

# SOMMAIRE

## Première partie - GROUPES

### Chapitre I - Généralités sur les groupes

1 - Définitions - Exemples . . . . .	17
2 - Sous-groupes - Morphismes . . . . .	22
A - Sous-groupes . . . . .	22
B - Sous-groupes engendrés . . . . .	26
C - Ordre d'un groupe, d'un élément . . . . .	27
D - Morphismes . . . . .	28
3 - Produit direct de groupes . . . . .	34
A - Produit de sous-groupes d'un groupe . . . . .	34
B - Produit direct de groupes . . . . .	35
TR.I.A. Étude du groupe symétrique $S_n$ . . . . .	40
TR.I.B. Groupes cycliques . . . . .	43
TR.I.C. Détermination des groupes d'ordre $n$ , $1 \leq n \leq 9$ . . . . .	45
TP.I. Étude de quelques groupes de permutations . . . . .	48

### Chapitre II - Groupes quotients

1 - Classes modulo un sous-groupe . . . . .	53
2 - Compatibilité avec la structure . . . . .	57
3 - Groupes quotients . . . . .	59
4 - Caractérisation des sous-groupes normaux . . . . .	62
5 - Sous-groupes normaux et morphismes . . . . .	64
6 - Sous-groupes d'un groupe quotient . . . . .	66
TR.II.A. Sous-groupes dérivés et abélianisation . . . . .	70
TR.II.B. Étude des sous-groupes normaux de $S_n$ . . . . .	71
TR.II.C. Étude des automorphismes de $S_n$ . . . . .	74
TP.II. Classes, structure quotient et systèmes générateurs forts . . . . .	76

<b>Chapitre III - Présentation d'un groupe par générateurs et relations</b>	
1 - Groupes libres . . . . .	81
2 - Générateurs et relations . . . . .	88
TR.III.A. Présentation du groupe quaternionique $\mathcal{H}$ . . . . .	91
TR.III.B. Groupes de présentation finie . . . . .	91
TR.III.C. Quelques propriétés des groupes libres . . . . .	92
TR.III.D. Produit libre de groupes . . . . .	93
<b>Chapitre IV - Groupes opérant sur un ensemble</b>	
1 - Définitions - Exemples . . . . .	97
2 - Stabilisateurs - Orbites . . . . .	100
3 - Produit semi-direct . . . . .	103
A - Groupes opérant sur un groupe . . . . .	103
B - Produit semi-direct de sous-groupes . . . . .	104
C - Produit semi-direct de groupes . . . . .	105
4 - Opérations transitives, fidèles . . . . .	107
5 - Points fixes . . . . .	108
TR.IV.A. Groupes diédraux $D_n$ . . . . .	110
TR.IV.B. Groupe des isométries du cube . . . . .	111
TR.IV.C. Produits et extensions de groupes . . . . .	112
TR.IV.D. Groupes libres de rang 2 . . . . .	114
TP.IV.A. Générateurs et relations, autour de l'algorithme de Todd-Coxeter . . . . .	116
TP.IV.B. Actions $k$ -transitives, formule de Burnside et énumération de Polya . . . . .	124
<b>Chapitre V - Les théorèmes de Sylow</b>	
1 - Le premier théorème de Sylow . . . . .	133
2 - Le second théorème de Sylow . . . . .	135
3 - Applications . . . . .	137
TR.V.A. $\text{Int}(S_6) \neq \text{Aut}(S_6)$ . . . . .	140
TR.V.B. Détermination des groupes d'ordre $n$ , $n \leq 15$ . . . . .	141
TR.V.C. Détermination des groupes d'ordre $pq$ . . . . .	142

## Chapitre VI - Groupes abéliens

1 - Somme directe de groupes abéliens . . . . .	145
A - Somme directe de sous-groupe d'un groupe abélien . . . . .	145
B - Somme directe de groupes abéliens . . . . .	147
C - Facteur direct d'un groupe abélien . . . . .	148
2 - Groupes abéliens libres . . . . .	149
A - Définition - Propriété universelle . . . . .	149
B - Rang d'un groupe abélien libre . . . . .	153
C - Sous-groupes d'un groupe abélien libre . . . . .	156
3 - Groupes abéliens de torsion . . . . .	159
4 - Structure des groupes abéliens de type fini . . . . .	162
TR.VI.A. Rang d'un groupe libre . . . . .	173
TR.VI.B. Groupes divisibles . . . . .	174
TR.VI.C. Calcul des facteurs invariants . . . . .	177
TP.VI.A. Algorithmes de Gauss-Jordan, de Hermite et de Smith . . . . .	179
TP.VI.B. Courbes elliptiques et groupe de Mordell . . . . .	184

## Chapitre VII - Groupes résolubles

1 - Suites de composition . . . . .	193
2 - Suites de Jordan-Hölder . . . . .	195
3 - Groupes résolubles . . . . .	197
4 - Applications . . . . .	199

## Deuxième partie - THÉORIE DES CORPS

### Chapitre VIII - Anneaux de polynômes

1 - Anneaux : définitions - exemples . . . . .	203
2 - Idéaux - Morphismes . . . . .	207
3 - Idéaux maximaux - Idéaux premiers . . . . .	211
4 - Produit d'anneaux - Théorème chinois . . . . .	213
5 - Corps des fractions d'un anneau intègre . . . . .	215
6 - Anneaux de polynômes . . . . .	216
7 - Anneaux principaux . . . . .	222
8 - Divisibilité . . . . .	228

