Formalité G_∞ adaptée et star-représentations sur des sous-variétés coïsotropes

Martin Bordemann
Laboratoire de Mathématiques, Université de Haute Alsace, Mulhouse
e–mail : Martin.Bordemann@uha.fr

Grégory Ginot
Laboratoire Analyse Géométrie et Applications, Université Paris 13
Centre des Mathématiques et de Leurs Applications, ENS Cachan,
e–mail : Gregory.Ginot@cmla.ens-cachan.fr

Gilles Halbout
Institut de Recherche Mathématique Avancée de l'ULP Strasbourg
e-mail : halbout@math.u-strasbg.fr

Hans-Christian Herbig
Fachbereich Mathematik, Johann-Wolfgang-Goethe-Universität, Frankfurt a.M.
e-mail : herbig@math.uni-frankfurt.de

Stefan Waldmann
Fakultät für Mathematik und Physik, Albert-Ludwigs Universität Freiburg i. Br.
e-mail : Stefan.Waldmann@physik.uni-freiburg.de

Résumé

Soit X une variété de Poisson et C une sous-variété coïsotrope par rapport au crochet de Poisson. Soient $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{K})$ et $\mathcal{I}$ l'idéal des fonctions nulles sur C. Dans ce travail, nous construisons des star-produits $\star$ sur X qui sont *adaptés à* C, i.e. pour lesquels $\mathcal{I}[[h]]$ est un idéal à gauche de l'algèbre déformée $(\mathcal{A}[[h]], \star)$. Nous obtenons ainsi une *représentation de* $(\mathcal{A}[[h]], \star)$ *sur* $\mathcal{C}^\infty(C,\mathbb{K})[[h]] =: \mathcal{B}[[h]] = \mathcal{A}[[h]]/\mathcal{I}[[h]]$, déformant la représentation naturelle de $\mathcal{A}$ sur $C^\infty(C)$ pour la situation 'locale' $X = \mathbb{R}^n$ et $C = \mathbb{R}^{n-l}$. Ce résultat se déduit d'une généralisation de la conjecture de formalité de Tamarkin appliquée aux cochaînes adaptées à C : nous démontrons d'abord un théorème à la Hochschild-Kostant-Rosenberg entre l'espace $\mathfrak{g}_\mathcal{I}$ des champs de multivecteurs adaptés à C et $\mathfrak{G}_\mathcal{I}$, un espace naturel d'opérateurs multidifférentiels adaptés à C. Ensuite nous mettons en évidence l'existence d'une structure G_∞ sur $\mathfrak{G}_\mathcal{I}$ et montrons enfin que les obstructions à l'existence d'une formalité sont contrôlées par des groupes de cohomologie. Dans le cas où $X = \mathbb{R}^n$ et $C = \mathbb{R}^{n-l}$, $l \geq 2$ nous montrons que ces obstructions sont nulles.

Keywords : Deformation quantization, star-product, homology

AMS Classification : Primary 16E40, 53D55, Secondary 18D50, 16S80

Table des matières

Introduction

La théorie de quantification par déformation, conçue en 1978 par Bayen, Flato, Frønsdal, Lichnerowicz et Sternheimer [3], est maintenant très bien établie, surtout depuis l'article de Kontsevich [32] : pour décrire l'algèbre des observables quantiques, on cherche à construire une déformation formelle associative $*$, dite star-produit, de l'algèbre $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{K})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ définie sur une variété de Poisson (X, P). On exige que le commutateur d'ordre 1 dans le paramètre de déformation h soit proportionnel au crochet de Poisson défini par P. Plus précisément, un star-produit $\star$ est une multiplication associative $\mathbb{K}[[h]]$-bilinéaire sur le $\mathbb{K}[[h]]$-module $\mathcal{A}[[h]]$ telle que pour tous $f, g \in \mathcal{A}$,

(i) $f \star g = fg + h\mathsf{C}_1(f, g) + \sum_{k\geq 2} h^k \mathsf{C}_k(f, g)$,

(ii) $\mathsf{C}_1(f, g) - \mathsf{C}_1(g, f) = P(\mathrm{d}f, \mathrm{d}g)$,

(iii) Les $(\mathsf{C}_r)_{r\geq 1}$ sont des opérateurs bidifférentiels.

(iv) $\mathsf{C}_r(f, 1) = 0 = \mathsf{C}_r(1, f)$ quel que soit $r \geq 1$.

L'existence d'un star-produit s'était avérée très difficile : pour les variétés symplectiques le théorème général a été montré par DeWilde et Lecomte en 1983 [19] et pour les variétés de Poisson par Kontsevich [32]. La classification à équivalence près a été faite par Deligne, Nest-Tsygan et Bertelsson-Cahen-Gutt pour le cas symplectique et par Kontsevich [32] pour le cas général.

Une des racines historiques de la quantification par déformation était sans doute le calcul symbolique des opérateurs différentiels sur une variété différentielle Q auquel correspond le fibré cotangent T^*Q comme variété symplectique. Dans ce contexte, l'algèbre déformée $\mathcal{C}^\infty(T^*Q,\mathbb{K})[[h]]$ venait toujours avec un module à gauche, à savoir l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty(Q,\mathbb{K})[[h]]$ sur lequel elle agit comme opérateurs différentiels. En général, la question algébrique d'étudier *les modules* ou les *représentations* $\rho : \mathcal{A}[[h]] \otimes \mathcal{M}[[h]] \to \mathcal{M}[[h]]$ d'une algèbre déformée est très intéressante et –en toute généralité– toujours ouverte. Quelques cas particuliers ont été étudiés par Fedosov (modules projectifs, voir [22]), M.Bordemann et S.Waldmann (définition de la construction de Gel'fand-Naimark-Segal (GNS) dans le cadre de la quantification par déformation, voir [7]), H.Bursztyn et S.Waldmann (étude de Morita, voir [8], [9], [10], [11], [12] et le review [47]). Pour une étude générale des modules, des morphismes et la réduction des star-produits et quelques résultats dans le cas symplectique, voir [4].

Une classe de représentations différentielles importante est donnée par l'espace $\mathcal{B} = \mathcal{C}^\infty(C,\mathbb{K})$ pour une variété différentielle C quelconque : on peut montrer qu'une condition nécessaire à l'existence d'une représentation de $(\mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{K})[[h]], *)$ sur $\mathcal{B}[[h]]$ en tant qu'opérateurs différentiels est la donnée d'une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ $i : C \to X$, *coïsotrope* par rapport à la structure de Poisson P sur X : ceci veut dire que *l'idéal annulateur* $\mathcal{I} := \operatorname{Ker} i^*$ est une sous-algèbre de Poisson de $\mathcal{A}$. Les sous-variétés coïsotropes d'une variété de Poisson ont la particularité d'être toujours munies d'un feuilletage (en général singulier), et l'espace des feuilles peut être considéré comme variété de Poisson (*réduction symplectique*). Nous étudions ici le problème réciproque : la *quantification des sous-variétés coïsotropes*, c'est-à-dire la construction d'une structure de module à gauche $\mathcal{B}[[h]]$ pour l'algèbre déformée $\mathcal{A}[[h]]$. Un star-produit $\star$ sera alors dit *représentable sur une sous-variété C de X* lorsqu'il existe une représentation de l'algèbre déformée sur $\mathcal{B}[[h]]$. L'existence de tels star-produits, une fois établie, nous procure d'un bon candidat pour *l'algèbre réduite*, à savoir le *commutant* ou l'espace de tous les homomorphismes de $\mathcal{A}[[h]]$-modules $\mathcal{B}[[h]] \to \mathcal{B}[[h]]$ (voir [4] pour des détails). Ceci correspond également au "*coisotropic creed*" prononcé par Jiang-Hua Lu [36] et décrit en partie dans le cadre BRST dans [6]. Le problème que nous regardons est aussi intimement lié à celui de la *quantification des morphismes de Poisson* (voir [4] pour des détails).

Au lieu de fixer la variété de Poisson (X, P) et de chercher des sous-variétés coïsotropes par rapport à P, on peut fixer la sous-variété C de X et chercher *toutes* les structures de Poisson P telles que C est coïsotrope par rapport à P. Dans ce cas, on parle des structures de Poisson *adaptées à la sous-variété* C.

Dans le même esprit, on dit qu'un star-produit $\star$ est *adapté à une sous-variété* C *de* X lorsque tous les opérateurs bidifférentiels C_r son tels que $\mathsf{C}_r(f,g) \in \mathcal{I}$ quel que soit $g \in \mathcal{I}$. Il s'ensuit immédiatement que dans ce cas l'espace $\mathcal{I}[[h]]$ est un idéal à gauche de l'algèbre déformée, et par conséquent $\mathcal{B}[[h]] \cong \mathcal{A}[[h]]/\mathcal{I}[[h]]$ est un module à gauche pour $\mathcal{A}[[h]$, donc $\star$ est toujours représentable. Réciproquement, on peut montrer (voir [4, Prop.3.2]) que tout star-produit représentable est équivalent à un star-produit adapté.

Les deux dernières définitions se généralisent facilement dans un cadre utilisé pour la formalité :
- Dans l'espace $\mathfrak{g} := \Gamma^\infty(X, \Lambda TX)$ des champs de multivecteurs, on considère le sous-espace $\mathfrak{g}_\mathcal{I}$ des *champs de multivecteurs adaptés à la sous-variété* C : ξ de rang k appartient à $\mathfrak{g}_\mathcal{I}$ s'il envoie –vu comme opérateur k-differentiel– tout choix de k éléments de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{I}$.
- De la même façon, un opérateur k-differentiel dans $\mathfrak{G}$, (l'espace des opérateurs multi-différentiels sur X) est dit *adapté à* C lorsqu'il envoie tout choix $f_1, \ldots, f_{k-1}, g \in \mathcal{A}$ avec $g \in \mathcal{I}$ dans $\mathcal{I}$. On note $\mathfrak{G}_\mathcal{I}$ le sous-espace de tous les opérateurs multidifférentiels adaptés à C.

