4 *Soient F et G deux sous–espaces affines tels que $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G} = \overrightarrow{E}$. Alors $F \cap G \neq \emptyset$.*

Remarque. Sous l'hypothèse de 3.4, on a

$$\dim F \cap G = \dim \overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G} = \dim E - \dim F - \dim G$$

Ce serait grossièrement faux sinon.

4 Espaces affines euclidiens

4.1 Notions de base

On dira que E est un espace affine euclidien si $\overrightarrow{E}$ est un espace euclidien. La *distance euclidienne* sur E est définie par

$$\mathrm{dist}(a, b) = \|\overrightarrow{ab}\|$$

Proposition 4.1 (Inégalité du triangle stricte) dist *est une distance. De plus, si*

$$\mathrm{dist}(a,c) = \mathrm{dist}(a,b) + \mathrm{dist}(b,c),$$

alors b appartient au segment $[a,c]$

Remarque. N'importe quelle norme sur $\overrightarrow{E}$ permet de définir une distance. Mais l'inégalité du triangle stricte est grossièrement fausse, si l'on part par exemple de la norme sup. Rien d'étonnant : la discussion du cas d'égalité utilise le cas d'égalité dans l'inégalité de Schwarz.

Proposition 4.2 *Si $f \in GA(E)$ est telle que $\overrightarrow{f} \in O(\overrightarrow{E})$, alors f est une isométrie pour* dist.

On dira que f est une isométrie affine. En fait, nous verrons plus bas que toute isométrie de E pour dist est une isométrie affine.

4.2 Cas de la dimension 2

Commençons par des exemples d'isométries affines.

a) Si $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$, on a bien sûr la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.

b) La *rotation r_θ^a de centre a et d'angle θ)* est définie par

$$\overrightarrow{ar_\theta^a(x)} = r_\theta(\overrightarrow{ax}).$$

c) Si D est droite affine, la *réflexion $\overline{r}_D$ par rapport à D* (on dit aussi *symétrie orthogonale d'axe D* est définie par

$$\overrightarrow{a\overline{r}_D(x)} = \overline{r}_{\overrightarrow{D}}(\overrightarrow{ax}),$$

où $a \in D$ (le résultat ne dépend pas du choix de a).

Théorème 4.3 *Toute isométrie pour la distance* dist *est une isométrie affine.*

Ce résultat est la conséquence des propriétés suivantes.

Lemme 4.4 *Si a et b sont deux points distincts de E, l'ensemble des points équidistants à a et b est une droite D. C'est l'axe de l'unique réflexion orthogonale $\overline{r}_D$ qui échange a et b.*

Lemme 4.5 *Si une isométrie de E a trois points fixes* non alignés*, c'est l'identité.*

La preuve de ce lemme clé est simple et élégante. Soit f une telle isométrie, et a, b, c trois points fixes. Si f n'est pas l'identité, il existe $x \in E$ tel que $f(x) \neq x$. Alors les trois points a, b, c sont équidistants de x et $f(x)$. Par conséquent, d'après le lemme précédent, ils sont alignés.$\square$

Théorème 4.6 *Toute isométrie de E est produit de une, deux ou trois réflexions.*

Cette démarche est celle de **Stilwell**, **1.4**. et **1.5**.

Remarque. Ces résultats généraliseront facilement aux dimensions supérieures. Par contre, le paragraphe qui suit est spécifique à la dimension 2.

Le théorème 4.6 ne montre pas seulement que toute isométrie est une isométrie affine. Il permet une description précise des isométries, en étudiant les produits de réflexions.

Le produit de deux réflexions $\overline{r}_D$ et $\overline{r}_{D'}$ est une rotation (si $D \cap D' \neq \emptyset$) ou une translation de direction orthogonale à D (si D et D' sont parallèles).

Inversement, une rotation r_a^θ de centre a et d'angle θ étant donnée, ainsi qu'une droite D contenant a, il existe des droites D_1 et D_2 uniques, telles que

$$r_a^\theta = \overline{r}_D \circ \overline{r}_{D_1} = \overline{r}_{D_2} \circ \overline{r}_D.$$

On a un énoncé du même type avec les translations.

Ces propriétés permettent de montrer que le produit de trois réflexions est une *symétrie glissée*. On entend par là le produit d'une reflexion $\overline{r}_D$ et d'une translation $t_{\overrightarrow{v}}$ de vecteur parallèle à D (ces deux applications commutent).

Une réflexion peut être considérée maintenant comme un cas particulier de symétrie glissée (pour $\overrightarrow{v} = 0$).

Definition 4.7 *Une isométrie (affine) f est* directe *si* $\det(\overrightarrow{f}) = 1$, indirecte *(on dit aussi inverse) si* $\det(\overrightarrow{f}) = -1$.

Ainsi, les isométries directes sont les translations et les rotations, les isométries indirectes les réflexions et les symétries glissées. Voir le tableau récapitulatif de **Audin**, p. 72, et des détails sur ce paragraphe dans **Stilwell**, **1.5**. Notons enfin que pour l'espace $\mathbf{R}^2$ identifié à $\mathbf{C}$, les isométries directes (resp. indirectes) se mettent sous la forme

$$w \mapsto aw + b \quad \text{resp. } w \mapsto a\overline{w} + b, \text{ où } a, b \in \mathbf{C}, \ |a| = 1.$$

Pour un exercice sur les symétries glissées, cliquer ici.

4.3 Cas général

Si f est une application de E dans E, on pose

$$\mathrm{Fix}(f) = \{x \in E, f(x) = x\}$$

Si H est un hyperplan affine, il existe une unique isométrie affine, notée σ_H, telle que $\mathrm{Fix}(\sigma_H) = H$. C'est la *réflexion par rapport à H*. Si on vectorialise en un point p de H, σ_H se voit comme la réflexion vectorielle par rapport à H_p.

Notons aussi que si a et b sont deux points distincts de E, l'ensemble des $x \in E$ tels que $\mathrm{dist}(x, a)) \, \mathrm{dist}(x, b)$ est un hyperplan affine (dit *hyperplan médiateur*) du segment $[a, b]$. C'est l'ensemble des points fixes de l'unique réflexion hyperplane qui échange a et b. La situation est la même que pour dans le lemme 4.4.

A partir de lá, les mêmes argument qu'en dimension deux fonctionnent.

Théorême 4.8 *Soit f une application de E dans E telle que*

$$\forall x, y \in E, \mathrm{dist}(x, y) = \mathrm{dist}\big(f(x), f(y)\big).$$

Alors

a) $\mathrm{Fix}(f)$ *est une sous–variété affine.*

b) Si $\dim\big(\mathrm{Fix}(f)\big) = p$, *$f$ est le produit de k symétries hyperplanes, où $k \leq n - p$.*

Corollaire 4.9 *Toute isométrie (pour la métrique* dist*) d'un espace affine euclidien est une isométrie affine.*

5 Géométrie sphérique

Dans cette partie, il ne sera pas question d'espaces affines. Nous omettrons donc les flèches pour désigner des vecteurs.

5.1 Notions de base

La sphère unité d'un espace vectoriel euclidien est l'ensemble des vecteurs de norme 1. On note S^2 (sphère de dimension 2) la sphère unité d'un espace euclidien de dimension 3.

Un grand cercle de S^2 est l'intersection d'un grand cercle et d'un plan (vectoriel). Les points x et $-x$ de S^2 sont dits *antipodes*. Un arc de grand cercle de longueur inférieure ou égale à π s'appelle un segment. Si x et y ne sont pas antipodes, ils sont les extrémités d'un unique segment.

5.2 Métrique et isométries de S^2

Si $x, y \in S^2$, on pose

$$\mathrm{dist}(x, y) = \mathrm{Arccos}\langle x, y\rangle$$

Rappel : si $t \in [-1, 1]$, $\mathrm{Arccos}\, t$ désigne l'unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos\theta = t$.

On a $0 \leq \mathrm{dist}(x, y) \leq \pi$, $\mathrm{dist}(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$ et $\mathrm{dist}(x, y) = \pi$ si et seulement si x et y sont antipodes. On verra en 5.3 que dist est une distance. Ce qui suit dans ce paragraphe ne dépendant pas de cette propriété, on appelera dores et déjà isométrie de S^2 toute application qui conserve dist.

Par exemple, si $f \in O(E)$, la restriction de f à S^2 est une isométrie de S^2. Si $f = \overline{r}_P$ est la réflexion orthogonale par rapport à un plan P, on désignera par $\overline{r}_C$, où $C = P \cap S^2$, sa restriction à S^2.

Alors la situation est complètement analogue à celle de 4.2, et se démontre de la même façon (voir **Stilwell**, **3.5**).

1. Si $a, b \in S^2$, l'ensemble des points de S^2 tels que $\mathrm{dist}(x, a) = \mathrm{dist}(x, b)$ est un grand cercle C. C'est l'ensemble des points fixes de l'unique réflexion qui échange a et b.
2. Si une isométrie de S^2 a trois points fixes *non situés sur un même grand cercle*, c'est l'identité.
3. Toute isométrie de S^2 est produit de une, deux ou trois réflexions.

Conséquence : l'application de restriction de $O(E)$ dans $\mathrm{Isom}(S^2)$ est un isomorphisme.

Pour un exercice sur les isométries de S^2, cliquer ici.

5.3 Triangles sphériques

Soient p, q, r trois points distincts de S^2 tels que deux d'entre eux ne soient pas antipodes. Le triangle sphérique de sommets p, q, r est la réunion des segments d'extrémités (p, q), (q, r), (r, p). Ces segments sont les *côtés* du triangle. L'angle en p (par exemple) est l'angle des vecteurs tangents en p aux segments dont une extrémité est p. Attention : il ne s'agit pas d'angle orienté, mais d'une mesure d'angle prise entre 0 et π.

Ces notions s'étendent au cas où deux des points sont antipodes (bien que, dans ce dernier cas, les trois sommets ne suffisent pas à définir le triangle).

