Algèbre homologique / *Homological Algebra*

HOMOTOPIE EXPLICITE EN (CO)HOMOLOGIE DE HOCHSCHILD

Gilles Halbout

Résumé – Soient k le corps $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, M l'espace k^n et A l'algèbre des polynômes sur k. Nous donnons une formule d'homotopie explicite entre le complexe de chaînes de Hochschild de A, $(C_.(A), b)$ et le complexe de de Rham de M, $(\Omega^\cdot(M), 0)$. Cette formule se généralise quand M est un ouvert contractile sur une variété complexe et A est l'espace des fonctions holomorphes sur M. On trouve ensuite une formule d'homotopie en cohomologie pour l'algèbre des fonctions régulières sur M, différente de celle donnée dans [2]. Enfin, nous montrons comment on peut utiliser cette formule pour construire une homotopie pour l'homologie cyclique.

EXPLICIT HOMOTOPY FORMULA FOR HOCHSCHILD (CO)HOMOLOGY

Abstract – Let k be the field $\mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$, let M be the space k^n and let A be the algebra of polynomials over M. We produce a general explicit homotopy formula between the complex of Hochschild chains of A, $(C_.(A), b)$ and the de Rham complex of M, $(\Omega^\cdot(M), 0)$. This formula can be generalized when M is a contractible open set in a complex manifold and A is the space of holomorphic functions over M. Then we find a new homotopy formula for the Hochschild cohomology of the algebra of smooth fonctions over M different from the one given in [2]. Finally, we show how this formula can be used to construct a homotopy for the cyclic homology.

Abridged English Version

Let A be a commutative regular affine algebra with unit and $\mathcal{M}$ be a A-bimodule. The Hochschild homology of A with coefficients in $\mathcal{M}$, which we will denote by $H_.(A, \mathcal{M})$, is by definition $\mathrm{Tor}^{A^e}(\mathcal{M}, A)$ with $A^e = A \otimes A^{op}$ where A^{op} is A endowed with the opposite multiplication. The Hochschild-Kostant-Rosenberg theorem (*cf.* [4]) says that the natural application $H_1 = H_1(A, A) \to H_.(A, A)$ between Hochschild homology groups induces an isomorphism of A-algebras :

$$\wedge^\cdot_A(H_1) \to H_.(A, A)$$

where $\wedge^\cdot_A(H_1)$ is the exterior A-algebra over H_1. The group $H_1(A, A)$ is isomorphic to the A-module of Kähler differentials.

In other words, the complexes $(\bar{C}_.(A), b)$ and $(\wedge^\cdot_A(H_1(A, A)), 0)$ are quasi-isomorphic, where $\bar{C}_l(A) = A \otimes (A/k)^{\otimes l}$ and b is the Hochschild boundary. It is then natural to look for maps $I : \wedge^{\cdot}_A(H_1(A,A)) \to \bar{C}.(A)$, $J : \bar{C}.(A) \to \wedge^{\cdot}_A(H_1(A,A))$ and $s : \bar{C}.(A) \to \bar{C}._{+1}(A)$ such that I and J are morphisms of complexes satisfying

$$I \circ J = \mathrm{Id} + b \circ s + s \circ b \text{ and } J \circ I = \mathrm{Id}\,.$$

When $A = k[x_1, \ldots, x_n]$, we can define J and I by

$$J(P_0, P_1, \ldots, P_l) = P_0\, dP_1 \wedge \cdots \wedge dP_l \text{ and } I(P\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l}) = P \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_l}.$$

To construct the homotopy s we use a "coproduct" $\Delta : A \to A \otimes A$, which can be generalized to maps $\Delta^l : A^{\otimes l} \to A \otimes A$. The properties of these operators are quite remarkable.

The coproduct Δ is defined using the Borel-Laplace transform (*cf.* [6]). This allows to extend the homotopy formula to the algebra of holomorphic functions over a contractible open set on a complex manifold.

By duality we find also a homotopy formula for the Hochschild cochains different from the one given in [2].