Désormais $X = \mathbb{R}^n$ et $C = \mathbb{R}^{n-l}$

Le premier résultat de ce travail est de montrer, dans le paragraphe 2, que $\mathfrak{g}_\mathcal{I}$ et $\mathfrak{G}_\mathcal{I}$ héritent de toutes les structures algébriques de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{G}$, notamment le crochet de Schouten, le crochet de Gerstenhaber, et la codifférentielle de Hochschild. De plus, nous démontrons un analogue du théorème de Hochschild, Kostant, Rosenberg : $\mathfrak{g}_\mathcal{I}$ est l'espace de cohomologie de $\mathfrak{G}_\mathcal{I}$, et nous construisons une application HKR $\psi^{[1]} : \mathfrak{g}_\mathcal{I} \to \mathfrak{G}_\mathcal{I}$ différente de l'application uselle à cause de l'asymétrie dans la définition de $\mathfrak{G}_\mathcal{I}$.

Ensuite, nous démontrons l'existence d'un L_∞-morphisme différentiel entre $\mathfrak{g}_\mathcal{I}$ et $\mathfrak{G}_\mathcal{I}$ en suivant le schéma de la preuve de Tamarkin ([46], [27]) qui a établi et utilisé les structures G_∞ pour traiter la conjecture de Deligne [18]. Nous avons ajouté un appendice A pour expliciter, dans un cadre non-opéradique, quelques détails et conventions de signe. Dans le paragraphe 3, nous démontrons que toutes les étapes de ce schéma peuvent être reproduites pour $\mathfrak{g}_\mathcal{I}$ et $\mathfrak{G}_\mathcal{I}$ et nous réduisons le travail au calcul de la cohomologie du cocomplexe d'obstructions dans le paragraphe 4. Nous démontrons que les obstructions s'annulent, et nous obtenons ainsi le résultat principal de cet article d'une *formalité* G_∞ *adaptée* –qui a été annoncé sans preuve détaillée pendant l'Euroconférence PQR en 2003 à Bruxelles :

Théorème 0.1 *Soit* $X = \mathbb{R}^n$ *et* $C = \mathbb{R}^{n-l}$ *vue comme sous-variété de la manière usuelle.*

1. $\mathfrak{g}_\mathcal{I} \cong H\mathfrak{G}_\mathcal{I}$.
2. *Pour* $l \geq 2$ *: il existe un* G_∞*-morphisme entre* $\mathfrak{g}_\mathcal{I}$ *et* $\mathfrak{G}_\mathcal{I}$.
3. *Pour* $l \geq 2$ *: il existe un* L_∞*-morphisme entre* $\mathfrak{g}_\mathcal{I}$ *et* $\mathfrak{G}_\mathcal{I}$.
4. *Soit* P *une structure de Poisson adaptée à* C. *Alors il existe un star-produit* $\star$ *adapté sur* X *tel que le commutateur d'ordre* 1 *en* h *est égal à* P.

Les idées principales de cet article se sont déjà trouvées dans notre prépublication [5] ; ici on a ajouté beaucoup de détails et notamment la preuve du théorème 4.2.

Nous conjecturons que l'on a la fomalité également pour le cas $l = 1$: une indication forte est le fait qu'il est toujours possible de représenter un star-produit, ce qui a été montré par Glößner (voir [29, Lemma 1], [4]) :

Théorème 0.2 (Glößner 1998) *Si* C *est une sous-variété coïsotrope de codimension* 1 *dans* X *et* $*$ *un star-produit sur* X. *Alors on peut construire une star-représentation.*

Ce résultat suit déjà d'un calcul des obstructions récurrentes pour construire une représentation ordre par ordre : ces obstructions se trouvent dans le groupe $HH^2\big(A, \mathbf{D}(B,B)\big)$, qui se calcule (voir le théorème 2.3, énoncé 2) comme

$$HH\big(A, \mathbf{D}(B,B)\big) \cong \Gamma^\infty\big(C, \Lambda(TX/TC)\big).$$

En codimension 1 le deuxième groupe de cohomologie de Hochschild s'annule.

Enfin, ce travail nous donne également un schéma pour décrire les obstructions à la formalité qui peuvent apparaître pour la *situation globale* d'une sous-variété C dans une variété X quelconque : dans ce cas-là, nous conjecturons que tous les énoncés du type HKR en paragraphe 2 ainsi que le premier théorème 4.1 pour réduire le cocomplexe des obstructions se globalisent facilement, tandis que le deuxième théorème 4.2 ne sera plus vrai et présentera des véritables obstructions globales. Dans ce cas-là, il faudrait modifier la codifférentielle d_L (co-induite par le crochet de Schouten sur les champs de multivecteurs adaptés) dans le théorème de formalité par une codifférentielle d'_L contenant des termes d'ordre supérieur ou égal à 3 (voir le théorème A.3) : on peut donc imaginer que ces opérateurs k-différentiels ($k \geq 3$) présentent des conditions additionnels à une structure de Poisson formelle adaptée à une sous-variété. Ceci semble possible, aux vues des obstructions nécessaires jusqu'à l'ordre 3 à la représentabilité d'un star-produit symplectique liées aux classes d'Atiyah-Molino du feuilletage de C (voir [4]). Un cadre de globalisation à la [16] ou [20] serait dans doute prometteur.

Signalons une autre approche proposée dans [15]. Le point de vue est de quantifier directement le crochet de Poisson sur la variété réduite $\underline{C}$, c'est-à-dire de contruire un star-produit sur $C^\infty(\underline{C}) = N(\mathcal{I})/\mathcal{I}$, où $N(\mathcal{I}) = \{f \in \mathcal{A}, \{f, \mathcal{I}\} \subset \mathcal{I}\}$. Pour cela, les auteurs montrent d'abord qu'un crochet de Poisson sur X pour lequel C est coïsotrope s'étend en une structure P_∞ plate sur $\widetilde{\mathfrak{g}} = \Gamma\big(C, \Lambda(T_C X/TC)\big)$. Une structure P_∞ veut dire qu'on se donne une famille $(P_i)_{i\geq 0}$: $A^{\otimes i} \to A$ de multi-dérivations faisant de A une algèbre L_∞ et "plate" veut dire que $P_0 = 0$. Dans le cas "plat", P_1 est une différentielle et P_2 induit une structure de Poisson sur la cohomologie $H^0(\Gamma, P_1) \cong C^\infty(\underline{C})$.

Ils construisent ensuite un morphisme de formalité pour $\widetilde{\mathfrak{g}}$, vu comme algèbre de fonctions sur une super-variété, en définissant des analogues pour les champs de tenseurs et opérateurs multi-différentiels. Ce morphisme est un "super" analogue de celui de Kontsevich. Une structure P_∞ est alors envoyée sur une structure A_∞ (c'est-à-dire la donnée d'une famillie $(a_i)_{i\geq 0}$ de lois vérifiant des relations d'associativité à homotopie près). Une telle structure permet d'obtenir une déformation associative de $C^\infty(\underline{C})[[h]]$ à deux conditions

- que $a_0 = 0$. Dans ce cas a_1 définit une différentielle et a_2 induit une structure associative sur $H^0(\Gamma(C, N^*C), a_1)$.
- que dans ce cas $H^0(\Gamma(C, N^*C), a_1) \cong C^\infty(\underline{C})[[h]]$.

Les obstructions pour ces deux conditions sont respectivement dans les groupes $H^2_\pi(N^*C)$ et $H^1_\pi(N^*C)$ qui sont généralement non nulles même dans le cas plat linéaire. Dans ce dernier cas, les auteurs retrouvent cependant "à la main" une bonne déformation ([14]) (dans ce travail, ils proposaient une construction pour laquelle, moyennant certaines obstructions, il existe une déformation de X adaptée à la sous-variété coïsotrope C). La première condition (envoyer une strcture P_∞ avec $P_0 = 0$ sur une structure A_∞ avec $a_0 = 0$) est similaire à la condition que nous demandons à notre morphisme : envoyer $\mathfrak{g}_\mathcal{I}$ sur $\mathfrak{G}_\mathcal{I}$. Dans notre cas, cette condition est réalisée dans le cas plat.

Notations : Pour deux variétés différentiables X et X', $\mathcal{C}^\infty(X, X')$ désigne l'ensemble de toutes les applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de X dans X'. Pour un fibré vectoriel E sur une variété différentiable X, on écrira $\Gamma(X, E)$ pour l'espace de toutes les sections de classe $\mathcal{C}^\infty$ du fibré E. On écrira les symboles $\wedge$ et Λ pour le produit extérieur point-par-point dans un cadre de géométrie différentielle, tandis qu'on va utiliser $\boldsymbol{\wedge}$ and $\boldsymbol{\Lambda}$ dans un cadre algèbrique, i.e. le produit extérieur (gradué) des modules gradués.

Remerciements : Nous remercions EUCOR pour des aides financières qui ont rendu possible ce travail entre Freiburg, Strasbourg et Mulhouse, et Alberto Cattaneo et Giovanni Felder pour de nombreuses discussions et la concurrence sympathique.

1 Opérateurs multidifférentiels liés à une sous-variété

Soit X une variété différentiable de dimension n et $i : C \to X$ une sous-variété fermée de codimension $l \leq n$. Soit $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{K})$, $\mathcal{B} = \mathcal{C}^\infty(C,\mathbb{K})$ et

$$\mathcal{I} = \{f \in \mathcal{A} \mid f(c) = 0 \ \forall c \in C\} \tag{1.1}$$

l'idéal annulateur de C. En utilisant un voisinage tubulaire autour de C et une partition de l'unité on voit que la suite d'algèbres commutatives

$$\{0\} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{i^*} \mathcal{B} \longrightarrow \{0\} \tag{1.2}$$

est exacte. Soit $c \in C$ et

$$T_cC^{\mathrm{ann}} = \{\beta \in T_cX^* \mid \beta(v) = 0 \ \forall v \in T_cC\}.$$

Soit $P \in \Gamma(X, \Lambda^2 TX)$ une structure de Poisson. La sous-variété C est dite *coïsotrope par rapport à P* si

$$P_c(\beta, \gamma) = 0 \quad \text{quels que soient } c \in C; \beta, \gamma \in T_cC^{\mathrm{ann}}. \tag{1.3}$$

Une condition algébrique équivalente est

$$\mathcal{I} \text{ est une sous-algèbre de Poisson de } \mathcal{A}.$$

De manière générale, on définit

Définition 1.1 *Un champ de multivecteurs $P \in \Gamma(X, \Lambda^k TX)$ est dit* adapté à C*) si*

$$P_c(\beta_1, \ldots, \beta_k) = 0 \quad \text{quels que soient } c \in C; \beta_1, \ldots, \beta_k \in T_cC^{\mathrm{ann}}. \tag{1.4}$$

Lorsque $P \in \mathcal{A} = \Gamma(X, \Lambda^0 TX)$, cette condition équivaut à $P \in \mathcal{I}$.