Théorême 5.1 (Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique) *Si les côtés d'un triangle sphérique ont pour longueurs a, b, c, les angles opposés étant A, B, C, on a*

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Preuve. Soient p,q,r les sommets correspondant aux angles A, B, C. On munit $\mathbf{R}^3$ de la base orthonormée directe dont les deux premiers vecteurs sont p et le vecteur unitÚ tangent en p au segment (p, q), orienté de p ver q. Nous noterons u ce vecteur, et v le troisième vecteur de la base. Alors

$$\begin{aligned} q &= (\cos c)p + (\sin c)u \\ r &= (\cos b)p + `(\sin b)\big((\cos A)u + (\sin A)v\big) \end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit, puisque $< p, q >= \cos A$.

Corollaire 5.2 (Inégalité du triangle stricte) *Sur* S^2, dist *définit une distance. De plus,*

$$\operatorname{dist}(p, r) = \operatorname{dist}(p, q) + \operatorname{dist}(q, r)$$

si et seulement si p,q et r appartiennent à un même grand cercle, et q à un segment d'extrémités p et r (segment unique dans le cas générique où p et r ne sont pas antipodes.

Théorême 5.3 *L'aire d'un triangle sphérique est égale à* $A + B + C - \pi$. *En particulier, la somme des angles est toujours supérieure à* π.

Preuve : voir **Lehmann**, **Stilwell** ou **Audin** (la preuve est la même dans ces trois références).

Remarque La définition rigoureuse de l'élément d'aire d'une surface utilise un peu de géométrie différentielle. On peut s'en passer ici, en admettant qu'il existe sur S^2 une unique mesure invariante par $\mathrm{Isom}(S^2)$ et de masse totale égale à 4π.

Bien que ce ne soit un peu hors sujet, je voudrais signaler l'extraordinaire subtilité des problèmes de mesure sur le plan et la sphère, et recomander le petit livre de Marc Guinot, Le paradoxe de Banach-Tarski, Editions Aleas, Lyon, en espèrant qu'on le trouve encore.

En dimension supérieure, la même définition de la distance fonctionne : on démontre l'inégalité triangulaire $\operatorname{dist}(x, z) \leq \operatorname{dist}(x, y) + \operatorname{dist}(y, z)$ en appliquant la formule de la trigonométrie sphérique au triangle de sommets x, y, z dans la sphère $S^n \cap \big(\mathbf{R}x + \mathbf{R}y + \mathbf{R}z$. Par contre, le calcul du volume des simplexes est un problème difficile : on ne sait pas, par exemple, si le volume d'un simplexe de S^3 dont les angles dièdres sont des multiples rationnels de π est un mutiple rationnel de π^2 (rappelons que le volume de la sphère unité S^3 vaut $2\pi^2$).

Pour des exercices sur les triangles sphériques, cliquer ici.

5.4 Digression : géodésiques d'un espace métrique

Soit (X, dist) un espace métrique. Si $c : [a,b] \to X$ est continue (on dit que c est une courbe paramétrée), la longueur de c est la borne supérieure des

$$\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{dist}\big(c(t_k), c(t_{k+1})\big)$$

pour toutes les subdivisions $a = t_0 < t_1 \cdots < t_p = b$ de $[a,b]$.

Pour l'espace euclidien, on retrouve la notion usuelle de longueur.

On dit que c est *segment géodésique* si quels que soient t et t', $\mathrm{dist}\big(c(t), c(t')\big) = |t - t'|$ En particulier,

1. $\mathrm{long}(c_{|[t,t']}) = |t' - t|$;
2. pour toute autre courbe γ d'extrémités $c(a)$ et $c(b)$, $\mathrm{long}(\gamma) \geq \mathrm{long}(c)$.

Exemple. Les segments de S^2 sont des segments géodésiques pour dist. Notons qu'ici aussi la longueur au sens de dist et la longueur euclidienne coïncident.

Une courbe $c : I \to X$ (I désignant un intervalle de $\mathbf{R}$, borné ou non, fermé ou non) est une géodésique si quel que soit $t \in I$, il existe un $\alpha > 0$ tel que la restriction de c à $I \cap [t - \alpha, t + \alpha]$ soit un segment géodésique.

Exemple. Soit $x \in S^2$, et u un vecteur tangent en x de norme 1. Le grand cercle $t \mapsto c(t) = (\cos t)x + (\sin t)u$ est une géodésique, car, d'après l'inégalité du triangle stricte, la restriction de c à tout intervalle de longueur inférieure à π est un segment géodésique.

Intuitivement, une géodésique réalise le minimum de la longueur parmi les courbes joignant deux de ses points, mais à condition de “ne pas aller trop loin".

Pour ce paragraphe, voir **Lehmann**.

5.5 Le plan elliptique

La géométrie sphérique et la géométrie plane présentent un certain nombre d'analogies. On a mis en évidence sur S^2 et sur R^2 une métrique dont le groupe d'isométries est doublement transitif (c'est à dire que is (a,b) et (a',b') sont deux couples de points tels que $\mathrm{dist}(a,b) = \mathrm{dist}(a',b')$ il existe une isométrie f telle que $f(a) = a'$ et $f(b) = b'$.

Notons également le rôle joué dans les deux cas par les *réflexions*. Ce sont dans les deux situations des isométries involutives (c.à d. de carré égal à l'identité) dont l'ensemble des points fixes est une géodésique ; inversement, toute géodésique est l'ensemble des points fixes d'une unique réflexions.

Au vu de toutes ces ressemblances, il est tentant d'appeler “droites" les grands cercles de S^2. ‘Hélas, la propriété fondamentale des droites du plan, à savoir que par deux points distincts il passe une droite et une seule, devient fausse en géométrie sphérique pour les points diamètralement opposés. Un moyen simple d'éliminer cette difficulté est *d'identifier* les points diamètralement opposés, c'est à dire d'introduire l'espace quotient de S^2 par la relation d'équivalence correspondante. Il n'est pas trop difficile de vérifier que la métrique et les isométries passent au quotient. Voir 11 pour quelques indications. On obtient un nouvel espace métrique, pour lequel la double transitivité sur les couples de points équidistants et les propriétés des réflexions sont encore satisfaites. Et cette fois, par deux points distincts il passe une unique droite. Les deux points d'intersections de deux grands cercles distincts sont réduits à un seul : deux droites distinctes se rencontrent toujours. C'est une géométrie sans parallèles. Elle a évidemment son analogue en dimension quelconque. L'espace sous-jacent, appelé *espace projectif*, fait l'objet de la section qui suit.

Nous verrons un peu plus loin, sous le nom de *plan hyperbolique*, un espace métrique ayant encore les mêmes propriétés, mais où cette fois il passe par tout point une infinité de parallèles à une droite donnée.

6 Espaces projectifs, théorie générale

Soit K un corps commutatif. [2] On fait opérer le groupe multiplicatif K^* par homothéties sur $K^{n+1}\setminus\{0\}$. L'ensemble des orbites de cette action est l'ensemble quotient $K^{n+1}\setminus\{0\}/K^*$, qui s'identifie aussi à l'ensemble des droites de K^{n+1}. Si $K=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, ce qui sera toujours le cas par la suite, (notons cependant que les espaces projectifs sur les corps finis ne manquent pas d'intérêt) on peut munir cet ensemble de la topologie quotient de celle de $\mathbf{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ ou $\mathbf{C}^{n+1}\setminus\{0\}$. On désigne par p l'application de passage au quotient. Pour les notions de topologie utilisées, voir **11**.

Pour $i=0,\cdots n$, soit $V_i=\{x\in K^{n+1}\setminus\{0\},\, x_i\neq 0\}$, et $U_i=p(V_i)$.

Lemme 6.1 *L'application ϕ_i de K^n dans $K^{n+1}\setminus\{0\}/K^*$ définie par*

$$\phi_i(u_1,\cdots,u_n)=p(u_1,\cdots,u_{i-1},1,u_i,\cdots,u_n)$$

est un homéomorphisme de K^n sur U_i.

Corollaire 6.2 *Pour $K=\mathbf{R}$ (resp. $K=\mathbf{C}$), $K^{n+1}\setminus\{0\}/K^*$ est une variété topologique (voir **11** de dimension n (resp. $2n$).*

Attention. La propriété d'être séparé n'est pas une conséquence du lemme, elle nécessite une démonstration à part !

Proposition 6.3 *Pour $K=\mathbf{R}$, la restriction de p à $S^n\subset\mathbf{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ passe au quotient et définit un homéomorphisme de $P^n\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}^{n+1}\setminus\{0\}/\mathbf{R}^*$.*

On note également $P^n\mathbf{C}$ l'espace $\mathbf{C}^{n+1}\setminus\{0\}/\mathbf{C}^*$. La situation est plus compliquée que dans la proposition 6.3. Il faut remplacer S^n par

$$S^{2n+1}=\{z\in\mathbf{C}^{n+1},\,\sum_{i=0}^{n}|z_i|^2=1\},$$

[2] les choses fonctionnent encore, avec quelques précautions, dans le cas non commutatif

munie de l'action du cercle S^1, vu comme l'ensemble des nombres complexes de module 1, définie par

$$u \cdot z = (uz_0, \cdots, uz_n).$$

L'espace projectif complexe $P^n\mathbf{C}$ s'identifie à l'ensemble des orbites de cette action, qui sont des cercles.

Théorême 6.4 *La droite projective réelle $P^1\mathbf{R}$ est homéomorphe à S^1. La droite projective complexe $P^1\mathbf{C}$ est homéomorphe à S^2.*

Ces homéomorphismes peuvent être explicités de plusieurs façons. Par exemple, on obtient un homéomorphisme de $P^1\mathbf{R}$ sur S^1 vu comme l'ensemble des complexes de module 1 en faisant passer au quotient l'application $z \mapsto z^2$.