---

1. Résultat principal

Soit A l'algèbre de polynômes $k[x_1, \ldots, x_n]$. Introduisons la notation B^v_u pour l'ensemble des applications de $[1, \ldots, u]$ dans $[1, \ldots, v]$. Pour tout élément σ dans B^b_u et i dans $[1, \ldots, u]$, l'expression $\sigma{\cdot}i$ désigne l'image de i par l'application σ. Si Σ est une partie finie de $\mathbb{N}$, on note $P(\Sigma)$ l'ensemble des permutations de Σ. Les applications $I : \Omega^{\cdot}_A \to \bar{C}.(A)$, $P\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_l} \mapsto P \otimes x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_l}$ et $J : \bar{C}.(A) \to \Omega^{\cdot}_A$, $P_0 \otimes P_1 \otimes \cdots \otimes P_l \mapsto P_0\, dP_1 \wedge \cdots \wedge dP_l$ sont des morphismes entre les complexes $(\bar{C}.(A), b)$ et $(\Omega^{\cdot}_A, 0)$ ($\bar{C}_l(A) = A \otimes (A/k)^{\otimes l}$, b est le bord de Hochschild, et $\Omega^{\cdot}_A$ est l'espace des formes différentielles sur $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ à coefficients polynomiaux). Ces applications vérifient : $J \circ I = \mathrm{Id}$. D'après [4], il est naturel de chercher une application $s : \bar{C}.(A) \to \bar{C}._{+1}(A)$ vérifiant :

$$I \circ J = \mathrm{Id} + b \circ s + s \circ b.$$

Pour cela nous construisons un "coproduit" Δ :

Définition 1.1. *$\Delta : A \to A \otimes A$, est définie, pour P homogène de degré m, par :* $P \mapsto \frac{1}{m+1} 1 \otimes P + \cdots + \frac{1}{(m+1)\cdots(m-l+1)} \sum\limits_{\sigma \in B^n_l} x_{\sigma\cdot 1} \cdots x_{\sigma\cdot l} \otimes \frac{\partial^l P}{\partial x_{\sigma\cdot 1} \cdots \partial x_{\sigma\cdot l}} + \cdots + \frac{1}{m+1} P \otimes 1.$

Nous définissons par récurrence des applications Δ^l pour $l \geq 1$ ainsi :

Définition 1.2. *Soit $\tilde{\Delta} : A \otimes A \to A \otimes A$ définie par : $\tilde{\Delta}(P, Q) = (P \otimes 1){\cdot}\Delta(Q)$. On définit $\Delta^l : A^{\otimes l} \to A^{\otimes 2}$ pour $P_1, \ldots, P_l$ dans A par :*

$$\Delta^l(P_1, \ldots, P_l) = l\tilde{\Delta}[(1 \otimes t^{l-1} P_1)\Delta^{l-1}(P_2, \ldots, P_l)]_{(0,1)}$$

où t est une variable supplémentaire introduite pour la commodité des calculs (on passe de A à $k[t, x_1, \ldots, x_n]$) et où la notation $[\cdot \otimes \cdot]_{(0,1)}$ signifie que l'on a spécialisé t en 0 dans le premier facteur du produit tensoriel et en 1 dans le second.

Soit s : $A^{\otimes l+1} \to A^{\otimes l+2}$ définie pour $P_0, \ldots, P_l$ dans A par $s(P_0 \otimes \cdots \otimes P_l) =$
$= \sum_{j=1}^{l} (-1)^{l-j} (P_0 \otimes \cdots \otimes P_{l-j} \otimes 1) \sum_{\sigma \in B_j^n} \bar{\Delta}^j (\frac{\partial P_{l-j+1}}{\partial x_{\sigma \cdot 1}}, \cdots, \frac{\partial P_l}{\partial x_{\sigma \cdot j}}) \otimes x_{\sigma \cdot 1} \wedge \cdots \wedge x_{\sigma \cdot j}$,
$\bar{\Delta}^j$ étant l'image de Δ^j par l'injection : $A \otimes A \to A^{\otimes l-j+2}$, $(a \otimes a') \mapsto a \otimes 1^{\otimes (l-j)} \otimes a'$. Nous avons alors le résultat souhaité :

Théorème 1.3. *Soit A l'algèbre des polynômes. L'application s est une homotopie entre les complexes de Hochschild et de de Rham de A, c'est-à-dire :*

$$I \circ J = \mathrm{Id} + b \circ s + s \circ b.$$

La démonstration de ce théorème repose essentiellement sur l'étude des propriétés des opérateurs Δ^l.