Soit k un entier strictement positif et soient $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_k, \mathcal{M}$ des $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$-bimodules. Définissons

$$\mathbf{D}^k(\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_k; \mathcal{M}) = \{\phi : \mathcal{M}_1 \otimes_{\mathbb{K}} \cdots \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_k \to \mathcal{M} \mid \phi \text{ est } k\text{-multidifférentielle}\}$$

L'expression 'k-multidifférentiel' correspond à la définition algébrique de Grothendieck. Dans la suite, on ne recontrera que des bimodules plus géométriques comme par exemple $\mathcal{C}^\infty(N,\mathbb{K})$ pour une variété N où l'on a l'équivalence avec la définition analytique des opérateurs multidifférentiels. On écrira $\mathbf{D}^k(\mathcal{M}_1; \mathcal{M})$ au lieu de l'expression ci-dessus lorsque tous les modules $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_k$ sont égaux à $\mathcal{M}_1$. Pour $k = 1$ on écrit parfois $\mathbf{D}$ au lieu de $\mathbf{D}^1$. Pour $k = 0$ on pose $\mathbf{D}^0(\ ; \mathcal{M}) = \mathcal{M}$, et on convient que $\mathbf{D}^k$ s'annule lorsque $k \leq -1$. $\mathbf{D}^1(\mathcal{M}_1; \mathcal{M})$ est muni d'une structure de $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$-bimodule avec $(f\phi g)(\eta) = f\phi(g\eta)$ pour $f, g \in \mathcal{A}$, $\eta \in \mathcal{M}_1$ et $\phi \in \mathbf{D}^1(\mathcal{M}_1; \mathcal{M})$. Soit $\mathfrak{G} = \oplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{G}^k$ l'espace des cochaînes de Gerstenhaber où

$$\mathfrak{G}^k = \mathbf{D}^k(\mathcal{A}; \mathcal{A}).$$

Remarque : La $\mathbb{Z}$-graduation de $\mathfrak{G} \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}^{\otimes}, \mathcal{A})$ par le nombre d'arguments est une graduation 'naïve' –mais quand même trés utile– qui ne correspond pas à la graduation induite par une graduation de $\mathcal{A}$, voir l'appendice A.1. A l'aide du *décalage* d'un espace vectoriel gradué $\mathfrak{h} := \oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathfrak{h}^k$ défini par $(\mathfrak{h}[j])^k := \mathfrak{h}^{j+k}$ pour $j \in \mathbb{Z}$, voir l'appendice A.1, on étudie le décalé $\mathcal{A}[1] = \mathcal{A}[1]^{-1}$ de l'espace 'non gradué' $\mathcal{A} = \mathcal{A}^0$: de cette manière, on voit que le décalé $\mathfrak{G}[1]$ de $\mathfrak{G}$ est un sous-espace gradué de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}[1]^{\otimes}, \mathcal{A}[1])$. Dans ce paragraphe et dans le suivant, on utilisera la graduation 'naïve' pour des raisons de simplicité.

Par analogie avec les champs de multivecteurs, définissons maintenant les *opérateurs multi-différentiels adaptés* dont le rôle sera très important pour la suite de notre étude :

Définition 1.2 *Le sous-espace* $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}} = \oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathfrak{G}^k_{\mathcal{I}}$ *de* $\mathfrak{G}$ *des cochaînes adaptées est défini comme suit :*

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{G}^k_{\mathcal{I}} &= \{\phi \in \mathfrak{G}^k | \phi(f_1, \ldots, f_{k-1}, g) \in \mathcal{I}, \\
&\qquad\qquad \forall f_1, \ldots, f_{k-1} \in \mathcal{A}, g \in \mathcal{I}\} \ (\textit{pour } k \geq 1), \\
\mathfrak{G}^0_{\mathcal{I}} &= \mathcal{I}, \\
\mathfrak{G}^k_{\mathcal{I}} &= \{0\} \ \textit{pour } k \leq -1.
\end{aligned}
$$

De plus, pour des raisons techniques, nous définissons $\widetilde{\mathfrak{G}} = \oplus_{k\in\mathbb{Z}}\widetilde{\mathfrak{G}}^k$ où

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathfrak{G}}^k &= \mathbf{D}^{k-1}\big(\mathcal{A}; \mathbf{D}^1(\mathcal{I}; \mathcal{B})\big) \ (\text{pour } k \geq 1), \\
\widetilde{\mathfrak{G}}^0 &= \mathcal{A}/\mathcal{I} = \mathcal{B}, \\
\widetilde{\mathfrak{G}}^k &= \{0\} \ \text{pour } k \leq -1.
\end{aligned}
$$

Remarquons que $\mathbf{D}^1(\mathcal{A}; \mathcal{B})$ est l'espace des opérateurs différentiels le long de l'application $i : C \to M$, voir [4] pour une définition analytique, et $\mathbf{D}^1(\mathcal{I}; \mathcal{B})$ est la restriction de $\mathbf{D}^1(\mathcal{A}; \mathcal{B})$ à $\mathcal{I}$. En outre, l'espace des opérateurs $\mathbf{D}^1(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ s'injecte dans $\mathbf{D}^1(\mathcal{A}; \mathcal{B})$ par l'application $\mathsf{D} \mapsto \big(f \mapsto \mathsf{D}(i^* f)\big)$. Un petit calcul en coordonnées de sous-variétés montre que la suite de $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$-bimodules

$$
\{0\} \leftarrow \mathbf{D}^1(\mathcal{I}; \mathcal{B}) \leftarrow \mathbf{D}^1(\mathcal{A}; \mathcal{B}) \leftarrow \mathbf{D}^1(\mathcal{B}, \mathcal{B}) \leftarrow \{0\}
$$

est exacte (voir aussi le lemme 2.5). En utilisant que $\mathbf{D}^{k-1}\big(\mathcal{A}; \mathbf{D}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B})\big)$ est égal à $\mathbf{D}^k(\mathcal{A}; \mathcal{B})$ (on travaille avec des morphismes de $\mathbb{K}$-modules filtrés) on définit $\mathbf{D}^{k-1}\big(\mathcal{A}; \mathbf{D}^1(\mathcal{I}; \mathcal{B})\big)$ par la restriction du k-ième argument à $\mathcal{I}$.

D'autre part, on peut définir des analogues des espaces $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ et $\widetilde{\mathfrak{G}}$ dans l'espace des champs de multivecteurs $\mathfrak{g} = \oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}^k$ où

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{g}^k &= \Gamma(X, \Lambda^k TX) \ (\text{pour } k \geq 0), \\
\mathfrak{g}^k &= \{0\} \ \text{pour } k \leq -1.
\end{aligned}
$$

L'analogue de $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ est *l'espace des champs de multivecteurs adaptés* $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}} = \oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}^k_{\mathcal{I}}$ qui est défini comme le sous-espace de $\mathfrak{g}$ suivant :

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{g}^k_{\mathcal{I}} &= \{P \in \Gamma(X, \Lambda^k TX) | P_c(\beta_1, \ldots, \beta_k) = 0, \\
&\qquad\qquad \forall c \in C; \beta_1, \ldots, \beta_k \in T_c C^{\mathrm{ann}}\} \ (\text{pour } k \geq 1), \\
\mathfrak{g}^0_{\mathcal{I}} &= \mathcal{I} \\
\mathfrak{g}^k_{\mathcal{I}} &= \{0\} \ \text{pour } k \leq -1.
\end{aligned}
$$

L'analogue de $\widetilde{\mathfrak{G}}$ est l'espace $\widetilde{\mathfrak{g}} = \oplus_{k\in\mathbb{Z}}\widetilde{\mathfrak{g}}^k$ où

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathfrak{g}}^k &= \Gamma\big(C, \Lambda^k(T_C X/TC)\big) \text{ (pour } k \geq 1),\\
\widetilde{\mathfrak{g}}^0 &= \mathcal{B} = \mathcal{A}/\mathcal{I}\\
\widetilde{\mathfrak{g}}^k &= \{0\} \text{ pour } k \leq -1.
\end{aligned}$$

2 Théorèmes de Hochschild-Kostant-Rosenberg

Dans cette section nous allons montrer un analogue du théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg dans le cas où $X = \mathbb{R}^n$ et $C = \mathbb{R}^{n-l}$. Dans les deux premières sous-sections nous rappellerons les propriétés algébriques de $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$, et $\widetilde{\mathfrak{G}}$, puis de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$ et $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Puis dans la troisième nous donnerons des homotopies explicites entres les résolutions bar et de Koszul qui nous permettrons de prouver notre résultat principal dans la quatrième sous-section.

2.1 Propriétés algébriques de $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ et $\widetilde{\mathfrak{G}}$

Rappelons quelques opérations définies sur l'espace des cochaînes de Gerstenhaber : pour $k, l \geq 1$ entiers, $\phi \in \mathfrak{G}^k$, $\psi \in \mathfrak{G}^l$ et $1 \leq i \leq k$ on pose

$$\begin{aligned}
&(\phi \circ_i \psi)\big(f_1, \ldots, f_{k+l-1}\big)\\
&\qquad\qquad = \phi\big(f_1, \ldots, f_{i-1}, \psi(f_i, \ldots, f_{l+i-1}), f_{l+i}, \ldots, f_{k+l-1}\big), \quad (2.1)
\end{aligned}$$

et l'on définit

$$\phi \circ_G \psi = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{(i-1)(l-1)} \phi \circ_i \psi, \tag{2.2}$$

(on pose $\phi \circ_G \psi = 0$ lorsque $\phi \in \mathfrak{G}^k$, $k \leq 0$), et le *crochet de Gerstenhaber* :

$$[\phi, \psi]_G = \phi \circ_G \psi - (-1)^{(k-1)(l-1)} \psi \circ_G \phi. \tag{2.3}$$

Gerstenhaber a montré [23] que $(\mathfrak{G}[1], [\ ,\ ]_G)$ est une algèbre de Lie graduée (où on a utilisé le *décalage* $(\mathfrak{h}[j])^k := \mathfrak{h}^{j+k}$ pour $j \in \mathbb{Z}$ et un $\mathbb{K}$-espace gradué $\mathfrak{h} := \oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathfrak{h}^k$). Soit μ la multiplication point par point dans $\mathcal{A}$. On définit alors l'opérateur cobord de Hochschild par :

$$\mathsf{b}\phi = -[\phi, \mu]_G \tag{2.4}$$

Enfin, on définit la multiplication *cup* $\cup$ par :

$$(\phi \cup \psi)\big(f_1, \ldots, f_{k+l}\big) = \mu\big(\phi(f_1, \ldots, f_k), \psi(f_{k+1}, \ldots, f_{k+l})\big) \tag{2.5}$$

et il est clair que $(\mathfrak{G}, \cup)$ est une algèbre associative graduée.