Dans le cas complexe, on remarque que

$$S^2 = \{(z, t) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R},\ |z|^2 + t^2 = 1\}$$

et on définit une application f de S^2 dans $P^1\mathbf{C}$ en posant

$$f(z,t) = \begin{cases} p(z, 1-t) & \text{si } t \neq 1 \\ p(1+t, \overline{z}) & \text{si } t \neq 1 \end{cases}, \tag{6.1}$$

et on montre que f est un homéomorphisme. L'homéomorphisme réciproque est obtenu par passage au quotient de l'application

$$H(u,v) = \Big(\frac{2u\overline{v}}{|u|^2 + |v|^2}, \frac{|u|^2 - |v|^2}{|u|^2 + |v|^2}\Big) \quad \text{de } \mathbf{C}^2 \setminus \{0\} \text{ dans } S^2.$$

La définition de f est motivée par les formules donnant les projections stéréographiques de pôle Nord et Sud de S^2 dans $\mathbf{C}$, données par

$$i_N(z,t) = \frac{z}{1-t} \quad \text{et} \quad i_S(z,t) = \frac{z}{1+t}. \tag{6.2}$$

Revenant au cas général, le groupe $Gl(n+1, K)$ définit par passage au quotient un groupe de bijections de P^nK, appelé *groupe projectif* ou *groupe des homographies*, et noté $PGl(n+1, K)$. Notons que ce groupe est isomorphe au quotient de $Gl(n+1, K)$ par le groupe des homothéties. Plus généralement, si G est un sous–groupe de $Gl(n+1, K)$, on notera PG son image dans $PGl(n+1, K)$ par l'application de passage au quotient.

Exemple. On vérifie facilement que $PSl(2, \mathbf{R})$ est un sous–groupe d'indice 2 de $Gl(2, \mathbf{R})$, alors que $PSl(2, \mathbf{C}) = PGl(2, \mathbf{C})$.

7 Droites projectives

7.1 Homographies et antihomographies

L'espace P^1K s'appelle la *droite projective* sur K. Le lemme 6.1 donne deux bijections $\varphi_0(x) = p(x, 1)$ et $\varphi_1(x) = p(1, x)$ de K sur $P^1K \setminus p(1, 0)$ et $P^1K \setminus p(0, 1)$ respectivement (qui sont des homéomorphismes pour $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

On peut décrire les homographies de la façon suivante. On adjoint à K un élément ω, et l'on définit une bijection $\phi : K \cup \omega \to P^1K$ en posant $\phi(x) = \phi_1(x), \phi(\omega) = p(1,0)$. Si $f \in Gl(2,K)$, soit F l'homographie associée. Alors

$$(\phi^{-1} \circ F \circ \phi)(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad \text{si } f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(on convient que le transformé de ω est a/c, et que celui de $-d/c$ est ω ; quand $c = 0$, ω est un point fixe).

Pour plus de détails, voir **Audin**, **V.1** et **Berger**, **4**.

7.2 Birapport

Nous allons voir que le groupe des homographies est transitif sur les *triplets* de points de la droite projective. Il ne l'est plus sur les quadruplets. Cela s'exprime par l'existence d'un invariant projectif associé à quatre points, le birapport.

Lemme 7.1 *Soient a, b, c trois points distincts de P^1K. Il existe une base (e_1, e_2) de K^2 telle que $p(e_1) = a$,$p(e_2) = b$, $p(e_1 + e_2) = b$. Si (e_1', e_2') a les mêmes propriétés, il existe un scalaire non nul λ tel que $e_1' = \lambda e_1$, $e_2' = \lambda e_2$.*

Ce lemme est l'outil de base pour la propriété fondamentale suivante.

Théorême 7.2 *Si (a, b, c) et (a', b', c') sont deux triplets de points deux à deux distincts de P^1K, il existe une unique homographie f telle que*

$$f(a) = a', \ f(b) = b', \ f(c) = c'.$$

Ce résultat est à rapprocher de ses analogues concernant les transformations affines ou les isométries. Dans la suite, nous identifierons P^1K et $K \cup \omega$.

Definition 7.3 *Le* birapport *de quatre points distincts (z_1, z_2, z_3, z_4) de $K \cup \omega$ est l'élément de K donné par*

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}.$$

Cette quantité étant égale à

$$\frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)},$$

la convention

$$\frac{\omega - a}{\omega - b} = 1$$

permet de donner un sens à cette définition quand l'un des z_i est égal à ω. Le birapport est noté $[z_1, z_2, z_3, z_4]$. Notons que

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [z_3, z_4, z_1, z_3] = [z_2, z_1, z_3, z_4]^{-1}$$

Théorème 7.4 *Soient* (z_1, z_2, z_3, z_4) *et* (z'_1, z'_2, z'_3, z'_4) *deux quadruplets de points deux à deux distincts de* $K \cup \omega$*. Pour qu'il existe une homographie* f *telle que* $f(z_i) = f(z'_i)$ $(1 \leq i \leq 4)$*, il faut et suffit que*

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [z'_1, z'_2, z'_3, z'_4]$$

Pour voir que la condition est nécessaire, il suffit de vérifier l'invariance du birapport sous un ensemble convenable de *générateurs* du groupe des homographies, par exemple $z \mapsto z + h$, $z \mapsto \lambda z$, $z \mapsto \frac{1}{z}$. Dans les deux premiers cas, c'est immédiat. Le troisième se vérifie par un calcul facile.

7.3 Classification des homographies de la droite projective complexe

On continue à identifier $P^1\mathbf{C}$ à $\mathbf{C} \cup \omega$. Une homographie a un ou deux points fixes. Le cas de deux points fixes est le cas générique.

Si a et b sont les deux points fixes (distincts) de f, le birapport

$$[a, b, z, f(z)]$$

ne dépend pas de f. Notons le k_f. Attention : si on permute a et b, k_f est changé en son inverse, donc k_f est défini modulo son inverse. Cela étant dit, deux homographies f_1 et f_2 ayant deux points fixes sont conjuguées si et seulement si $k_{f_1} = k_{f_2}$, ou $k_{f_1} k_{f_2} = 1$.

Cela se voit en remarquant que f est conjuguée à l'homothétie $z \mapsto k_f z$.

Si f n'a qu'un point fixe, f est dite *parabolique*. Toutes les homographies paraboliques sont conjuguées, et conjuguées à une translation.

Pour une application instructive de cette classification, cliquer ici. En fait, l'itération des homographies, dont il est question dans cet exercice, est le niveau zéro de la dynamique holomorphe, très vivante aujourd'hui.

Une homographie f est dite *involutive* si $f^2 = 1$ et si f n'est pas l'identité. Une homographie involutive a deux points fixes, et $[a, b, z, f(z)] = -1$. Les homographies involutives sont toutes conjuguées. Deux exemples importants sont $z \mapsto -z$ et $z \mapsto 1/z$.

7.4 Géométrie élémentaire dans C

Le sous–groupe du groupe des homographies qui laissent ω fixe est le groupe des transformations de la forme $z \mapsto Az + B$,$A \in \mathbf{C}^*$, $B \in \mathbf{C}$. Il s'identifie au groupe des isomorphismes affine de $\mathbf{C}$, vu comme espace affine *complexe* de dimension 1.

Mais on peut aussi voir $\mathbf{C}$ comme un espace vectoriel réel, qui est alors de façon naturelle un espace euclidien, pour la forme quadratique $|z|^2$. On considère en fait $\mathbf{C}$ comme l'espace affine correspondant.

Definition 7.5 *Une similitude d'un espace affine euclidien* E *est une transormation affine* f *telle que* $\overrightarrow{f} = \lambda u$*, où* $u \in O(\overrightarrow{E})$*. Quitte à changer* u *en* $-u$*, on peut toujours supposer que* $\lambda > 0$ *;* λ *s'appelle le rapport de similitude.*

Les isométries sont les similitudes dont le rapport de similitude est 1. Une similitude f est dite *directe* si $\det \overrightarrow{f} > 0$. Alors $\mathrm{Aff}(\mathbf{C})$ s'identifie au groupe des similitude directes de $\mathbf{R}^2$. Si $A \neq 1$, c'est à dire si $z \mapsto Az + B$ n'est pas une translation, il y a un point fixe unique, à savoir $z_0 = B/(1-A)$.

8 Inversions et groupe circulaire

8.1 Inversions

Soit E un espace affine euclidien. L'inversion de pôle a ($a \in E$) et de module k ($k \in \mathbf{R}^*$), notée $I_{a,k}$ est l'application de $E \setminus \{a\}$ dans lui même qui à x associe x' défini par

$$\overrightarrow{ax'} = \frac{k}{\|\overrightarrow{ax}\|^2}\overrightarrow{ax}.$$

Le carré d'une inversion est l'identité : elle est sa propre inverse. Notons que $I_{a,k}$ est un homéomorphisme de $E \setminus \{a\}$.

Il est immédiat que, si $g \in \mathrm{Isom}(E)$, et si $h_{a,\lambda}$ est l'homothétie de centre a et de rapport λ,

$$g \circ I_{a,k} \circ g^{-1} = I_{g(a),k} \tag{8.1}$$

$$h_{a,\lambda} \circ I_{a,k} \circ h_{a,\lambda}^{-1} = I_{a,k\lambda^2} \tag{8.2}$$

Dans le plan affine euclidien, identifié à $\mathbf{C}$, on a

$$I_{a,k}(w) = a + \frac{k}{\overline{w} - \overline{a}} = \frac{a\overline{w} + k - |a|^2}{\overline{w} - \overline{a}}.$$

On prolonge $I_{a,k}$ à $\mathbf{C} \cup \{\omega\}$ en posant $I_{a,k}(\omega) = a$ et $I_{a,k}(a) = \omega$. Cette convention sera généralisée plus bas, et justifiée au paragraphe 8.2.

Théorème 8.1 *Les inversions conservent les angles.*

Preuve. Un calcul direct montre que la différentielle en x de $I_{a,k}$ est donnée par

$$I'_{a,k}(x) \cdot \overrightarrow{h} = \frac{k}{\|\overrightarrow{ax}\|^2}\Big(\overrightarrow{h} - \frac{2}{\|\overrightarrow{ax}\|^2}\langle \overrightarrow{ax}, \overrightarrow{h}\rangle \overrightarrow{ax}\Big).$$

C'est la composée d'une homothétie et de la réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal à $\overrightarrow{ax}$. Soient maintenant $t \mapsto c_1(t)$ et $t \mapsto c_2(t)$ deux courbes telle que $c_1(0) = c_2(0) = a$, Supposons que $c_i'(0) \neq 0$, et posons $\overrightarrow{u} = c_1'(0)$, $\overrightarrow{v} = c_2'(0)$. Par définition, l'angle de c_1 et c_2 au point de paramètre 0 [3] est $\mathrm{Arccos}\langle u, v\rangle$. D'après le théorème des fonctions composées, on trouve le même angle pour les courbes $I_{a,k} \circ c_1$ et $I_{a,k} \circ c_2$.