2. Propriétés de l'opérateur Δ

Les preuves des résultats contenus dans cette partie se font directement et sont la plupart du temps des conséquences de l'identité d'Euler pour les polynômes.

Proposition 2.1. *Soit m^o la multiplication (commutative et associative) : $A \otimes A \to A$ que l'on étend (grâce à l'associativité) en une application, toujours notée m^o : $A^{\otimes l} \to A$ ($l \in \mathbb{N}$). Pour tout l dans $\mathbb{N}$, l'application $m^o \circ \Delta^l$: $A^{\otimes l} \to A$ vérifie alors la propriété suivante :*

$$m^o \circ \Delta^l = m^o.$$

Nous pouvons ensuite énoncer des généralisations de l'identité d'Euler pour les polynômes homogènes. Nous poserons, pour $1 \leq i \leq n$, $f_i = (1 \otimes x_i) - (x_i \otimes 1)$ (élément de $A \otimes A$).

Théorème 2.2. *Pour tout P dans A, nous avons :*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \Delta \frac{\partial P}{\partial x_i} = 1 \otimes P - P \otimes 1.$$

Pour tout $r > 1$ dans $\mathbb{N}$, $P_1, \ldots, P_r$ dans A et $1 < i < r$:

$$\sum_{l=1}^{n} f_l \frac{\Delta^r}{r} (P_1, \ldots, \frac{\partial P_r}{\partial x_l}) = \Delta^{r-1}(P_1, \ldots, P_{r-1} P_r) - (P_r \otimes 1) \Delta^{r-1}(P_1, \ldots, P_{r-1})$$

$$\sum_{l=1}^{n} f_l \frac{\Delta^r}{r} (P_1, \ldots \frac{\partial P_i}{\partial x_l}, \ldots, P_r) = \Delta^{r-1}(\ldots P_{i-1} P_i, \ldots, P_r) - \Delta^{r-1}(\ldots P_i P_{i+1}, \ldots, P_r)$$

$$\sum_{l=1}^{n} f_l \frac{\Delta^r}{r} (\frac{\partial P_1}{\partial x_l}, P_2, \ldots, P_r) = (1 \otimes P_1) \Delta^{r-1}(P_2, \ldots, P_r) - \Delta^{r-1}(P_1 P_2, \ldots, P_r).$$

Enfin, pour tous $P_1, \ldots, P_r$ dans A ($r \geq 0$), nous avons :

$$v \circ \Delta^r(P_1, \ldots, P_r) = \Delta^r(P_r, \ldots, P_1),$$

où vst la volte : $A \otimes A \to A \otimes A$, $P \otimes Q \mapsto Q \otimes P$.

Ces identités permettent alors de prouver que pour tous $P_0, \cdot, P_r$ dans A, $(s \circ b + b \circ s)(P_0, \ldots, P_r) = J \circ I(P_0 \otimes \cdots \otimes P_r) - (P_0 \otimes \cdots \otimes P_r) + (P_0 \cdot P_r \otimes \cdots \otimes P_{r-1} \otimes 1)$, ce qui prouve le théorème 1.3. car nous travaillons sur A/k.