Proposition 2.1 *L'espace $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ a les propriétés suivantes :*

1. $\mu \in \mathfrak{G}^2_{\mathcal{I}}$.
2. *$\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ est un idéal à gauche de $(\mathfrak{G}, \cup)$.*
3. *$\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}[1]$ et une sous-algèbre de Lie graduée de $(\mathfrak{G}[1], [\ ,\ ]_G)$.*
4. *$(\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}, \mathsf{b})$ est un sous-complex de $(\mathfrak{G}, \mathsf{b})$.*

Démonstration:

1. C'est évident car $\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathcal{A}$.
2. Soit $\phi \in \mathfrak{G}^k$, $\psi \in \mathfrak{G}^l_{\mathcal{I}}$ et $f_{k+l} \in \mathcal{I}$. On a $\psi(f_{k+1}, \ldots, f_{k+l}) \in \mathcal{I}$ donc $(\phi \cup \psi)(f_1, \ldots, f_{k+l}) \in \mathcal{I}$ car $\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathcal{A}$.
3. Soient $\phi \in \mathfrak{G}^k_{\mathcal{I}}$ et $\psi \in \mathfrak{G}^l_{\mathcal{I}}$. Regardons $\phi \circ_i \psi$ (si $k \leq 0$ il n'y a rien à montrer) pour $1 \leq i \leq k$. Soit $f_{k+l-1} \in \mathcal{I}$. Si $1 \leq i \leq k-1$, alors f_{k+l-1} est le dernier argument de ϕ, donc le membre droit de (2.1) appartient à $\mathcal{I}$ par définition de ϕ, et $\phi \circ_i \psi \in \mathfrak{G}^{k+l-1}_{\mathcal{I}}$. Si $i = k$, alors f_{k+l-1} est le dernier argument de ψ et la valeur de ψ (qui appartient à $\mathcal{I}$ par définition de ψ) est le dernier argument de ϕ. Par définition de ϕ, il vient que sa valeur appartient à $\mathcal{I}$, donc $\phi \circ_k \psi \in \mathfrak{G}^{k+l-1}_{\mathcal{I}}$.
4. C'est une conséquence de 1., 3. et de la définition de b (2.4). □

L'espace $\widetilde{\mathfrak{G}}$ est muni de l'opérateur de Hochschild $\widetilde{\mathsf{b}}$ usuel : soient $\phi \in \widetilde{\mathfrak{G}}^k$, $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{A}$ et $g \in \mathcal{I}$, alors

$$\begin{aligned}(\widetilde{\mathsf{b}}\phi)(f_1, \ldots, f_k)(g) &= f_1\ \phi(f_2, \ldots, f_k)(g) \\ &\quad + \sum_{r=1}^{k-1}(-1)^r \phi(f_1, \ldots, f_r f_{r+1}, \ldots, f_k)(g) \\ &\quad + (-1)^k \phi(f_1, \ldots, f_{k-1})(f_k g). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Pour un entier k considérons les projections canoniques $\Xi^k : \mathfrak{G}^k \to \widetilde{\mathfrak{G}}^k$ suivantes où $f_1, \ldots, f_{k-1} \in \mathcal{A}$ et $g \in \mathcal{I}$:

$$\big(\Xi^k(\phi)\big)\big(f_1, \ldots, f_{k-1}\big)(g) = i^*\big(\phi(f_1, \ldots, f_{k-1}, g)\big)$$

pour $k \geq 1$, $\Xi^0 = i^*$ et $\Xi^k = 0$ quel que soit $k \leq -1$.

Proposition 2.2 *On a les propriétés suivantes :*

1. *Le diagramme suivant est une suite exacte de complexes :*

$$\{0\} \longrightarrow (\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}, \mathsf{b}) \longrightarrow (\mathfrak{G}, \mathsf{b}) \xrightarrow{\Xi} (\widetilde{\mathfrak{G}}, \widetilde{\mathsf{b}}) \longrightarrow \{0\}.$$

   En particulier, $\widetilde{\mathfrak{G}} \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$.
2. $\widetilde{\mathfrak{G}}$ *est un module à gauche gradué de* $(\mathfrak{G}, \cup)$.
3. $\widetilde{\mathfrak{G}}[1]$ *est un module de Lie gradué de* $(\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}[1], [\ ,\ ]_G)$.

Démonstration: 1. Il est clair que le noyau de Ξ est égal à $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ et que Ξ est surjective. Montrons que Ξ est un morphisme de complexes : soient $\phi \in \mathfrak{G}^k$, $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{A}$, $g \in \mathcal{I}$, on a

$$\begin{aligned}\big(\Xi^{k+1}(\mathsf{b}\phi)\big)\big(f_1, \ldots, f_k\big)(g) &= i^*\big((\mathsf{b}\phi)(f_1, \ldots, f_k, g)\big) = i^*\big(f_1\phi(f_2, \ldots, f_k, g)\big) + (-1)^{k+1} i^*\big(\phi(f_1, \ldots, f_k)g\big) \\ &\quad + \sum_{r=1}^{k-1}(-1)^r i^*\big(\phi(f_1, \ldots, f_r f_{r+1}, \ldots, f_k, g)\big) \\ &\quad + (-1)^k i^*\big(\phi(f_1, \ldots, f_{k-1}, f_k g)\big) \\ &= i^* f_1\ \big(\Xi^k\phi\big)(f_2, \ldots, f_k)(g) + 0 \text{ (car } i^*g = 0) \\ &\quad + \sum_{r=1}^{k-1}(-1)^r \big(\Xi^k\phi\big)(f_1, \ldots, f_r f_{r+1}, \ldots, f_k)(g) \\ &\quad + (-1)^k \big(\Xi^k\phi\big)(f_1, \ldots, f_{k-1})(f_k g) = (\widetilde{\mathsf{b}}\Xi^k\phi)(f_1, \ldots, f_k)(g). \end{aligned}$$

2. C'est une conséquence du fait que $\mathfrak{G}_\mathcal{I}$ est un idéal à gauche de $\mathfrak{G}$ (Proposition 2.1, 2.).
3. Puisque $\mathfrak{G}_\mathcal{I}[1]$ est une sous-algèbre de Lie graduée de $\mathfrak{G}[1]$ d'après la Proposition 2.1 3., il vient que $\mathfrak{G}[1]$ et $\mathfrak{G}_\mathcal{I}[1]$ sont des modules de Lie gradués de $\mathfrak{G}_\mathcal{I}[1]$, donc il en est le même pour leur quotient $\widetilde{\mathfrak{G}}[1]$. □

2.2 Propriétés algébriques de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_\mathcal{I}$ et $\widetilde{\mathfrak{g}}$

Étudions maintenant les espaces $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_\mathcal{I}$ et $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Rappelons la définition du crochet de Schouten $[-,-]_S$ sur $\mathfrak{G}$: soient $f, g \in \mathcal{A}$, $k, l \in \mathbb{N}$, $Y = Y_1\wedge\cdots\wedge Y_k \in \mathfrak{g}^k$ et $Z = Z_1\wedge\cdots\wedge Z_l \in \mathfrak{g}^l$ $(Y_1, \ldots, Y_k, Z_1, \ldots, Z_l \in \Gamma(X, TX))$, alors le crochet est défini par :

$$\begin{aligned}[fY, gZ]_S = \; & fg\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}(-1)^{i+j}[Y_i, Z_j] \wedge Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_{i-1} \wedge Y_{i+1} \wedge \cdots \wedge Y_k \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \wedge Z_1 \wedge \cdots \wedge Z_{j-1} \wedge Z_{j+1} \wedge \cdots \wedge Z_l \\ & + f\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}Y_i(g)Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_{i-1} \wedge Y_{i+1} \wedge \cdots \wedge Y_k \wedge Z \\ & + gY \wedge \sum_{j=1}^{l}(-1)^{j}Z_j(g)Z_1 \wedge \cdots \wedge Z_{j-1} \wedge Z_{j+1} \wedge \cdots \wedge Z_l. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Il est bien connu que ce crochet ne dépend pas de la décomposition de Y et de Z en produit de champs de vecteurs. En outre $(\mathfrak{g}[1], [-,-]_S)$ est une algèbre de Lie graduée ; de plus, $(\mathfrak{g}, \wedge)$ est une algèbre associative commutative graduée. Enfin, pour tous $Y \in \mathfrak{g}^k, Z \in \mathfrak{g}^l, U \in \mathfrak{g}^l$, on a la règle de Leibniz graduée :

$$[Y, Z \wedge U]_S = [Y, Z]_S \wedge U + (-1)^{(k-1)l} Z \wedge [Y, U]_S$$

et donc $(\mathfrak{g}, [-,-]_S, \wedge)$ est une algèbre de Gerstenhaber, voir également (A.11).

Le produit intérieur i peut s'étendre en une action (toujours notée i) de $(\mathfrak{g}, \wedge)$ sur l'espace $\Gamma(X, \Lambda T^*X)$: soit $Y = Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_k \in \mathfrak{g}^k$, $f \in \mathcal{A}$ et $\alpha \in \Gamma(X, \Lambda T^*X)$, alors

$$i(Y)\alpha = i(Y_1)\cdots i(Y_k)\alpha \text{ et } i(f)\alpha = f\alpha.$$

De même, la dérivée de Lie des champs de vecteurs s'étend en une action L de $(\mathfrak{g}[1], [-,-]_S)$ sur $\Gamma(X, \Lambda T^*X)$ définie par

$$L(Y)\alpha = [i(Y), \mathrm{d}]\alpha. \tag{2.8}$$

Par récurrence sur le degré de Z, on montre aisément que

$$[L(Y), i(Z)] = i([Y, Z]), \ \forall Y, Z \in \mathfrak{g} \tag{2.9}$$

Enfin, puisque $\mathrm{d}^2 = 0$ on a

$$[L(Y), \mathrm{d}] = 0 \text{ et } [L(Y), L(Z)] = L([Y, Z]), \ \forall Y, Z \in \mathfrak{g}$$

Considérons maintenant les applications $\Psi^0 = i^* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{I} = \mathcal{B}$ et pour $k \geq 1$, $\Psi^k : \mathfrak{g}^k \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{g}}^k$ définie par

$$Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_k \mapsto \big(c \mapsto (Y_1(c) \bmod T_cC) \wedge \cdots \wedge (Y_k(c) \bmod T_cC)\big). \tag{2.10}$$

Proposition 2.3 *La suite d'espaces vectoriels sur* $\mathbb{R}$

$$\{0\} \longrightarrow \mathfrak{g}^k_{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathfrak{g}^k \xrightarrow{\Psi^k} \widetilde{\mathfrak{g}}^k \longrightarrow \{0\} \tag{2.11}$$

est exacte. En particulier $\widetilde{\mathfrak{g}}^k \cong \mathfrak{g}^k/\mathfrak{g}^k_{\mathcal{I}}$.