Remarque. On démontre (théorème de Liouville) que si $\dim E \geq 3$, toute application C^4 d'un ouvert U de E dans E est la restriction à U d'un produit d'inversions (voir **Berger**, 9.5.4). Attention : la propriété analogue est fausse en dimension 2 : la différentielle en $z \in \mathbf{C}$ d'une fonction holomorphe est la multiplication par $f'(z)$, qui est une similitude si $f'(z) \neq 0$.

[3] C'est à dire l'angle en a, si a n'est point multiple d'aucune de ces deux courbes

Proposition 8.2 *L'inverse d'une sphère qui ne passe pas par le pôle d'inversion est une sphère, l'inverse d'une sphère qui passe par le pôle d'inversion est un hyperplan, l'inverse d'un hyperplan est une sphère qui passe par le pôle d'inversion.*

Preuve. D'après les formules 8.1 et 8.2, il suffit de traiter le cas de $I_{0,1}$. Il suffit aussi de se placer dans $\mathbf{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. La sphère de centre a et de rayon r, notée $S(a,r)$, est l'ensemble

$$\{x \in \mathbf{R}^n, \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 = r^2\}.$$

On va décrire l'ensemble des sphères d'une façon plus adaptée. Soient α et γ des nombres réels, et $\beta \in \mathbf{R}^n$, tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 - \alpha\gamma > 0.$$

Alors l'ensemble

$$\{x \in \mathbf{R}^n,\ \alpha(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) + 2\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i + \gamma = 0\}$$

est une sphère si $\alpha \neq 0$. C'est la sphère

$$S(a,r) \quad \text{où } a = -(\beta_i/\alpha)_{1\leq i\leq n},\ r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 - \alpha\gamma}{\gamma^2}}\ ;$$

Si $\alpha = 0$, on a un hyerplan. Notons que rien ne change si on remplace le $(n+2)$–uple (α,β,γ) par $(\lambda\alpha,\lambda\beta,\lambda\gamma)$, où $\lambda \in \mathbf{R}^*$. Autrement dit, on a une bijection entre l'ensemble des sphères–plans de $\mathbf{R}^n$ (on entend par là une partie de $\mathbf{R}^n$ qui est soit une sphère soit un hyperplan) et l'ouvert de $P^{n+1}\mathbf{R}$ formé des points $p(\alpha,\beta,\gamma)$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 - \alpha\gamma > 0$.

Cela dit, l'image par $I_{0,1}$ de l'ensemble des x tels que $\alpha(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) + 2\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i + \gamma = 0$ est tout simplement l'ensemble des x tels que $\gamma(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) + 2\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i + \alpha = 0$. Tout revient à échanger α et γ, d'où les assertions de l'énoncé. □

Ce résultat conduit à prolonger $I_{a,k}$ à $E \cup \{\omega\}$ (on adjoint à E, à l'instar de $\mathbf{C}$, un point ω), en posant $I_{a,k}(\omega) = a$ et $I_{a,k}(a) = \omega$. Précisant ce qui a été dit au cours de la démonstration précédente, une sphère–plan de $E \cup \{\omega\}$ sera soit une sphère (ordinaire) de E, soit un hyperplan auquel on a adjoint le point ω. Autrement dit : un plan est une sphère–plan contenant ω. On peut alors reformuler la proposition 8.2 plus simplement, en disant que l'image d'une sphère–plan par une inversion est une sphère–plan.

L'ensemble des points fixes d'une inversion $I_{a,k}$ est vide si $k < 0$; c'est la sphère $S(a, \sqrt{k})$ si $k > 0$. Notons l'analogie avec les réflexions hyperplanes, qui sont des transformations involutives dont l'ensemble des points fixes est un hyperplan. On appellera *inversion–symétrie* une transormation de $E \cup \{\omega\}$ qui est une inversion ou une réflexion hyperplane.

On verra en 8.2 une justification supplémentaire de ces conventions, grâce à une interprétation des inversions de $\mathbf{C} \cup \{\omega\}$ dans le cadre de la géométrie projective complexe.

8.2 Antiinvolutions

Definition 8.3 *Une application de f de $\mathbf{C}^{n+1}$ dans lui–même est dite antilinéaire* [4] *si, pour z, z' dans $\mathbf{C}^{n+1}$ et λ complexe, $f(z+z') = f(z) + f(z')$, et $f(\lambda z) = \overline{\lambda} z$.*

La composée d'une application linéaire et d'une application antilinéaire est antilinéaire, celle de deux applications antilinéaires est linéaire.

Les applications *antilinéraires* inversibles de $\mathbf{C}^{n+1}$ dans lui-même définissent encore des bijections de l'ensemble des droites de $\mathbf{C}^{n+1}$, autrement dit elles définissent par passage au quotient $P^n\mathbf{C}$, des bijections que l'on appelle *antihomographies*. Transportée à $\mathbf{C} \cup \{\omega\}$ par ϕ, une antihomographie de $P^1\mathbf{C}$ s'écrit

$$w \mapsto \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d} \quad \text{avec } ad - bc \neq 0,$$

et les mêmes conventions que plus haut pour ω.

La composée de deux antihomograhies est une homographie, et la composée d'une antihomographie et d'une homographie est une antihomographie.

Definition 8.4 *On appelle groupe circulaire, ou groupe de Möbius, le groupe des homographies et des antihomograpahies de la droite projective complexe.*

Definition 8.5 *Une antiinvolution est une antihomographie involutive.*

Le groupe des homographies est un sous–groupe distingué d'indice 2; il résulte de 8.1 qu'une inversion est une antiinvolution.

Réciproquement

Théorême 8.6 *Toute antiinvolution de $\mathbf{C} \cup \{\omega\}$ est une réflexion ou une inversion.*

Cette propriété justifie le terme *d'inversion–symétrie* pour une transformation qui est soit une inversion, soit une symétrie.

Corollaire 8.7 *Dans le groupe circulaire, la conjuguée d'une inversion–symétrie est une inversion–symétrie.*

Les inversions–symétries jouent dans le groupe circulaire le même rôle que les réflexions dans $\mathrm{Isom}(\mathbf{R}^2)$: toute homographie est produit de deux ou quatre inversions–symétries.

Démonstration abrégée : en envoyant les points fixes en 0 et ω, on se ramène au cas de l'homothétie $z \mapsto \lambda z$, et on écrit $\lambda = |\lambda| u$, où $|u| = 1$. Alors $z \mapsto |\lambda| z$ est produit de deux inversions de pôle 0, tandis que $z \mapsto uz$ est produit de deux vraies réflexions. Le cas parabolique se traite de la même façon.

[4] cette notion a un sens pour un espace vectoriel E sur $\mathbf{C}$ quelconque, mais nous ne l'utiliserons pas ici

Pour plus de détails, donnés à l'occasion d'un exercice sur les produits d'inversions, cliquer ici.

On peut démontrer (c'est un bon exercice) que toute anti–homographie est soit une inversion–symétrie, soit le produit de trois inversions–symétries.

Le terme de groupe circulaire est justifié par le fait que, d'après de qui précède et 8.1, une tranformation circulaire tranforme un cercle en cercle, avec la convention qu'une droite est un cercle contenant ω.

Notons enfin que quatre points du plan complexe sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport est *réel*.

8.3 Cercles orthogonaux

Proposition 8.8 *Soient m et m' deux points distincts d'un plan affine euclidien, transformé l'un de l'autre par rapport à une inversion $I_{a,k}$. Alors tout cercle droite passant par m et m' est (globalement) invariant par $I_{a,k}$.*

Preuve. On va se ramener au cas évident où ce cercle–droite est une droite. Soit C un cercle contenant m et m'. Soit J une inversion de pôle situé sur C. Alors $J \circ I_{a,k} \circ J$ est une inversion–symétrie I', transformant $J(m)$ en $J(m')$, et C en la droite D qui joint $J(m)$ et $J(m')$. Cette droite passe par le pôle de I' (si I' est une inversion) ou est orthogonale à l'axe (si I' est une symétrie). Elle est donc globalement invariante par I', et $C = J(D)$ est globalement invariant par $I_{a,k}$.$\square$

Remarque. Si $k > 0$ on peut démontrer ce résultat en conjugant $I_{a,k}$ à une réflexion.

Corollaire 8.9 *Soient C un cercle et a un point. Soit D une droite passant par a, intersectant C en deux points m et m'. Alors le produit $\overline{am} \cdot \overline{am'}$ ne dépend pas de D.*

Definition 8.10 *La constante ainsi obtenue s'appelle la* la puissance de a par rapport *à* C.

Si $C = C(c, r)$, la puissance de a par rapport à C vaut $\mathrm{dist}^2(a, c) - r^2$. Cela peut évidemment se vérifier par un calcul direct, mais cette démonstration est plus instructive.

Definition 8.11 *Deux cercles–droites d'un plan affine euclidien sont orthogonaux si leur intersection est non vide et si les tangentes à l'un des points d'intersection sont orthogonales.*

Il est immédiat que les tangentes à l'autre point d'intersection (quand il y en a deux, c'est à dire sauf dans le cas de deux droites) sont aussi orthogonales. Notons aussi qu'un cercle et une droite sont orthogonaux si et seulement si la droite contient le centre du cercle. D'après le théorème de Pythagore, deux cercles $C(c, r)$ et $C(c', r')$ sont orthogonaux si et seulement si $\mathrm{dist}(c, c')^2 = r^2 + r'^2$, ou encore si la puissance de c (resp. c') par rapport à $C(c', r')$ (resp. $C(c, r)$) est égale à r (resp. r'). On peut alors reformuler 8.8 et 8.9, dans le cas des inversions de module positif, en disant que tout cercle orthogonal au cercle des points fixes est globalement invariant (encore un résultat qui peut aussi se montrer en conjugant l'inversion à une réflexion).