3. Généralisations

Nous pouvons étendre le résultat du théorème 1.3. à des espaces de fonctions plus grands : fractions rationnelles, séries entières, fonctions holomorphes sur une variété complexe. Pour cela nous allons exprimer Δ de manière plus intrinsèque. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ contenant 0 et notons A l'algèbre $\mathcal{O}(U)$ des fonctions holomorphes sur U. Notons Int l'application

$$\mathrm{Int} \ : \ A \to A, \ P \mapsto \int_0^1 P(tx)\, dt.$$

Considérons $\mathcal{B}$, la transformée de Borel (*cf.* [6]). *Cette application envoie l'ensemble des fonctions holomorphes au voisinage de 0 telles que $f(z) = O(z)$ à l'origine sur l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ qui sont de croissance au plus exponentielle à l'infini. Pour P dans $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ et $a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{C}$, notons $\bar{P}_{a_1,\ldots,a_n}$ le polynôme $\bar{P}_{a_1,\ldots,a_n}(z) = z \cdot P(z \cdot a_1, \ldots, z \cdot a_n)$. Définissons Φ sur A par*

$$\Phi(P)(a_1, \ldots, a_n) = \mathcal{B}(\bar{P}_{a_1,\ldots,a_n})(1).$$

Notons enfin $\Delta_0 : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{O}(U)$, où $\hat{\otimes}_\pi$ désigne le produit tensoriel projectif complété (cf. [3]), l'application définie par

$$\Delta_0(f)(u, v) = f(u + v).$$

Nous pouvons alors prolonger $\Delta : A \to A \hat{\otimes}_\pi A$ (où $A = \mathcal{O}(U)$) par :

$$\Delta(f) = (\Phi^{-1} \otimes \Phi^{-1}) \Delta_0(\Phi(\mathrm{Int}(f))).$$

Les propriétés des parties précédentes sont conservées par continuité des applications Φ, Δ_0 et Φ^{-1}. Nous avons ainsi une généralisation de théorème 1.3. :

Théorème 3.1. *Soit A l'algèbre des fonctions holomorphes au voisinage de 0. Soit s l'application construite en utilisant la nouvelle définition de Δ dans les formules de la première partie ; cette application $s : A^{\hat{\otimes} r} \to A^{\hat{\otimes} r+1}$ prolonge l'application définie sur les polynômes et est une homotopie entre le complexe de Hochschild et le complexe de de Rham.*

Remarque 3.2. *On peut étendre le Théorème 3.1. à des algèbres de fonctions plus grandes où la transformée de Borel est encore définie : par exemple, au cas où A est l'algèbre des fonctions définies sur des disques de Borel (disques ouverts dont le bord contient 0), ou aussi l'algèbre des fonctions asymptote Gevrey.*

En considérant le dual linéaire des applications définies dans la première partie, nous pouvons construire une formule d'homotopie pour la cohomologie de Hochschild sur une variété M. Nous retrouverons ainsi que la cohomologie de Hochschild peut être canoniquement identifiée aux multidérivations antisymétriques (*cf.* [1]). La formule que nous trouvons est différente de celle donnée par Lecomte et De Wilde ([2]) mais elle pourra être utilisée de la même manière pour la théorie des déformations. Nous nous restreindrons aux cochaînes locales, c'est-à-dire aux opérateurs multidifférentiels. Ceci est justifié par le fait que l'inclusion de ce dernier complexe dans le complexe de Hochschild total induit un isomorphisme en cohomologie. Nous pouvons aussi réduire notre étude au cas où M est un ouvert contractile : si l'on choisit une partition de l'unité φ_U, et si s_U est une homotopie sur U, l'application $s = \sum_U \varphi_U s_U$ sera une homotopie sur M. Dans ce cas, nous pouvons supposer que $M = \mathbb{R}^n$ et restreindre $A = C^\infty(M)$ aux fonctions à support compact. Notons $C^m(A, A)$ l'espace des $m-$cochaînes à valeurs dans A. Ces cochaînes s'écrivent sous la forme :

$$D(f_1, \dots, f_m) = \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\in(\mathbb{N}^n)^m} c_{\alpha_1,\dots,\alpha_m} D^{\alpha_1} f_1 \cdots D^{\alpha_m} f_m$$

où $c_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}$ est dans $C^\infty(M)$ et, si $\alpha = (a^1, \dots, a^n)$ est dans $\mathbb{N}^n$ et si D_i est la dérivée partielle par rapport à la coordonnée x_i, $D^\alpha = D_1^{a^1} \cdots D_n^{a^n}$. Nous notons $|\alpha| = a^1 + \cdots + a^n$.