Démonstration: Il est clair que Ψ^k est bien définie. Le cas $k = 0$ est une conséquence de la suite exacte (1.2).
Montrons la surjectivité de Ψ^k : soit $\widetilde{Y} \in \widetilde{\mathfrak{g}}^k$. Soit $E \subset T_C X$ un sous-fibré tel que $T_C X = TC \oplus E$, soit $C \subset V \subset E$ un voisinage ouvert de la section nulle de E, soit $C \subset U \subset X$ un voisinage ouvert de C dans X et soit $\Phi : V \to U$ un difféomorphisme tel que $\Phi|_C$ est l'application identique (le tout est dit un voisinage tubulaire de C). E est visiblement isomorphe à $T_C X/TC$. Pour $c \in C$ on rappelle le relèvement vertical de $Y \in E_c$ à $y \in E_c$: on a $Y^{\mathrm{rlvt}_y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y+tY)|_{t=0}$, donc $Y^{\mathrm{rlvt}_y} \in T_y E$. Ceci induit une injection $(\ )^{\mathrm{rlvt}_{\Phi(y)}} : \Lambda^k(T_c X/T_c C) \to \Lambda^k T_{\Phi(y)} U$, donc un relèvement vertical des sections $\widetilde{Y} \mapsto Y' = (\widetilde{Y})^{\mathrm{rlvt}} \in \Gamma(X, \Lambda^k TU)$ défini par ${Y'}_{\Phi(y)} = (\widetilde{Y}_c)^{\mathrm{rlvt}_y}$. Soit $(\psi_U, 1 - \psi_U)$ une partition de l'unité subordonnée au récouvrement ouvert $(U, X \setminus C)$ de X. Alors le champ de vecteurs Y défini par $Y = \psi_U Y'$ sur U et $Y = 0$ sur $X \setminus U$ est un élément de $\mathfrak{g}^k$ tel que $\Psi^k Y = \widetilde{Y}$.
Finalement, montrons que $\mathfrak{g}^k_{\mathcal{I}}$ est égal au noyau de Ψ^k : pour $c \in C$ soit $\Psi^k_c : \Lambda^k T_c X \to \Lambda^k(T_c X/T_c C)$. Puisque $T_c C^{\mathrm{ann}} \cong (T_c X/T_c C)^*$ alors

$$\Lambda^k(T_c C^{\mathrm{ann}}) \cong \big(\Lambda^k(T_c X/T_c C)\big)^*.$$

Soit $Y \in \mathfrak{g}^k$. Alors $Y \in \mathrm{Ker}\Psi^k$ si et seulement si $\Psi^k_c(Y_c) = 0$ quel que soit $c \in C$. Il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
\Psi^k_c(Y_c) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \xi_c\big(\Psi^k_c(Y_c)\big) = 0 && \forall \xi_c \in \Lambda^k(T_c X/T_c C)^* \\
&\Longleftrightarrow \quad \xi_c(Y_c) = 0 && \forall \xi_c \in \Lambda^k(T_c C)^{\mathrm{ann}} \\
&\Longleftrightarrow \quad Y_c(\xi_c) = 0 && \forall \xi_c \in \Lambda^k(T_c C)^{\mathrm{ann}},
\end{aligned}$$

et donc $\mathfrak{g}^k_{\mathcal{I}} = \mathrm{Ker}\Psi^k$. □

On obtient alors une autre caractérisation de $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$:

Proposition 2.4 *Soit k un entier strictement positif. Un élément $Y \in \mathfrak{g}^k$ appartient à $\mathfrak{g}^k_{\mathcal{I}}$ si et seulement si*

$$i(Y)(\mathrm{d}g_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}g_k) \in \mathcal{I} \text{ quels que soient } g_1, \cdots, g_k \in \mathcal{I}$$

Démonstration: Il est clair que $\mathrm{d}_c g \in T_c C^{\mathrm{ann}}$ quel que soit $c \in C$ et quel que soit $g \in \mathcal{I}$, donc la condition ci-dessus est nécessaire.
D'autre part, soit $\alpha \in T_c C^{\mathrm{ann}}$ et soit $\big(U, (x^1, \ldots, x^{n-l}, y^1, \ldots, y^l)\big)$ une carte de sous-variété de C autour de c (c'est-à-dire $U \cap C = \{u \in U \mid y^1(u) = 0, \ldots, y^l(u) = 0\}$). Alors on trouve $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha = \sum_{i=1}^l \alpha_i \mathrm{d}y^i$. Soit $(\psi_U, 1 - \psi_U)$ une partition de l'unité subordonnée au récouvrement ouvert $(U, X \setminus \{c\})$ de X. On définit $g = \psi_U \sum_{i=1}^l \alpha_i y^i$ sur U et $g = 0$ sur $X \setminus U$. Visiblement $g \in \mathcal{I}$ et $\mathrm{d}_c g = \alpha$. Alors tout élément de $T_c C^{\mathrm{ann}}$ se représente comme $\mathrm{d}_c g$ pour un $g \in \mathcal{I}$, d'où la suffisance de la condition. □

Proposition 2.5 *L'espace $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$ a les propriétés suivantes :*

1. *Toute structure de Poisson P sur X adaptée à C est dans $\mathfrak{g}^2_{\mathcal{I}}$.*
2. *$(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}, \wedge)$ est un idéal de $(\mathfrak{g}, \wedge)$.*
3. *$(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}[1], [-,-]_S)$ est une sous-algèbre de Lie graduée de $(\mathfrak{g}[1], [-,-]_S)$.*

Démonstration:

1. Ceci est une conséquence directe de la définition (1.3).
2. $\Psi_c = \sum_{k=0}^n \Psi_c^k : \Lambda T_c X \to \Lambda(T_cX/T_cC)$ est un homomorphisme d'algèbres de Grassmann, alors $\Psi : \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$ aussi, donc le noyau de Ψ, alors $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$, est un idéal par rapport à la multiplication extérieure $\wedge$.
3. Soient $Y \in \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^k$ et $Z \in \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^l$. Si $k = l = 0$ alors $[Y, Z]_S = 0 \in \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{-1}$. Si $k = 1$ et $l = 0$, alors $Z \in \mathcal{I}$ et $[Y, Z]_S = \langle \mathrm{d}Z, Y \rangle \in \mathcal{I} = \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^0$ d'après la proposition 2.4. On peut supposer que $k + l \geq 2$. Soient $g_1, \ldots, g_{k+l-1} \in \mathcal{I}$ et $\gamma = \mathrm{d}g_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}g_{k+l-1}$. Puisque $Y \wedge Z \in \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{k+l}$, alors $i(Y)i(Z)\gamma = 0$. De plus, $\mathrm{d}\gamma = 0$. Il s'ensuit, d'après l'équation (2.9), que $i([Y, Z])\gamma = [L(Y), i(Z)]\gamma = i(Y)\mathrm{d}i(Z)\gamma + (-1)^{kl} i(Z)\mathrm{d}i(Y)\gamma$. La $k-1$ forme $i(Z)\gamma$ est une somme finie d'expressions de la forme : $\pm(i(Z)\gamma')\gamma''$ où γ' est une l-forme constituée de l éléments parmi $\mathrm{d}g_1, \ldots, \mathrm{d}g_{k+l-1}$ et γ'' est le reste. D'après la proposition 2.4 la fonction $g' = \pm i(Z)\gamma'$ est dans $\mathcal{I}$, alors $i(Y)\mathrm{d}i(Z)\gamma = i(Y)(\mathrm{d}g' \wedge \gamma'')$ car $\mathrm{d}\gamma'' = 0$ et la k-forme $\mathrm{d}g' \wedge \gamma''$ est le produit extérieur de k différentielles d'éléments de l'idéal, donc $i(Y)(\mathrm{d}g' \wedge \gamma'') \in \mathcal{I}$. Le terme $(-1)^{kl} i(Z)\mathrm{d}i(Y)\gamma$ appartient également à $\mathcal{I}$ par un raisonnement entièrement analogue. Alors $[Y, Z]_S \in \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{k+l-1}$.
□

Proposition 2.6 *L'espace $\widetilde{\mathfrak{g}}$ a les propriétés suivantes :*

1. *$(\widetilde{\mathfrak{g}}, \wedge)$ est une algèbre commutative associative graduée.*
2. *$(\widetilde{\mathfrak{g}}, \wedge)$ est un module à gauche gradué de $(\mathfrak{g}, \wedge)$.*
3. *$\widetilde{\mathfrak{g}}[1]$ est un module d'algèbre de Lie graduée pour $(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}[1], [-, -]_S)$. De plus, on a*

$$Y.(\alpha \wedge \beta) = (Y.\alpha) \wedge \beta + (-1)^{(k-1)l} \alpha \wedge (Y.\beta)$$

quels que soient $Y \in \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^k, \alpha \in \widetilde{\mathfrak{g}}^l, \beta \in \widetilde{\mathfrak{g}}$.