8.4 Du plan complexe à la sphère

Une référence utile pour ce paragraphe est **Stilwell**, ch. 3. Sachant que $P^1\mathbf{C}$ étant homéomorphe à S^2, on va interpréter le groupe circulaire comme groupe de transformations de S^2. En identifiant $P^1\mathbf{C}$ à $\mathbf{C} \cup \{\omega\}$, cet homéomorphisme peut être donné par la projection stéréographique de pôle Nord i_n (voir les formules 6.1 et 6.2), prolongée en n par $i_n(n) = \omega$.

Proposition 8.12 *La projection stéréographique i_n est la restriction à S^2 de l'inversion $I_{n,2}$.*

Le résultat suivant est une généralisation partielle de 8.7

Théorême 8.13 *Si I_1 et I_2 sont deux inversions–symétries de $E \cup \{\omega\}$, alors $I_1 \circ I_2 \circ I_1 = I_1 \circ I_2 \circ (I_1)^{-1}$ est une inversion symétrie.*

Preuve. Si $I_1 = I_{a_1,k_1}$ et $I_2 = I_{a_2,k_2}$, d'après 8.7, la restriction de $I_1 \circ I_2 \circ I_1$ à tout plan affine de dimension 2 contenant a_1 et a_2 est une inversion–symétrie, de pôle $I_1\big(I_2(a_1)\big)$ et dont le module ne dépend pas du plan. Alors $I_1 \circ I_2 \circ I_1$ est une inversion de mêmes pôle et module.

Si $I_2(a_1) = a_1$, la restriction de $I_1 \circ I_2 \circ I_1$ à un tel plan est la reflexion par rapport à la droite $I_1\big(C(a_2, \|\overrightarrow{a_1a_2}\|)\big)$, qui est orthogonale à la droite définie par a_1 et a_2. Ces droites engendrent un hyperplan, et $I_1 \circ I_2 \circ I_1$ est la réflexion par rapport à cet hyperplan.$\square$

Remarque. On peut donner une preuve plus directe de ce résultat quand I_2 a des points fixes : la sphère–plan des points fixes de $I_1 \circ I_2 \circ I_1$ est alors l'image par I_1 de celle des points fixes de I_2.

On en tire le résultat suivant

Théorême 8.14 *Soit I une inversion–symétrie de $\mathbf{C} \cup \{\omega\}$. Alors $i_n^{-1} \circ I \circ i_n$ est la restriction à S^2 d'une perspective par rapport à un point p de $\mathbf{R}^3 \setminus S^2$ ou d'une réflexion par rapport à un plan contenant l'origine.*

Preuve. On prolonge I en une inversion–symétrie de $\mathbf{R}^3$. Alors $I_{n,2} \circ I \circ I_{n,2}$ est aussi une inversion–symétrie de $\mathbf{R}^3$, qui laisse la sphère S^2 globalement invariante (puisque S^2 est l'image par $I_{n,2}$ du plan $t = 0$. Si c'est une inversion de pôle p, alors $p \notin S^2$, et $i_n^{-1} \circ I \circ i_n$ coïncide avec la perspective par rapport à p. Si c'est une réflexion, le plan fixe doit contenir l'origine.□

Remarques. a) La géométrie projective permet de présenter ce résultat d'une manière unifiée, en considérant des persepctives par rapport à des points à l'infini.

b) les inversions de $\mathbf{C}$ de module positif (resp. négatif) donnent des perspectives par rapport à des points extérieurs (resp. intérieurs) à S^2.

Corollaire 8.15 *Le groupe circulaire est isomorphe au groupe engendré par les inversions–symétries de $\mathbf{R}^3 \cup \{\omega\}$ qui laissent la sphère S^2 globalement invariante. Le groupe des homographies de $\mathbf{C} \cup \omega$ est isomorphe au groupe engendré par les produits pairs de telles inversions–symétries.*

8.5 De la sphère au plan complexe

On a vu au paragraphe précédent comment le groupe circulaire et le groupe $PGl(2, \mathbf{C}) = PSl(2, \mathbf{C})$ opèrent sur S^2. Parmi les transformations obtenues, il y a les restrictions à S^2 des réflexions par rapport aux plans contenant le centre, et aussi les produits de telles réflexions. En revenant à $\mathbf{C}$, ou plutôt à $\mathbf{C} \cup \{\omega\}$, on doit pouvoir réaliser $SO(3)$ comme un sous–groupe de $PSl(2, \mathbf{C})$.

Proposition 8.16 *Si g est la restriction à S^2 de la réflexion orthogonale par rapport au plan P d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z$ (avec $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$), alors $i_n \circ g \circ (i_n)^{-1}$ est*

1. *l'inversion de pôle $-(\alpha + i\beta)/\gamma$ et de module $1/\gamma^2$ si $\gamma \neq 0$;*
2. *la reflexion par rapport à la droite d'équation $\alpha x + \beta y = 0$ si $\gamma = 0$.*

Preuve. La propriété est évidente si $\gamma = 0$, c'est à dire si P contient l'axe Nord–Sud. Dans le cas général, la transformation cherchée est la restriction au plan équatorial de $I_{n,2} \circ \sigma_P \circ I_{n,2}$. C'est une inversion d'après le théorème 8.13, dont la sphère des points fixes est $I_{n,2}(P)$. Cette sphère contient les intersections de P avec l'équateur. Le pôle d'inversion est

$$I_{n,2} \circ \sigma_P \circ I_{n,2}(\omega) = I_{n,2}\big(\sigma_P(n)\big),$$

c'est à dire l'intersection avec l'équateur de la droite orthogonale à P passant par n. Les coordonnées de ce point sont de la forme

$$(0,0,1)+t(\alpha,\beta,\gamma) \quad \text{avec } 1+t\gamma=0.$$

Le pôle a donc pour affixe complexe $-(\alpha+i\beta)/\gamma$, et le module est

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\gamma^2}+1=\frac{1}{\gamma^2}.\square$$

Notons que, dans tous les $i_n \circ g \circ (i_n)^{-1}$ s'écrit

$$w \mapsto \frac{l\overline{w}+\gamma}{\gamma\overline{w}-\bar{l}}, \text{si } l=\alpha+i\beta.$$

En utilisant le fait que tout élément de $SO(3)$ est le produit de deux réflexions, on obtient :

Théorème 8.17 *L'application $g \mapsto i_n \circ g \circ (i_n)^{-1}$ définit un isomorphisme entre $SO(3)$ et le groupe des transformations de $\mathbf{C} \cup \omega$ de la forme*

$$w \mapsto \frac{aw+b}{-\bar{b}w+\bar{a}} \quad \textit{avec } |a|^2+|b|^2=1$$

Ces deux résultats sont prouvés dans **Stilwell**, **3.5**.

Le groupe multiplicatif des matrices complexes de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \text{avec } |a|^2+|b|^2=1$$

s'appelle le groupe spécial unitaire, et se note $SU(2)$. Le thérorème ci–dessus donne un isomorphisme entre $SO(3)$ et $SU(2)/\pm Id$. Cet isomorphisme est démontré d'une façon complétement différente dans **Berger**, 8.9.

On a mis ainsi en évidence un sous–groupe de $PGl(2,\mathbf{C})$ isomorphe à $SO(3)$, et un sous–groupe du groupe circulaire isomorphe à $O(3)$.

9 Géométrie hyperbolique

9.1 Un peu de fonctions holomorphes

Ce paragraphe est destiné à servir de motivation, mais ne sera pas utilisé dans la suite. Un théorème profond d'analyse complexe assure que pour tout ouvert U de $\mathbf{C}$ simplement connexe[5] et distinct de $\mathbf{C}$, il existe une application bi–holomorphe entre U et le disque unité D. Il s'avère qu'il est plus simple de considérer de demi–plan ouvert P des complexes

[5]C'est–à–dire tel que toute courbe fermée peut être déformée continûment en un point

à partie imaginaire strictement positive (on a alors, voir 9.7 plus bas, une application biholomorphe tout à fait explicite entre P et D).

Poincaré a découvert que les applications bilholomorphes de P dans P, qui sont de la forme

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{où } a,b,c,d \text{ sont réels, et } ad-bc>0,$$

sont les isométries (directes, voir plus bas le théorème 9.2) d'une métrique tout à fait remarquable : elle satisfait à tous les axiomes de la géométrie euclidienne, sauf celui des parallèles.

Plus de deux mille ans après la géniale introduction du postulat d'Euclide[6], il était donc prouvé que celui–ci est indépendant des autres axiomes de la géométrie.

9.2 Métriques riemanniennes

La distance de P que nous venons d'évoquer pourrait être définie directement par une formule. Il sera en fait plus commode voir cette distance dans un cadre plus général, celui des métriques riemanniennes. Une forme différentielle quadratique sur un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ est une application C^∞ de U dans l'espace vectoriel des formes quadratiques sur $\mathbf{R}^n$. Ainsi, pour chaque $x \in U$, on a une forme quadratique q_x à coefficients C^∞. Plutôt que d'écrire

$$q_x(X) = \sum_{i \leq, j} q_{ij}(x) X^i X^j,$$

(les X^i désignant les coordonnées de $X \in \mathbf{R}^n$), on écrit

$$q_x = \sum_{i \leq, j} q_{ij}(x) dx^i dx^j.$$

D'après la définition même de la différentielle, $dx^i(X) = X^i$.

Une *métrique riemannienne* sur U est une forme différentielle quadratique g telle que g_x soit définie positive pour tout x. Ainsi, $\sqrt{g_x}$ définit une norme euclidienne qui dépend de x. La longueur d'une courbe C^1 par morceaux $c : [\alpha, \beta] \to U$ est par définition

$$\mathrm{long}_g(c) = \int_\alpha^\beta \sqrt{g_{c(t)}(c'(t), c'(t)} dt.$$

Si $g = \sum_{i=1}^n dx^{i2}$, on retrouve la longueur usuelle.

On définit alors une distance sur U, supposé connexe, et donc connexe par arcs, en posant

$$\mathrm{dist}_g(p,q) = \inf \mathrm{long}(c)$$

pour toutes les courbes c d'extrémités p et q qui sont C^1 par morceaux.

