**Université Montpellier II**
***Département des Sciences Mathématiques***
LICENCE de MATHÉMATIQUES - OpA

**Année 2004-2005**

# Travaux pratiques MAPLE

**Sujet d'examen**

Durée : 2 h
Tous documents autorisés

☞ *Tous les résultats établis en TP et tous les programmes écris en TP peuvent être réutilisés librement, ainsi que le fruit de votre travail personnel. Les commandes* MAPLE *employées afin de répondre aux questions seront recopiées sur la copie, en guise de justification des réponses que vous donnerez. Sauf mention du contraire, vous êtes libre d'utiliser ou non le logiciel de calcul formel.*

## Exercice 1

**1** Montrer que la courbe projective plane $C$ définie sur $\mathbb{Q}$ par l'équation $u^3 + v^3 = u + v + 1$ possède un unique point à l'infini $P$. Est-ce un point d'inflexion ?

**2** Montrer que $(C, P)$ définit une courbe elliptique.

**3** Mettre l'équation de $C$ sous forme de Weierstrass (courte).

## Exercice 2

Soit $E$ la courbe elliptique $y^2 = x^3 + 17$ définie sur $\mathbb{Q}$.

**4** Démontrer que tout point rationnel $(x, y)$ est d'ordre infini.

**5** Montrer que $E$ possède au moins huit points $(x, y)$ à coordonnées entières (i.e. dans $\mathbb{Z}$) avec $y$ positif.

*Remarque.* En fait, il s'agit là de tous les points entiers, mais c'est plus difficile à démontrer. De manière générale, un théorème (dû à Siegel) affirme qu'une courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}$ ne possède qu'un nombre fini de points entiers.

**6** Faire une conjecture concernant le rang du sous-groupe de $E(\mathbb{Q})$ engendré par les points entiers (*indication* : écrire une procédure cherchant des relations du type $aP + bQ = R$, avec $a$ et $b$ des entiers de taille raisonnable, les trois points $P, Q$ et $R$ étant donnés).

**Tournez la page, S.V.P.**

**Exercice 3**

**7** Déterminer la structure de groupe de $E(\mathbb{Q})_{tors}$ pour la courbe elliptique $E_1$ d'équation $y^2+5xy-6y=x^3-3x^2$.

**8** Même question avec les courbes elliptiques $E_2 : y^2 = x^3+8$ et $E_3 : y^2 = x^3-8x-8$. On donnera deux méthodes, dont l'une utilisera exclusivement la connaissance des points d'ordre deux et des diverses réductions modulo les premiers $p$ (*indication* : trouver $p$ tel que $E_3(\mathbb{F}_p)$ ne possède pas d'élément d'ordre quatre).

**Exercice 4**

**9** Tout entier naturel $n$ se décompose dans $\mathbb{N}$ comme un produit $uv^2$, où $u$ est sans facteur carré. Ecrire une procédure, utilisant la commande MAPLE `ifactors`, renvoyant $u$ pour un entier $n$ quelconque donné.

**10** Exhiber une liste de vingt nombres congruents sans facteur carré inférieurs à cent (il y en a 36 en tout !)

**11** Donner un point rationnel d'ordre infini sur la courbe elliptique $y^2 = x^3 - 56^2 x$.