Démonstration:

1. Ceci est évident.
2. Puisque $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$ est un idéal de $(\mathfrak{g}, \wedge)$ et $\widetilde{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$, l'énoncé est évident.
3. $\mathfrak{g}[1]$ et $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}[1]$ sont évidemment des modules de $(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}, [\ ,\ ]_S)$, et il en est de même pour le quotient $\widetilde{\mathfrak{g}}[1]$. □

Proposition 2.7 *Si C a un voisinage tubulaire global dans X il existe une injection $\widetilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ avec*

1. *$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathcal{I}} \oplus \widetilde{\mathfrak{g}}$ (somme directe d'espaces vectoriels).*
2. *$(\widetilde{\mathfrak{g}}, \wedge)$ est une sous-algèbre graduée de $(\mathfrak{g}, \wedge)$.*
3. *$\widetilde{\mathfrak{g}}[1]$ muni du crochet de Schouten est une sous-algèbre de Lie graduée abélienne de $(\mathfrak{g}[1], [\ ,\ ]_S)$.*

Démonstration: X est difféomorphe à l'espace total d'un fibré vectoriel $\tau : E \to C$ et $\widetilde{\mathfrak{g}} \cong \Gamma^\infty(C, \Lambda E)$. En utilisant le relèvement vertical $E_c \to T_\epsilon E$ pour $\epsilon \in E$ et $\tau(\epsilon) = c$ donné par $f \mapsto \frac{\partial(f+t\epsilon)}{\partial t}|_{t=0}$ on obtient l'injection avec toutes les propriétés énoncées. □

Remarque 2.1 *Soit $P \in \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^2$ une structure de Poisson adaptée à C. Alors à l'aide de l'action de P l'espace $\widetilde{\mathfrak{g}}$ devient une algèbre associative commutative différentielle graduée. La cohomologie de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ est dite la* cohomologie BRST de C par rapport à P. *Cette cohomologie est munie d'une structure d'algèbre de Poisson.*

2.3 Simplification du complexe bar

Dans ce paragraphe $X = \mathbb{R}^n$.

Commençons par rappeler la résolution 'topologique' bar de l'algèbre $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$: Soit $\mathcal{A}^e = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{K})$ et pour tout entier positif k

$$CH^k = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{(k+2)n},\mathbb{K}).$$

Nous noterons $(a, x_1, \ldots, x_k, b)$ (où $a, x_1, \ldots, x_k, b \in \mathbb{R}^n$) pour un point de $\mathbb{R}^{(k+2)n}$. L'espace CH^k est un $\mathcal{A}^e$-module :

$$\mathcal{A}^e \times CH^k \to CH^k : (f, \Phi) \mapsto \big((a, x_1, \ldots, x_k, b) \mapsto f(a, b)\Phi(a, x_1, \ldots, x_k, b)\big)$$

Pour $k \geq 1$, rappelons que l'opérateur bord de Hochschild $\partial_H^k : CH^k \to CH^{k-1}$ est défini par

$$\begin{aligned}(\partial_H^k \Phi)(a, x_1, \ldots, x_{k-1}, b) \quad = \quad & \Phi(a, a, x_1, \ldots, x_{k-1}, b) \\ & + \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^r \Phi(a, x_1, \ldots, x_r, x_r, \ldots, x_{k-1}, b) \\ & (-1)^k \Phi(a, x_1, \ldots, x_{k-1}, b, b) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Il est clair que ∂_H^k est un morphisme de $\mathcal{A}^e$-modules et $\partial_H^k \partial_H^{k+1} = 0$. L'augmentation $\epsilon : CH^0 = \mathcal{A}^e \to \mathcal{A}$ est définie par le morphisme de $\mathcal{A}^e$-modules suivant

$$(\epsilon\Phi)(a) = \Phi(a, a) \quad \forall a \in \mathbb{R}^n. \tag{2.13}$$

Il est bien connu que le complexe bar

$$\{0\} \longleftarrow \mathcal{A} \xleftarrow{\epsilon} CH^0 \xleftarrow{\partial_H^1} CH^1 \xleftarrow{\partial_H^2} CH^2 \xleftarrow{\partial_H^3} \cdots \xleftarrow{\partial_H^k} CH^k \xleftarrow{\partial_H^{k+1}} \cdots \tag{2.14}$$

est acyclique : en fait, soit $h_H^{-1} : \mathcal{A} \to CH^0$ le prolongement $\mathbb{K}$-linéaire

$$(h_H^{-1} f)(a, b) := f(a)$$

et, pour $k \geq 0$, $h_H^k : CH^k \to CH^{k+1}$ l'application $\mathbb{K}$-linéaire

$$(h_H^k \Phi)(a, x_1, \ldots, x_{k+1}, b) = (-1)^{k+1} \Phi(a, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}).$$

En écrivant id_H^{-1} pour l'application identique $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ et id_H^k pour l'application identique $CH^k \to CH^k$ on montre que

$$\begin{aligned} \epsilon h_H^{-1} &= \mathrm{id}_H^{-1} \\ h_H^{-1}\epsilon + \partial_H^1 h_H^0 &= \mathrm{id}_H^0 \\ h_H^{k-1}\partial_H^k + \partial_H^{k+1} h_H^k &= \mathrm{id}_H^k \quad \forall k \geq 1 \end{aligned}$$

ce qui entraîne l'acyclicité du complexe bar (2.14).

Nous allons maintenant définir un autre complexe (de Koszul) acyclique pour $\mathcal{A}$ en tant que $\mathcal{A}^e$-module : soit $E = \mathbb{K}^n$

$$CK^k = \mathcal{A}^e \otimes_{\mathbb{K}} \Lambda^k E^* \quad \text{quel que soit } k \in \mathbb{Z}.$$

Évidemment, chaque CK^k est un $\mathcal{A}^e$-module libre. Soit $\xi : \mathbb{R}^{2n} \to E$ défini par

$$\xi(a,b) = a - b$$

Pour tout entier k strictement positif, on définit l'opérateur bord de Koszul $\partial_K^k : CK^k \to CK^{k-1}$ par

$$\partial_K^k \omega = i(\xi)\omega \quad \text{quel que soit } \omega \in CK^k.$$

Autrement dit, pour $e_1, \ldots, e_k \in E$ et $a, b \in \mathbb{R}^n$ on a

$$(\partial_K^k \omega)(a,b)\big(e_2, \ldots, e_k\big) = \omega(a,b)\big(a - b, e_2, \ldots, e_k\big).$$

Il est clair que les ∂_K^k sont des morphismes de $\mathcal{A}^e$-modules et que $\partial_K^k \partial_K^{k+1} = 0$ quel que soit l'entier strictement positif k. Soit $\epsilon : CK^0 = \mathcal{A}^e \to \mathcal{A}$ l'augmentation définie comme dans (2.13). Il en résulte le complexe de Koszul :

$$\{0\} \longleftarrow \mathcal{A} \xleftarrow{\epsilon} CK^0 \xleftarrow{\partial_K^1} CK^1 \xleftarrow{\partial_K^2} CK^2 \xleftarrow{\partial_K^3} \cdots \xleftarrow{\partial_K^k} CK^k \xleftarrow{\partial_K^{k+1}} \cdots \tag{2.15}$$

Ce complexe est acyclique : en effet, soit $h_K^{-1} = h_H^{-1} : \mathcal{A} \to CK^0 = \mathcal{A}^e = CH^0$ le prolongement $\mathbb{K}$-linéaire

$$(h_K^{-1} f)(a,b) = f(a).$$

Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de E et $e^1, \ldots, e^n$ la base duale de E^*. Pour $k \geq 0$ soit $h_K^k : CK^k \to CK^{k+1}$ l'application $\mathbb{K}$-linéaire

$$(h_K^k \omega)(a,b) = -\sum_{j=1}^n e^j \wedge \int_0^1 dt\ t^k \frac{\partial \omega}{\partial b^j}(a, tb + (1-t)a).$$

En écrivant id_K^{-1} pour l'application identique $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ et id_K^k pour l'application identique $CK^k \to CK^k$ on montre que

$$\begin{aligned} \epsilon h_K^{-1} &= \mathrm{id}_K^{-1} \\ h_K^{-1}\epsilon + \partial_K^1 h_K^0 &= \mathrm{id}_K^0 \\ h_K^{k-1}\partial_K^k + \partial_K^{k+1} h_K^k &= \mathrm{id}_K^k \quad \forall k \geq 1 \end{aligned} \tag{2.16}$$

ce qui entraîne l'acyclicité du complexe de Koszul (2.15).

Définissons enfin les applications $F^k : CK^k \to CH^k$ (voir e.g. [17, p. 211]) par $F^0 = \mathrm{id}_H^0 = \mathrm{id}_K^0$ et pour tout $\omega \in CK^k$:

$$(F^k \omega)(a, x_1, \ldots, x_k, b) = \omega(a,b)\big(x_1 - a, \ldots, x_k - a\big)$$

quels que soient $k \in \mathbb{Z}$ avec $k \geq 1$ et $a, x_1, \ldots, x_k, b \in \mathbb{R}^n$. Il est clair que les F^k sont des morphismes de $\mathcal{A}^e$-modules, et on montre qu'ils sont des morphismes de complexes, c'est-à-dire, quel que soit $k \in \mathbb{Z}$,

$$F^k \partial_K^{k+1} = \partial_H^{k+1} F^{k+1}.$$

Il existe également des applications $G^k : CH^k \to CK^k$ qui sont des morphismes de $\mathcal{A}^e$-modules et des morphismes de complexes : on définit $G^0 = \mathrm{id}_H^0 = \mathrm{id}_K^0$ et pour tout $\Phi \in CH^k$:

$$\begin{aligned} (G^k \Phi)(a,b) \quad = \quad & \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^n e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \cdots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \\ & \frac{\partial^k \Phi}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_k^{i_k}}\big(a, t_1 a + (1-t_1)b, \ldots, t_k a + (1-t_k)b, b\big) \end{aligned} \tag{2.17}$$

pour tout entier $k \geq 1$. Il est évident que chaque G^k est un homomorphisme de $\mathcal{A}^e$-modules, et à l'aide d'un calcul long mais direct on montre que quel que soit $k \in \mathbb{Z}$,

$$G^k \partial_H^{k+1} = \partial_K^{k+1} G^{k+1}.$$

On peut représenter les deux applications $(F^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(G^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \overset{\partial_H^k}{\longleftarrow} & CH^k & \overset{\partial_H^{k+1}}{\longleftarrow} & CH^{k+1} & \overset{\partial_H^{k+2}}{\longleftarrow} & \cdots \\
\cdots & & F^k \uparrow \downarrow G^k & & F^{k+1} \uparrow \downarrow G^{k+1} & & \cdots \\
\cdots & \overset{\partial_K^k}{\longleftarrow} & CK^k & \overset{\partial_K^{k+1}}{\longleftarrow} & CK^{k+1} & \overset{\partial_K^{k+2}}{\longleftarrow} & \cdots
\end{array}$$

Lemme 2.1 *Avec les notations ci-dessus on a :*

1. $G^k F^k = \mathrm{id}_K^k$ *quel que soit l'entier positif* k.
2. *L'opérateur* $\Theta^k = F^k G^k : CH^k \to CH^k$ *est une projection, c'est-à-dire* $\Theta^k \Theta^k = \Theta^k$ *quel que soit l'entier positif* k.