On démontre

1. que l'on définit bien ainsi une distance ;

[6] On sait fort peu de choses sur Euclide. Les “Eléments" datent du IIIième siècle avant notre ère

2. que la topologie définie par cette distance est bien la topologie usuelle de U.

Pourquoi fait–on tout cela ? Parce que l'on définit ainsi des métriques particulièrement intéressantes. A l'attention de ceux qui ont fait de la géométrie différentielle : un exemple de métrique riemannienne est la première forme fondamentale d'une surface de l'espace euclidien. Un autre exemple fait l'objet du paragraphe suivant.

9.3 Quelques isométries du demi–plan de Poincaré

Le *demi–plan de Poincaré* est la partie

$$P = \{z \in \mathbf{C}, \Im z > 0\} \quad \text{de } \mathbf{C},$$

munie de la métrique riemannienne

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

D'après 9.2, toute courbe C^1 par morceaux $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$, où $t \in [t_1, t_2]$, a pour longueur

$$\int_{t^1}^{t_2} \frac{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}{y(t)} dt.$$

La distance de deux points p et q est la borne inférieure des longueurs des courbes qui les joignent.

Les tranformations suivantes sont des isométries, car elles conservent évidemment les longueurs de courbes.

1. $z \mapsto z + h, h$ réel.
2. $z \mapsto -\overline{z}$.
3. $z \mapsto \lambda z$, si λ est un réel positif.

Exercice. En déduire que les isométries opérent transitivement sur P.

Par ailleurs, les segments verticaux sont de longueur minimum. En effet, soit $t \mapsto x(t)+iy(t)$ une courbe C^1 par morceaux joignant les points $(a + iy_1)$ et $(a + y_2)$ (en supposant par exemple $y_1 < y_2$). Sa longueur est

$$L(c) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{y(t)} dt,$$

(si $[\alpha, \beta]$ est l'intervalle de définion de c), laquelle intégrale est évidemment supérieure à

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{y'(t)}{y(t)} dt,$$

qui n'est autre que la longueur (pour notre métrique !) du segment qui joint ces deux points/ On en déduit que

$$\mathrm{dist}(a + iy_1, a + iy_2) = \log |\frac{y_1}{y_2}|.$$

Les droites verticales

$$t \mapsto (x_0, y_0 e^t), \;\; t \in \mathbf{R}$$

sont des géodésiques.

9.4 Réflexions et produits de réflexions

Pour trouver d'autres géodésiques, et l'expression générale de la distance, on va utiliser des isométries moins immédiates que celles de 9.3

Lemme 9.1 *L'inversion $z \mapsto 1/\bar{z}$ est une isométrie de P.*

On montre encore que la longueur des courbes est conservée : si

$$(X, Y) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}),$$

alors

$$dX = \frac{dx}{x^2+y^2} - \frac{2x(xdx+ydy)}{(x^2+y^2)^2},\ dY = \frac{dy}{x^2+y^2} - \frac{2y(xdx+ydy)}{(x^2+y^2)^2},$$

donc

$$\frac{dX^2+dY^2}{Y^2} = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}.$$

On est ramené au changement de variable dans les intégrales définies.

Plus généralement, toute inversion de module positif et de pôle situé sur l'axe réel est une isométrie de P.

Il en résulte que les intersections avec P des cercles centrés sur l'axe réel sont des géodésiques de P, et que par deux points il passe une unique géodésique.

Cela va nous permettre, par la même méthode que dans 4.2 et 5.2, de caractériser les isométries du demi–plan de Poincaré. Pour rendre cette analogie plus frappante, nous donnerons le nom de *reflexions* du demi–plan de Poincaré aux inversions de module positif et de pôle situé sur l'axe réel, ainsi qu'aux symétries euclidiennes par rapport aux droites orthogonales à l'axe réel, restreintes à P.

Ces transformations ont en effet les propriétés suivantes :

1. Ce sont des isométries de P, dont l'ensemble des points fixes est une géodésique.
2. Quels que soient p et q dans P, si $p \neq q$, il existe une unique réflexion les échangeant.

Dans ces conditions :

- L'ensemble des points équidistants de deux points distincts p et q de P est une géodésique : c'est l'ensemble des points fixes de l'unique réflexion qui échange p et q.
- Si une isométrie de P a trois points fixes non alignés, c'est l'identité.
- Toute isométrie de P est produit de une, deux ou trois réflexions.

9.5 Isométries de P

Il résulte du paragraphe précédent que les isométries sont des difféomorphismes. On dira qu'une isométrie est directe si son Jacobien est positif, inverse si son jacobien est négatif. Comme dans les cas euclidien et sphérique, une isométrie directe qui a deux points fixes distincts est l'identité, et, paar conséquent, une isométrie directe est produit de *deux* réflexions.

Théorème 9.2 *Les isométries directes de P sont les homographies*

$$z \mapsto T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{où } a, b, c, d \text{ sont réels, et } ad - bc > 0.$$

Preuve. La formule

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz+d)}$$

montre

a) que

$$\Im\big(T(z)\big) = \frac{ad - bc}{|cz+d|^2} \Im z,$$

donc que $T(P) \subset P$; comme T^{-1} est du même type, $T(P) = P$;

b) que T est une composée d'isométries, d'après 9.3 et 9.1.

D'autre part, T est holomorphe, et

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz+d)^2} \quad \text{est partout } \neq 0,$$

donc son jacobien est strictement positif.

Réciproquement, un calcul direct montre que le produit de deux réflexions est bien de cette forme.■

Remarques. a) Quitte à multiplier a, b, c, d par un même réel convenable, on peut se ramener au cas où $ad - bc = 1$, ce que nous ferons dans la suite. Par conséquent, $\mathrm{Isom}^+(P)$ est isomorphe au groupe $PSl(2, \mathbf{R}) = Sl(2, \mathbf{R}) / \pm I$.

b) Les isométries inverses de P sont les homographies de la forme

$$z \mapsto T(z) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}, \quad \text{où } a, b, c, d \text{ sont réels, et } ad - bc = -1.$$

9.6 Points à l'infini ; classification des isométries

Si une isométrie directe est donnée sous la forme $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$, sa décompostion en produit de deux réflexions ne saute pas aux yeux. Pour comprendre ce qui se passe, on introduit la notion suivante.

Definition 9.3 *On appelle* points à l'infini *du demi–plan de Poincaré les points de* $\mathbf{R} \cup \omega$.

Une géodésique de P, prolongée à $\overline{P}$, admet deux points à l'infini, et inversement deux points distincts de $\mathbf{R} \cup \omega$ sont les points à l'infini d'une unique géodésique.

Théorème 9.4 *Soit $z \mapsto T(z) = (az+b)/(cz+d)$ une isométrie directe de P, avec $ad - bc = 1$. Alors :*

a) ou bien T admet deux points fixes à l'infini (cas où $|a+d| > 2$), et T est conjuguée à une homothétie $z \mapsto \lambda z$, $\lambda \in \mathbf{R}^+$;

b) ou bien T admet un point fixe à l'infini (cas où $|a+d| = 2$), et T est conjuguée à une translation $z \mapsto z + h$, $h \in \mathbf{R}$;

c) ou bien T admet un point fixe dans P, (cas où $|a+d| < 2$).

La preuve est une simple adaption de 7.3 au cas où les coefficients sont réels. Dans le cas a), on dit que T est *hyperbolique*. La géodésique définie par les points fixes est globalement invariante, et la restriction de T à cette géodésique (qui est un espace métrique isométrique à $\mathbf{R}$) est une translation de longueur $\log|\lambda|$.

Dans le cas b), on dit que T est *parabolique*. Pour un exercice sur les isométries paraboliques, cliquer ici.

Dans le cas c), on dit que T est *elliptique*. Ce cas est apparemment moins simple. En fait, comme nous le verrons en 9.6, les isométries elliptiques sont les analogues exactes des rotations de $\mathbf{R}^2$ et de S^2.

9.7 Le disque de Poincaré

L'homographie $z \mapsto h(z) = (z-i)/(z+i)$ (on peut aussi prendre l'inversion de pôle $-i$ et de module 2) est définit un homéomorphisme de P sur le disque unité $D = \{z \in \mathbf{C}, |z| < 1$. Les points à l'infini de P sont envoyés sur le cercle unité.

On transporte à D la métrique de P en posant

$$\mathrm{dist}_D\,(p,q) = \mathrm{dist}_P\left(h^{-1}(p), h^{-1}(q)\right)$$

Si $h^{-1}(x,y) = (X,Y)$, on voit, en remplaçant X et Y par leurs valeurs en fonction de x et y dans l'expression $g = (dX^2 + dY^2/Y^2)$, que dist_D est définie par

$$4\frac{dx^2+dy^2}{(1-x^2-y^2)^2} \quad \text{(métrique de Poincaré du disque).}$$

Les géodésiques de D sont les images par h de celles de P : ce sont les arcs de cercles rencontrant le cercle unité orthogonalement, ainsi que, avec la convention habituelle, les diamètres du cercle unité. On a la même classification des isométries directes en elliptiques, hyperboliques, paraboliques. La distance, que nous n'avons pas explicitée jusqu'à présent,

a la même expression dans les deux cas.

Proposition 9.5 *Soient p et q deux points distincts du disque ou du demi–plan de Poincaré, et soient α et β les points à l'infini de la géodésique passant par p et q. Alors*

$$\mathrm{dist}(p,q) = \log |[p,q,\alpha,\beta]|.$$

Idée de preuve : on se ramène au cas de deux points de P situés sur une géodésique qui est une demi–droite verticale, et on utilise l'invariance du birapport par homographie.

Exemple. Si p est un point du disque à distance (euclidienne!) r de l'origine,

$$\mathrm{dist}(0,p) = \log \frac{1+r}{1-r}.$$

Les restrictions à D des rotations euclidiennes de centre 0 sont des isométries de D. Réciproquement, toute isométrie de D fixant 0 est une rotation. Par conséquent,

Proposition 9.6 *Toute isométrie elliptique du disque de Poincaré est conjuguée à une isométrie la forme $z \mapsto e^{i\alpha}z$.*

Remarque. Cela montre au passage que l'invariant k_f vu en 7.3 est un nombre complexe de module 1 pour les isométries elliptiques. Nous avons déjà vu 9.6 que c'est un nombre réel positif pour les isométries hyperboliques.