9 - Irréductibilité des polynômes . . . . .	231
10 - Racines - Ordre de multiplicité . . . . .	236
11 - Polynômes symétriques . . . . .	240
TR.VIII.A. Critère d'irréductibilité par extension . . . . .	243
TR.VIII.B. Critère d'irréductibilité par réduction . . . . .	243
TR.VIII.C. Résultant - Discriminant . . . . .	245
TR.VIII.D. Algèbres - Algèbres de polynômes . . . . .	246
TP.VIII. Entiers de Gauss et sommes de deux carrés . . . . .	250
<b>Chapitre IX - Généralités sur les extensions de corps</b>	
1 - Corps premiers - Caractéristique d'un corps . . . . .	255
2 - Extensions . . . . .	257
TR.IX.A. Corps finis . . . . .	261
TR.IX.B. Corps des quaternions et théorème des quatre carrés . . . . .	262
TP.IX.A. Factorisation des polynômes . . . . .	266
TP.IX.B. Les quaternions de Hamilton . . . . .	275
<b>Chapitre X - <math>K</math>-morphisms et groupe de Galois d'une extension</b>	
1 - $K$ -morphisms . . . . .	281
2 - Groupe de Galois . . . . .	282
3 - Degré d'une extension et ordre du groupe de Galois . . . . .	284
4 - Corps intermédiaires et sous-groupes du groupe de Galois . . . . .	286
<b>Chapitre XI - Extensions algébriques - Extensions transcendentes</b>	
1 - Extensions algébriques . . . . .	289
2 - Extensions transcendentes . . . . .	295
3 - Appendice : Le nombre $\pi$ est irrationnel et transcendant sur $\mathbb{Q}$ . . . . .	300
TR.XI.A. Constructions à la règle et au compas . . . . .	304
TR.XI.B. Théorème de Lüroth . . . . .	306
TP.XI. Nombres algébriques et calcul du polynôme minimal . . . . .	308

<b>Chapitre XII - Décomposition des polynômes - Clôtures algébriques</b>	
1 - Corps de rupture et corps de décomposition d'un polynôme . . . . .	317
2 - Clôtures algébriques . . . . .	322
TR.XII. Plongements dans une clôture algébrique . . . . .	330
TP.XII. Calculs dans les corps de nombres . . . . .	334

<b>Chapitre XIII - Extensions normales, séparables</b>	
1 - Extensions et éléments conjugués . . . . .	341
2 - Extensions normales . . . . .	342
3 - Extensions séparables . . . . .	346
4 - Éléments primitifs . . . . .	352
5 - Norme et trace . . . . .	354
TR.XIII.A. Corps parfaits . . . . .	358
TR.XIII.B. Extensions inséparables et radicielles . . . . .	358
TR.XIII.C. Dérivations et extensions séparables . . . . .	360

**Troisième Partie - THÉORIE DE GALOIS ET APPLICATIONS**

**Chapitre XIV - Extensions galoisiennes - Théorie de Galois des extensions finies**

1 - Extensions galoisiennes . . . . .	367
2 - Clôture galoisienne d'une extension séparable . . . . .	370
3 - Théorèmes fondamentaux de la théorie de Galois . . . . .	370
4 - Étude d'un exemple . . . . .	373
TR.XIV. Théorie de Galois des extensions infinies . . . . .	377
TP.XIV. Autour de la correspondance de Galois . . . . .	380

**Chapitre XV - Racines de l'unité - Corps finis - Extensions cycliques**

1 - Racines de l'unité . . . . .	387
2 - Corps des racines n-ième de l'unité . . . . .	389
3 - Polynômes cyclotomiques . . . . .	391
4 - Corps finis . . . . .	393
5 - Extensions cycliques . . . . .	397

TR.XV.A. Symboles de Legendre. Loi de réciprocité quadratique . . . . .	401
TR.XV.B. Interprétation cohomologique du théorème « Hilbert 90 » . . . . .	403
TR.XV.C. Irréductibilité du polynôme $X^n - a$ . . . . .	404
TP.XV. Racines de l'unité dans un corps fini et codes BCH . . . . .	408
<b>Chapitre XVI - Résolubilité par radicaux des équations polynomiales</b>	
1 - Extensions radicales . . . . .	419
2 - Résolubilité des polynômes . . . . .	422
3 - Caractérisation des polynômes résolubles . . . . .	427
TR.XVI. Résolution des équations polynomiales de degré 3 et 4 . . . . .	429
TP.XVI. Théorie de Galois constructive . . . . .	433
<b>Chapitre XVII - Polygones réguliers constructibles et nombres de Fermat</b>	
1 - Points constructibles . . . . .	451
2 - Constructibilité des polygones réguliers . . . . .	454
<b>Appendice</b>	
1 - Ensembles ordonnés . . . . .	457
2 - Cardinaux - Ensembles infinis . . . . .	460
<b>Index terminologique</b> . . . . .	467
<b>Bibliographie</b> . . . . .	475