Démonstration: Les deux énoncés sont montrés à l'aide d'un calcul direct. □

Nous allons maintenant montrer l'existence d'homotopies $s_H^k : CH^k \to CH^{k+1}$: ce sont des homomorphismes de $\mathcal{A}^e$-modules tels que

$$\mathrm{id}_H^k - \Theta^k = \partial_H^{k+1} s_H^k + s_H^{k-1} \partial_H^k \tag{2.18}$$

où $s_H^{-1} = 0$ et $s_H^0 = 0$. Ceci se représente de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \overset{\partial_H^{k-1}}{\longleftarrow} & & CH^{k-1} & \overset{\partial_H^k}{\longleftarrow} & CH^k & \overset{\partial_H^{k+1}}{\longleftarrow} & CH^{k+1} & \overset{\partial_H^{k+2}}{\longleftarrow} & & \cdots \\
\cdots & \searrow & & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & & \cdots \\
\cdots & s_H^{k-2} & & \mathrm{id}_H^{k-1}-\Theta^{k-1} & s_H^{k-1} & \mathrm{id}_H^k-\Theta^k & s_H^k & \mathrm{id}_H^{k+1}-\Theta^{k+1} & s_H^{k+1} & & \cdots \\
\cdots & & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & & \searrow & \cdots \\
\cdots & \overset{\partial_H^{k-1}}{\longleftarrow} & & CH^{k-1} & \overset{\partial_H^k}{\longleftarrow} & CH^k & \overset{\partial_H^{k+1}}{\longleftarrow} & CH^{k+1} & \overset{\partial_H^{k+2}}{\longleftarrow} & & \cdots
\end{array}$$

Puisque $\mathrm{id}_H^0 - \Theta^0 = 0$ et $(\mathrm{id}_H^k - \Theta^k)\partial_H^{k+1} = \partial_H^{k+1}(\mathrm{id}_H^{k+1} - \Theta^{k+1})$ on a $\partial_H^1(\mathrm{id}_H^1 - \Theta^1) = 0$. On construit s_H^1 "sur les générateurs" de la manière suivante : soit $F \in CH^1$. On considère $\widetilde{F}$ dans $\widetilde{C}H^1 = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{5n},\mathbb{K})$ comme $\widetilde{F}(a', a, x, b, b') = F(a', x, b')$. On prolonge h_H^1 et $\mathrm{id}_H^1 - \Theta^1$ de CH^1 à tout élément T de $\widetilde{C}H^1$ par $(h_H^1 T)(a', a, x_1, x_2, b, b') = T(a', a, x_1, x_2, b')$ ("les variables a', b' ne sont pas affectées") et on fait de même avec $\mathrm{id}_H^1 - \Theta^1$. Ensuite on définit

$$\begin{aligned}
(s_H^1 \Phi)(a, x_1, x_2, b) &= (h_H^1 (id_H^1 - \Theta^1)\widetilde{\Phi})(a', a, x_1, x_2, b, b')|_{a'=a, b'=b} \\
&= \Phi(a, x_1, b) - \sum_{i=1}^n (x_1^i - a^i) \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1^i}(a, ta + (1-t)x_2, b) dt
\end{aligned}$$

Par construction, s_H^1 est un homomorphisme de $\mathcal{A}^e$-modules. À l'aide de (2.16) on voit que

$$\mathrm{id}_H^1 - \Theta^1 = \partial_H^2 s_H^1.$$

On continue par récurrence : soient $0 = s_H^0, s_H^1, \ldots, s_H^k$ déjà construits tels que (2.18) soit satisfaite jusqu'à l'ordre k. Alors on a

$$\partial_H^{k+1}\big(\mathrm{id}_H^{k+1} - \Theta^{k+1} - s_H^k \partial_H^{k+1}\big) = 0,$$

et l'expression suivante (pour $\Phi \in CH^{k+1}$)

$$(s_H^{k+1}\Phi)(a, x_1, \ldots, x_{k+2}, b) =$$
$$(h_H^{k+1}(id_H^{k+1} - \Theta^{k+1} - s_H^k \partial_H^{k+1})\widetilde{\Phi})\big(a', a, x_1, \ldots, x_{k+2}, b, b'\big))|_{a'=a, b'=b}.$$

est bien définie. On a alors montré le

Lemme 2.2 *On peut construire des homotopies $s_H^k : CH^k \to CH^{k+1}$ quel que soit l'entier positif k telles que*

1. *Toute s_H^k est un homomorphisme de $\mathcal{A}^e$-modules.*
2. *Toute s_H^k est construite par une 'suite d'opérations qui consistent en des intégrales, des dérivées et des évaluations'.*
3. *$s_H^0 = 0$.*
4. $\mathrm{id}_H^k - \Theta^k = \partial_H^{k+1} s_H^k + s_H^{k-1}\partial_H^k$ *quel que soit $k \in \mathbb{N}$.*

2.4 Calcul de la cohomologie

On considère toujours le cas $X = \mathbb{R}^n$. Soient $x = (x^1, \ldots, x^n)$ les coordonnées canoniques de X et on va écrire x' pour $(x^1, \ldots, x^{n-l})$ et x'' pour $x''^1 = x^{n-l+1}, \ldots, x''^l = x^n$. On note $x = (x', x'')$. Il vient que

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x'' = 0\}.$$

On écrira parfois $E := \mathbb{R}^n$, $E' := \mathbb{R}^{n-l}$ et $E'' := \mathbb{R}^l$.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-bimodule où $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$. On cherche à calculer la cohomologie de Hochschild à valeurs dans $\mathcal{M}$. Afin d'utiliser le complexe de Koszul du paragraphe précédent il faut faire quelques hypothéses de régularité concernant le bimodule ainsi que quelques restrictions pour les cochaînes. On suppose que $\mathcal{M}$ est muni de manière canonique de la structure d'un $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{K})$-module à gauche tel que $(f \otimes g) \cdot \xi = f \cdot \xi \cdot g$ pour tous $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ et $\xi \in \mathcal{M}$. Dans tous nos exemples ceci est visiblement le cas, et en général le procédé marchera pour un bimodule topologique (par rapport à la topologie de Fréchet habituelle de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$) par continuité.

Pour les cochaînes, on se restreint aux cochaînes multidifférentielles définies comme suit : une application k-linéaire $\phi : \mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{M}$ est dite k-différentielle (par rapport à la multiplication de module à gauche) lorsqu'elle s'exprime comme

$$\phi(f_1, \ldots, f_k) = \sum_{I_1, \ldots, I_k} \left(\frac{\partial^{|I_1|} f_1}{\partial x^{I_1}} \cdots \frac{\partial^{|I_k|} f_k}{\partial x^{I_k}} \right) \cdot \xi^{I_1 \cdots I_k} \tag{2.19}$$

en considérant une somme finie sur des multi-indices $I = (i_1, \ldots, i_n)$ et des éléments du modules $\xi^{I_1 \cdots I_k} \in \mathcal{M}$. De plus, on demande pendant toute cette discussion que la multiplication de module à droite $f \mapsto \xi \cdot f$ (pour $\xi \in \mathcal{M}$ fixé) soit un opérateur différentiel dans le sens de (2.19).

Remarque 2.2 *Pour les bimodules $\mathcal{M} = \mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ainsi que $\mathcal{M} = \mathbf{D}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$, $\mathbf{D}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ and $\mathbf{D}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ la définition ci-dessus donne la définition usuelle des cochaînes multidifférentielles et la condition concernant la multiplication à droite est évidemment satisfaite.*

Dans cette situation, on considère les morphismes de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{K})$-modules $A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{K})}(CH^k, \mathcal{M})$ tels que l'application induite $a(f_1, \ldots, f_k) = A(1 \otimes f_1 \otimes \cdots f_k \otimes 1)$ est une cochaîne multidifférentielle dans le sens mentionné ci-dessus. On note $\mathrm{Hom}^{\mathrm{diff}}_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{K})}(CH^\bullet, \mathcal{M})$ le $\mathbb{K}$-espace engendré par ces cochaînes. Evidemment, la différentielle du complexe bar préserve cet espace des cochaînes multi-différentielles, et l'on obtient un isomorphisme de complexes entre l'espace des cochaînes différentielles de Hochschild noté $H\mathbf{D}^\bullet(\mathcal{A},\mathcal{M})$ et l'espace des cochaînes $\mathrm{Hom}^{\mathrm{diff}}_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{K})}(CH^\bullet,\mathcal{M})$.

On considère également l'espace des morphismes de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{K})$-modules, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{K})}(CK^\bullet,\mathcal{M})$, muni de la différentielle ∂_K du complexe de Koszul. Alors les applications F, G et les homotopies chaînes s induisent des applications (encore notées par F, G et s) entre les cochaînes correpondantes. L'énoncé important suivant est moins évident :

Lemme 2.3 *L'application induite*

$$G : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{K})}(CK^\bullet,\mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{\mathrm{diff}}_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{K})}(CH^\bullet,\mathcal{M}) \tag{2.20}$$

prend ses valeurs dans l'espace des cochaînes différentielles. De plus, l'application induite s préserve les cochaînes différentielles

$$s : \mathrm{Hom}^{\mathrm{diff}}_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{K})}(CH^\bullet,\mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{\mathrm{diff}}_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{K})}(CH^{\bullet-1},\mathcal{M}). \tag{2.21}$$

Démonstration: Pour G, c'est très facile à montrer en utilisant la forme explicite (2.17) car on n'a qu'à l'évaluer à la fin en $a = x_1 = \cdots x_k = b$. Pour s, c'est légèrement plus compliqué puisqu'à première vue s est 'non-locale'. Cependant, par récurrence on montre qu'après l'évaluation $a = x_1 = \cdots = x_k = b$ seuls les termes 'locaux' survivent et ceux-ci sont donnés par des dérivées. □

De ce lemme, on déduit immédiatement l'énoncé général suivant :

Théorème 2.1 *Avec les hypothèses sur le bimodule $\mathcal{M}$ faites ci-dessus, les groupes de cohomologie de Hochschild différentiels de $\mathcal{A}$ à valeurs dans $\mathcal{M}$ sont isomorphes aux groupes de cohomologie du complexe*

$$H\mathbf{D}^\bullet(\mathcal{A},\mathcal{M}) \cong H\left(\mathrm{Hom}^{\mathrm{diff}}_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{K})}(CK^\bullet,\mathcal{M}),\partial_K\right) \tag{2.22}$$

via les applications induites F et G, qui sont des réciproques.