Notons enfin que les points à l'infini du disque de Poincaré sont les points du cercle unité.

9.8 Qu'est–ce que le plan hyperbolique ?

Le disque et le demi–plan de Poincaré sont isométriques par construction. Ils sont tous deux bi–homogènes (autrement dit : le groupe des isométries est transitif sur les couples de points équidistants) ; de plus, le groupe des isométries se prolonge aux points à l'infini, et opère transitivement sur les triplets de points à l'infini.

On appelle "modèle du plan hyperbolique" tout espace métrique isométrique à D ou à P. L'étude qui précède montre que, suivant les problèmes étudiés, l'un ou l'autre point de vue est plus simple.

Si on les regarde “avec des yeux euclidiens", D a un point privilégié, le centre du disque : les isométries qui le préservent sont aussi euclidiennes. Le demi–plan P, quant à lui, a un point à l'infini privilégié, le point ω : les isométries paraboliques qui le préservent sont des translations, et les isométries hyperboliques dont ω est l'un des points fixes sont des homothéties (euclidiennes !).

Il existe une autre présentation du plan hyperbolique, techniquement beaucoup plus simple, mais un peu déroutante de prime abord, le *le modèle de Minkowski*. On munit $\mathbf{R}^3$ de la forme quadratique $q(X) = x^2 + y^2 - z^2$ (noter au passage l'analogie avec l'espace de Minkowski de la Relativité Restreinte), et l'on pose

$$H = \{X \in \mathbf{R}^3, q(X) = -1 \quad \text{et } z > 0$$

(traditionnellement, la surface d'équation $x^2+y^2-z^2 = -1$ s'appelle “hyperboloïde à deux nappes ; la conditon $z > 0$ revient à ne garder qu'une composante connexe).

Si $\phi(X, X')xx'+yy'-zz'$ est la forme bilinéaire associée à q, on vérifie *l'inégalité de Schwarz inversée.*

Proposition 9.7 *Soient X et X' deux vecteurs tels que $q(X)$ et $q(X')$ soient* négatifs. *Alors*

$$(\phi(X, X')^2 \geq q(X)q(X')$$

Si X et X' sont deux points de H, leur distance sera définie par $\cosh \operatorname{dist}(X, X') = |\phi(X, X')|$. C'est bien une distance, comme nous allons le voir maintenant.

9.9 Triangles hyperboliques

Théorême 9.8 (Formule fondamentale de la trigonométrie hyperbolique *Si les côtés d'un triangle hyperbolique ont pour longueurs a, b, c, les angles opposés étant A, B, C, on a*

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos A.$$

La preuve est la même que dans le cas sphérique. Il faut simplement préciser de quoi on parle ! Si p et q sont deux points distincts de H, le plan vectoriel qui les contient intersecte H suivant une brance d'hyperbole, et le segment d'extrémité p et q est l'arc d'hyperbole correspondant. Pour définir les angles, on remarque que la restriction de q au plan tangent en p à H est *définie positive* (par exemple d'après la loi d'inertie de Sylvester) et fait de ce plan un plan euclidien.$\square$

On en déduit l'inégalité du triangle stricte de la même façon que dans le cas sphérique. En particulier, les géodésiques sont les branches d'hyperboles décrites ci-dessus. La situation est même plus simple que pour la sphère, puisque deux points distincts sont toujours contenus dans une unique géodésique.

Il faut enfin montrer que l'espace métrique obtenu est un modéle du plan hyperbolique. Cela peut se vérifier par un calcul direct. Par exemple, la perspective de H sur le plan $z = 0$ par rapport au point $(0, 0, 1)$ (qui est un analogue de la projection stéréographique) est une isométrie de H sur D. Pour les détails, voir **Lehmann Berger** ou encore **Gallot-Hulin-Lafontaine** p. 56-57.

Par rapport aux cas euclidien et sphérique, un fait nouveau apparaît : on peut définir des triangles ayant un sommet à l'infini, ou même les trois. Les angles d'un triangle seront par définition les angles *euclidiens* des courbes, droites ou cercles, qui consituent les côtés. Les isométries hyperboliques conservent les angles, puisque ce sont des produits d'inversions (euclidiennes !).

Il est naturel de convenir que l'angle en un sommet à l'infini est nul.

Definition 9.9 *Dans le plan hyperbolique, on appelle* triangle idéal *la région délimitée par les* 3 *géodésiques qui joignent* 2 *à* 2 *trois points à l'infini. Ces points seront appelés* sommets *du triangle.*

Par ailleurs, sur le demi–plan de Poincaré, la mesure

$$\frac{dxdy}{y^2}$$

est invariante par isométrie.

Le groupe des isométries étant transitif sur les triplets de points à l'infini, on voit que tous les triangles idéaux ont même aire. On peut calculer cette dernière par exemple pour le triangle idéal défini par les droites $x = \pm 1$ et le demi-cercle de centre 0 et de rayon 1, c'est à dire en intégrant $\frac{dxdy}{y^2}$ sur le domaine $\{z, |\Re(z)| \leq 1, |z| \geq 1\}$. Un calcul immédiat donne π.

Théorème 9.10 *L'aire d'un triangle hyperbolique est égale à π moins la somme des angles. En particulier, la somme des angles d'un triangle hyperbolique est strictement inférieure à π.*

La preuve qui suit est "folklorique" : elle est bien connue des spÚcialistes, mais je suis incapable d'en donner une réfrence écrite. On remarque d'abord, en utilisant le même argument de découpage que pour les polygones euclidiens, que l'aire d'un polygone idéa à n côtés est $(n-2)\pi$. On en déduit le thérorème pour les triangles ayant deux sommets à l'infini, l'angle au "vrai" sommet étant $\frac{2\pi}{n}$ (les rotations d'angle $\frac{2k\pi}{n}$ autour de ce sommet engendrent un n-gone idéal, l'aire de notre triangle est donc $(n-2)\pi/n = \pi - \frac{2\pi}{n}$. Le théorème est encore vrai si l'angle est $\frac{4\pi}{n}$ (on juxtapose deux triangles comme précédemment et on enlève un triangle idéal, puis récurrence pour les triangles ayant deux angles nuls et un angle égal à $\frac{2k\pi}{n}$, c'est à dire égal à $r\pi$, r rationnel dans $)0,1[$. Par continuité, on obtient le résultat pour tous les triangles ayant deux angles nuls. A partir de là, des arguments de découpage donnent le cas général.

Pour des exercices sur les triangles hyperboliques, cliquer ici.

> La suite serait délectable,
> Malheureusement je ne peux
> Pas la dire, et c'est regrettable,
> Ça nous aurait fait rire un peu
> *Georges Brassens, Le Gorille*

...et ça nous mènerait trop loin. Donnons quand même quelques pistes.

10 Perspectives

Soit T un triangle dans X, X étant le plan euclidien, la sphère ou le plan hyperbolique. Soit G le groupe engendré par les reflexions par rapport aux côtés. On cherche à "paver" X au moyen de G par des parties isométriques à T. Autrement dit, on voudrait que

1. $\cup_{g\in G} gT = X$
2. les intérieurs de $g(T)$ et $g'(T)$ soient disjoints si $g \neq g'$.

Notons que dans ces conditions G est un sous-groupe de Isom(X), dont T est un domaine fondamental. Si on écrit les angles de T sous la forme $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$, il est clairement néssaire que p, q et r soient entiers. Pour le plan euclidien, la somme des angles devant être égale à π, cela ne laisse qu'un nombre fini de possibilités. Leur description est un bon exercice (voir les détails dans le premier chapitre de **Berger**). On obtient les résultats suivants.

p	q	r	T
3	3	3	Triangle équilatéral
2	4	4	Triangle isocèle rectangle
2	3	6	Demi triangle équilatéral

Pour la sphère, on sait d'après **5.3** que la somme des angles est supérieure à π. Une première série de possibilités est donnée par les triplets $(2,2,n)$, $n \geq 2$. Alors T est un demi-fuseau d'angle $\frac{2\pi}{n}$, et G est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times D_n$ (où D_n désigne le groupe diédral).

Sinon, on a les trois possibiltés ci-dessous, et G est le groupe des isoméries d'un polyèdre régulier de l'espace euclidien de dimension 3 (voir encore **Berger** pour les détails, non triviaux ; notons simplement que card$(G) = 2\pi/\text{Aire}(T)$).

p	q	r	Polyèdre	Ordre de G
2	3	3	Tétraé'dre	24
2	3	4	Cube ou octaèdre	48
2	3	5	Dodécaèdre ou icosaèdre	120

Pour le plan hyperbolique, la situation est beaucoup plus riche. En effet, d'après **9.10**, la condition sur (p, q, r) devient

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$$

Il y a donc a priori une infinié de telles possibilités, et Henri Poincaré a montré que la condition ci-dessus suffit pour assurer l'existence d'un pavage (voir **Stilwell** , ch.7 pour quelques indications. Notons aussi que les triangles idéaux font partie du lot. On y perd simplement la compacité du domaine fondamental.

Ces considérations montrent l'existence de sous-groupes discrets Γ de $\mathrm{Isom}(X)$ tels que X/Γ soit compact (puisque X/Γ est l'image par l'application de passage au quotient d'un domaine fondamental).

Je n'en dirai pas plus, et signalerai simplement qu'il y a un gros morceau de belles mathématiques, très vivantes aujourd'hui, derrière tout cela (surfaces de Riemann, fonctions modulaires). Voir encore la fin de **Stilwell**..

11 Appendice : topologie, variétés, actions de groupes

Donnons des références supplémentaires, essentiellement pour consultation (le thème général de ces livres étant assez éloigné de celui de ce texte).

CHOQUET, Topologie, Masson.

LAFONTAINE, Introduction aux variétés différentielles, Grenoble Sciences.