Définition 3.3. *Si D est une cochaîne locale de $C^m(A, A)$, nous adoptons toujours la notation $D = \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_m} c_{\alpha_1,\dots,\alpha_m} D^{\alpha_1} \cdots D^{\alpha_m}$.*

- *Pour $l \geq 1$, nous définissons $q_{i,j} \; : \; C^m(A, A) \to C^m(A, A)$ par :*

$$q_{i,j}(D) = \sum c_{\alpha_1,\dots,\alpha_m} \frac{1}{i + |\alpha_j|} D^{\alpha_1} \cdots D^{\alpha_m}.$$

- *On définit, pour $1 \leq i \leq m$, $\Delta_i \; : \; C^m(A, A) \to C^{m+1}(A, A)$ par :*

$$\Delta_i D(f_1, \dots, f_{m+1}) = D(f_1, \dots, f_i f_{i+1}, \dots, f_{m+1}).$$

- *Enfin, si $m \geq 2$, on définit, pour $m-1 \geq l \geq 1$, la cochaîne $D^{(l)}$ dans $C^{m+l}(A, A)$ par :*

$$D^{(l)} = q_{1,m-1} \circ \Delta_{m-2} \circ \cdots \circ \Delta_{m-l} \circ q_{l,m-l}(D).$$

Théorème 3.4. *L'application $\tilde{s} \; : \; C^{m+1}(A, A) \to C^m(A, A)$, $\tilde{s}(D)(f_1, \dots, f_m) =$*

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{\sigma \in B_j^n \\ \tau \in P(\sigma([1,\dots,n]))}} \frac{(-1)^{j+\ell(\sigma)}}{j!} D^{(j)}\left(f_1, \dots, \frac{\partial f_{m-j+1}}{\partial x_{\sigma\cdot 1}}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_{\sigma\cdot j}}, x_{\tau\sigma\cdot 1}, \dots, x_{\tau\sigma\cdot j}\right)$$

est une homotopie entre les complexes de Hochschild et de de Rham. Sur l'espace des polynômes sur M l'application $\tilde{s}$ est donnée par la formule suivante :

$$\tilde{s}(D)(f_1, \ldots, f_m) = (-1)^m m^o \circ (\mathrm{Id} \otimes D) s(1 \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_m).$$

Enfin, en utilisant les techniques des rétractions par déformation (*cf.* [5]), nous obtenons de nouvelles formules d'homotopie entre l'homologie (ou la cohomologie) cyclique périodique et celle de de Rham. Ceci repose sur la proposition suivante :

Proposition 3.5. *La RD* $((C_{\cdot}(A), b), (\Omega^{\cdot}_A, 0), I, J, s)$ *est spéciale.*

Références bibliographiques

[1] **A. Connes, 1985**. Géométrie non commutative, *Publ. Math. IHES*, 62, p. 41-144.

[2] **P. Lecomte, M. De Wilde, 1995**. An homotopy formula for the Hochschild cohomology, *Compositio Math.*, 96 no.1, p. 99-109.

[3] **A. Grothendieck, 1955**. Produits tensoriels topologiques, *Memoirs Am. Math. Soc.*, 16, 140 pp.

[4] **G. Hochschild, B. Kostant et A. Rosenberg, 1962**. Differential forms on regular affine algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 102, p. 383-408.

[5] **C. Kassel, 1990**. Homologie cyclique, caractère de Chern et lemme de perturbation, *Angew. Math.*, 408, p. 159–180.

[6] **J. Martinet et J.P. Ramis, 1990**. Théorie de Galois différentielle et resommation - Computer algebra and differential equations, *Comput. Math. Appl.*, p. 117-214.

Gilles Halbout
Université Louis Pasteur
U. F. R. de mathématiques
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG

e-mail : halbout@math.u-strasbg.fr
tel : 03 88 41 66 59 fax : 03 88 61 90 69