SKANDALIS, Topologie et Analyse, Dunod.

11.1 Espaces topologiques

Definition 11.1 *Une topologie sur un ensemble X est la donnée d'un ensemble $\mathcal{O}$ de parties de X appelées parties ouvertes, telles que*

1. *l'ensemble vide et X sont ouverts ;*
2. *toute intersection finie d'ouverts est un ouvert ;*
3. *toute réunion d'ouverts est un ouvert.*

On dit alors que X est un espace topologique.

On peut aussi se donner l'ensemble $\mathcal{F}$ des complémentaires des ouverts, que l'on appelle bien sûr fermés.

L'exemple le plus familier est celui de la topologie d'un espace métrique (E, dist), mais il y en a bien d'autres. Le plus simple : la topologie grossière (peu intéressante), où les seuls ouverts sont $\emptyset$ et X. Autre exemple : la topologie où les fermés sont X lui–même et les ensembles finis. La situation est complètement différente de ce qui se passe pour les espaces métriques : dès que X est infini, l'intersection de deux ouverts non vides est non vide !

Donnons deux motivations de cette définition :

a) bien des propriétés développées dans le cadre des espaces métriques (continuité, compacité, connexité) peuvent s'exprimer sans utiliser la métrique, directement au moyen des ouverts. Nous ne reprendrons donc pas ces propriétés.

b) ce cadre plus général permet des constructions qui dans le cadre métrique sont malcommodes (topologie produit) ou même parfois impossibles (topologie quotient, voir 11.2).

Difficulté : certaines propriétés de la topologie d'un espace métrique ne sont plus automoatiquement vérifiées. Par exemple dans un espace métrique si a et b sont deux points distincts, il existe des ouverts U et V disjoints contenant a et b (prendre les boules de centres a et b et de rayon $\mathrm{dist}(a,b)/2$.

Un espace topologique satisfaisant à cette propriété est dit *séparé*.

Attention. Un espace topologique compact est un espace pour lequel tout recouvrement ouvert admet un sous–recouvrement fini, et qui, de surcroît, est *séparé*. La propriété de recouvrement n'implique pas la séparation, alors que celle–ci est décisive : une partie compacte d'un espace séparé est fermée (même preuve que dans le cas métrique). On en déduit (même preuve là encore) que toute application bijective d'un espace compact dans un espace séparé est un homéomorphisme.

Definition 11.2 *Une* variété topologique *de dimension n est un espace topologique séparé telle que tout point est contenu dans un ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbf{R}^n$.*

Dans la suite, le terme "variété" désignera une variété topologique. Par exemple, une sous–variété de dimension p de $\mathbf{R}^n$ est une variété topologique de dimension p. Cela vient du résultat classique de calcul différentiel qui assure l'existence de paramétrisations (voir par exemple **Berger–Gostiaux**, 2.1, et plus particulièrement 2.1.2 et 2.1.8). Nous allons voir d'autres exemples de variétés qui apparaissent dans un contexte (apparemment) très différent.

Definition 11.3 *Un* groupe topologique *G est un groupe muni d'une topologie pour laquelle les applications $(g,h) \mapsto gh$ de $G \times G$ dans G et $g \mapsto g^{-1}$ de G dans G sont continues.*

Par exemple, tous les sous-groupes de $Gl(n,K)$ (avec $K = \mathbf{R}$ ou $K = \mathbf{C}$) sont des groupes topologiques.

11.2 Topologie quotient

Soit X un espace topologique et p une application de X dans un ensemble Y. On munit Y d'une topologie en décrètant qu'une partie U de Y est ouverte si et seulement si $p^{-1}(U)$ est ouvert dans X (tout marche très bien parce que l'image réciproque d'une union ou d'une intersection est l'union ou l'intersection des images réciproques).

Le cas le plus fréquent est celui où X est muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$, l'application p étant l'application canonique de X dans $Y = X/\mathcal{R}$. D'après la définition même de la topologie sur Y, on a le critère suivant.

Proposition 11.4 *Pour qu'une application f de $X/\mathcal{R}$ dans un espace topologique Z soit continue, il faut et suffit que $f \circ p : X \to Z$ soit continue.*

En particulier, si $F : X \to Z$ est continue et constante sur les classes d'équivalence, F passe au quotient (autement dit il existe $\overline{F} : X/\mathcal{R} \to Z$ telle que $F = \overline{F} \circ p$, et $\overline{F}$ est continue.

11.3 Actions de groupe

Definition 11.5 *Une action d'un groupe topologique G sur un espace topologique X est dite continue si l'application $(g, x) \mapsto g \cdot x$ de $G \times X$ dans X est continue.*

En appliquant cette propriété à g^{-1}, on voit que $x \mapsto g \cdot x$ est un homéomorphisme.

Bien sûr, dans le cas d'un groupe discret, il suffit de dire que les applications $x \mapsto g \cdot x$ sont des homéomorphismes. Notons que *toutes* les actions de groupe que nous avons vues dans ce résumé sont des actions continues.

Autre exemple. Soit $f : X \to X$ un homéomorphisme. On peut lui associer une action de $\mathbf{Z}$ sur X en posant $n \cdot x = f^n(x)$. Comprendre ce type d'action, qui peut être très compliquée, est une branche importante des mathématiques (systèmes dynamiques discrets).

On s'intéresse ici à un cas très particulier, dont l'archétype est l'exemple suivant.

Exemple de base. On prend l'action de $\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{R}$ définie par $n \cdot x = x + n$. Alors l'application $p(x) = e^{2i\pi x}$ définit par passage au quotient un homéomorphisme de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ sur S^1. On remarquera qui si I est un intervalle ouvert de S^1, $p^{-1}(I)$ est une réunion dénombrable d'ouverts disjoints, et que la restriction de p à chacun d'entre eux est un homéomorphisme sur I. La définition qui suit formalise cette situation.

Definition 11.6 *Soient X et Y deux variétés topologiques. Une application $f : X \to Y$ est un* revêtement *si elle est continue, surjective, et tout $y \in Y$ est contenu dans un ouvert V tel que*

$$p^{-1}(V) = \cup_{i \in I} U_i,$$

où les U_i sont des ouverts deux à deux disjoints, tels que la restrictin de p à U_i est un homéomorphisme sur V.

Definition 11.7 *L'action d'un groupe discret Γ est sur un espace localement compact X est* propre *si, quels que soient les compacts K et L de X, l'ensemble*

$$\{\gamma \in \Gamma, \gamma(K) \cap L \neq \emptyset\}$$

est fini.

Elle est libre *si $\gamma(x) \neq x$ pour tout x et tout $\gamma \neq e$.*

Exemple Si un groupe G opère par isomťries sur un espace métrique localement compact, tout sous-groupe discret de G agit proprement. La section précédente donne une foule d'exemples.

Théorème 11.8 *Si l'action d'un groupe* Γ *sur une variété* X *est propre et libre, alors* X/Γ *muni de la topologie quotient est une variété, et l'application canonique* $p : X \to X/\Gamma$ *est un revêtement.*

Pour la preuve, voir par exemple **Lafontaine**, p. 74 ; même s'il y est question de variétés différentielles, les arguements sont les mêmes.

Exemples

1. Pour l'action de $\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{R}^2$ donnée par $n \cdot (x, y) = (x + n, y)$, $\mathbf{R}^2/$, le quotient $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}$ est homéomorphe au cylindre $S^1 \times \mathbf{R}$
2. Pour l'action de $\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{R}^2$ donnée par $n \cdot (x, y) = (x + n, (-1)^n y)$, le quotient $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}$ s'appelle le *ruban de Möbius*.
3. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ une base d'un espace vectoriel E sur $\mathbf{R}$. Pour l'action de $\mathbf{Z}^k$ sur E donnée par
$$(n_1, \cdots, n_k).x = x + \sum_{i=1}^{k} n_i e_i$$
le quotient $E/\mathbf{Z}^k$ s'appelle le *tore de dimension* k. Il est homéomorphe à $(S^1)^k$.
4. Soit $\Gamma_{a,b}$ le sous–groupe de $\mathrm{Isom}(\mathbf{R}^2)$ engendré par la translation $T(x, y) = (x+a, y)$ et la symétrie glissée $T(x, y) = (-x, y+b)$. L'action de Γ est proprement discontinue sans point fixe. Le quotient $\mathbf{R}^2/\Gamma$ s'appelle *la bouteille de Klein*.
5. Le quotient de la sphère unité d'un espace euclidien E de dimension $n + 1$ par l'action du groupe $\Gamma = \{I, -I\}$ est une variété, homéomorphe à l'espace $P^n\mathbf{R}$ vu précédemment.

En fait, il est facile de vérifier que le seul groupe fini de $\mathrm{Isom}(S^2)$ qui opÈre librement est $\{I, -I\}$. De même, les seuls groupes discrets de $\mathrm{Isom}(\mathbf{R}^2)$ qui opèrent librement sont ceux que nous venons de voir : le groupe engendré par deux translations indépendantes (isomorphe á $\mathbf{Z}^2$), et le groupe $\Gamma_{a,b}$, engendré par une symétrie glissée et une translation de direction orthogonale à l'axe.

La fin de **10** laisse pressentir que la situation est beaucoup plus riche dans le cas hyperbolique. On démontre (une excellente référence en français est A. GRAMAIN, Topologie des Surfaces, PUF) que toute surface compacte "orientable" (ou, ce qui revient au même, toute sous-variété compacte de $\mathbf{R}^3$ est homéomorphe à un tore à g trous. L'entier g s'appelle le genre de la surface.

Par convention, 0 trous, c'est la sphère. Un trou, c'est le tore $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ (qui est homéomorphe au tore de révolution dans $\mathbf{R}^3$; penser à une chambre à air de bicyclette). Le tore à deux trous s'obtient en recollant deux tores à un trou, etc...

On démontre (c'est l'une des grandes découvertes d'Henri Poincaré) (voir encore **Stilwell**) que toute surface de genre $g > 1$ peut se réaliser comme un quotient du plan hyperbolique par un groupe discret d'isométries. Pour un autre point de vue, voir aussi, dans les problèmes accompagnant ce résumé, la fin du problème 13