Remarque 2.3 *On remarque que le raisonnement usuel pour montrer cet énoncé, à sa voir l'indépendence des Ext-groupes vis-à-vis du choix de la résolution projective, ne s'applique pas puisqu'on utilise une classe restreinte de cochaînes et puisque le complexe bar n'est pas du tout formé de modules projectifs sur l'anneau $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{K})$.*

Remarque 2.4 *Le même énoncé reste toujours vrai quand on remplace la cohomologie de Hochschild différentielle par la cohomologie de Hochschild continue (où l'on utilise des cochaînes continues par rapport à la topologie de Fréchet de $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ et un bimodule topologique $\mathcal{M}$). Dans ce cas là, la démonstration du lemme 2.3 est beaucoup plus facile comme G et s sont des applications continues déjà sur le plan des chaînes.*

Par conséquent, il faut calculer la cohomologie du complexe de Koszul $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{K})}(CK^\bullet,\mathcal{M})$ pour la différentielle induite ∂_K. Cette dernière est très facile à simplifier car la différentielle se calcule de façon explicite :

Lemme 2.4 *On a l'isomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{K})$-modules*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{K})}(CK^\bullet,\mathcal{M}) \cong \mathcal{M}\otimes_{\mathbb{K}}\Lambda^\bullet(\mathbb{R}^n), \tag{2.23}$$

et la différentielle est donnée par

$$\partial_K X = e_i \wedge (x^i\cdot X - X\cdot x^i), \tag{2.24}$$

où $x^1,\ldots,x^n \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sont des coordonnées usuelles par rapport à la base $e_1,\ldots,e_n$ de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration: L'énoncé (2.23) est évident car $CK^\bullet$ est un $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{K})$-module libre. En dualisant le produit intérieur $i(\xi)$ avec le champ de vecteurs $\xi(a,b) = a - b$ on obtient la multiplication extérieure $\wedge$ avec ξ dans le sens de la multiplication de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{K})$-modules. C'est exactement la différentielle (2.24). □

En particulier, si le bimodule $\mathcal{M}$ est *symétrique*, i.e. les multiplications à gauche et à droite de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{M}$ coïncident, il vient que la différentielle ci-dessus s'annule de sorte que la cohomologie de Hochschild est donnée par

$$H\mathbf{D}(\mathcal{A},\mathcal{M}) \cong \mathcal{M} \otimes_{\mathbb{K}} \Lambda^\bullet(\mathbb{R}^n), \tag{2.25}$$

où les isomorphismes sont donnés par F et G. Ceci implique déjà les résultats suivants :

Théorème 2.2 *Avec les notations mentionnées ci-dessus :*

1. $H\mathbf{D}^k(\mathcal{A},\mathcal{A}) = H\mathfrak{G}^k \cong \Gamma^\infty(X,\Lambda^k TX) = \mathfrak{g}^k$ *(Hochschild-Kostant-Rosenberg).*
2. $H\mathbf{D}^k(\mathcal{A},\mathcal{B}) \cong \mathcal{B} \otimes_{\mathbb{K}} \Lambda^k\mathbb{R}^n = \Gamma^\infty(C,\Lambda^k TX|_C)$.

On aura besoin du résultat technique suivant bien connu concernant *l'homologie de Hochschild continue* de $\mathcal{A}$, voir également [43, p.51] et [41] : on regarde le complexe qui est la somme directe des tous les espaces $C_k(\mathcal{A},\mathcal{A}) := \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{(k+1)n},\mathbb{K})$ dont les éléments sont des chaînes de Hochschild 'topologiques', i.e. des fonctions lisses $\phi : (a,x_1,\ldots,x_k) \mapsto \phi(a,x_1,\ldots,x_k)$ à $k+1$ arguments dans $\mathbb{R}^n$. Soit $p_k : CH^k \to C_k(\mathcal{A},\mathcal{A})$ la surjection linéaire continue donnée par $(p_k\Phi)(a,x_1,\ldots,x_k) = \Phi(a,x_1,\ldots,x_k,a)$. L'opérateur bord de Hochschild b' de degré -1 dans $C_k(\mathcal{A},\mathcal{A})$ est défini comme dans l'équation (2.12) 'en enlevant le dernier argument et mettant $b = a$' de sorte que l'on obtienne une version topologique de la différentielle [35, 1.1.1, p.9]. Il s'ensuit que les applications p_k définissent des morphismes de complexes. Soit $\Omega_\bullet = \mathcal{A} \otimes \Lambda^\bullet\mathbb{R}^{n*}$ vu comme complexe avec la différentielle 0. L'application $\tilde{p}_k : CK^k \to \Omega_k$ définie par $(\tilde{p}_k\omega)(a) := \omega(a,a)$ est également un morphisme des complexes. On trouve des uniques applications $F'_k : \Omega_k \to C_k(\mathcal{A},\mathcal{A})$ et $G'_k : C_k(\mathcal{A},\mathcal{A}) \to \Omega_k$ induites par les applications F_k et G_k entre les complexes bar et de Koszul (i.e. $F'_k \circ \tilde{p}_k = p_k \circ F_k$ et $G'_k \circ p_k = \tilde{p}_k \circ G_k$) ainsi que des homotopies induites s'^{k}_{H}. Il vient que les complexes $\big((C(\mathcal{A},\mathcal{A}),\mathsf{b}'\big)$ et $\big(\Omega,0\big)$ sont quasi-isomorphes, donc on a

Proposition 2.8 *L'homologie de Hochschild continue de $\mathcal{A}$ est donnée par*

$$HH_{k\ \mathrm{cont}}(\mathcal{A},\mathcal{A}) \cong \mathcal{A} \otimes \Lambda\mathbb{R}^{n*} \quad (Hochschild - Kostant - Rosenberg).$$

Pour les autres bimodules dont on a besoin dans cet article, on rappelle le fait suivant :

Lemme 2.5 *La suite exacte de $\mathcal{A}^e$-modules*

$$\{0\} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \{0\}$$

entraîne la suite exacte de $\mathcal{A}^e$-modules

$$\{0\} \longleftarrow \mathbf{D}(\mathcal{I},\mathcal{B}) \longleftarrow \mathbf{D}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \longleftarrow \mathbf{D}(\mathcal{B},\mathcal{B}) \longleftarrow \{0\}$$

et finalement, la suite exacte de complexes

$$\{0\} \longleftarrow \mathbf{D}^k\big(\mathcal{A},\mathbf{D}(\mathcal{I},\mathcal{B})\big) \longleftarrow \mathbf{D}^k\big(\mathcal{A},\mathbf{D}(\mathcal{A},\mathcal{B})\big) \longleftarrow \mathbf{D}^k\big(\mathcal{A},\mathbf{D}(\mathcal{B},\mathcal{B})\big) \longleftarrow \{0\}$$

Démonstration: Il est clair qu'un opérateur différentiel de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ s'annule sur $\mathcal{I}$ si et seulement s'il ne contient que des dérivées partielles des variables x', et est donc un prolongement d'un opérateur différentiel de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$. □

Pour la cohomologie de Hochschild à valeurs dans des espaces d'opérateurs différentiels comme ceux mentionnés dans le lemme précédent 2.5, on ne peut plus utiliser (2.25) puisque la structure de bimodule *n'est pas* symétrique. On utilise la décomposition $\mathbb{R}^n = E' \oplus E''$ mentionnée ci-dessus. On a le

Théorème 2.3 *Les groupes de cohomologie des complexes suivants se simplifient comme suit :*

1. $H\mathbf{D}^k(\mathcal{A}, \mathbf{D}(\mathcal{A}, \mathcal{B})) \cong \{0\}$ *si* $k \geq 1$ *et* $H\mathbf{D}^0(\mathcal{A}, \mathbf{D}(\mathcal{A}, \mathcal{B})) \cong \mathcal{B}$.
2. $H\mathbf{D}^k(\mathcal{A}, \mathbf{D}(\mathcal{B}, \mathcal{B})) \cong \mathcal{B} \otimes_{\mathbb{K}} \Lambda^k E''$ *quel que soit l'entier* $k \geq 0$.
3. $H\widetilde{\mathfrak{G}}^k = H\mathbf{D}^{k-1}(\mathcal{A}, \mathbf{D}(\mathcal{I}, \mathcal{B})) \cong H\mathbf{D}^k(\mathcal{A}, \mathbf{D}(\mathcal{B}, \mathcal{B})) \cong \mathcal{B} \otimes_{\mathbb{K}} \Lambda^k E'' = \widetilde{\mathfrak{g}}^k$ *quel que soit l'entier* $k \neq 0$.
4. $H\widetilde{\mathfrak{G}}^0 \cong \mathcal{B}$.

Démonstration: On esquisse la preuve du deuxième énoncé, celle des autres étant entièrement analogue. Soit $\Phi \in \mathbf{D}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, i.e.

$$(\Phi f)(x') = \sum_I \Phi^I(x') \frac{\partial^{|I|} f}{\partial (x')^I}(x')$$

avec des fonctions lisses $\Phi^I \in \mathcal{C}^\infty(E', \mathbb{K}) = \mathcal{B}$. De manière équivalente, on peut décrire Φ par son *symbole* $\tilde{\Phi}(x', p') = \sum_I \Phi^I(x') p'_I$ où $p'_I = (p'_1)^{i_1} \cdots \ (p'_{n-l})^{i_{n-l}}$, alors $\tilde{\Phi} \in \mathcal{C}^\infty(T^*E', \mathbb{K})$ est une application polynômiale en les variables d'impulsion $p'_1, \ldots, p'_{n-l}$. Il vient que l'application $\Phi \leftrightarrow \tilde{\Phi}$ est évidemment une bijection $\mathbb{K}$-linéaire. on utilise la décomposition

$$\mathbf{D}(\mathcal{B}, \mathcal{B}) \otimes_{\mathbb{K}} \Lambda^\bullet(\mathbb{R}^n) \cong \mathbf{D}(\mathcal{B}, \mathcal{B}) \otimes_{\mathbb{K}} \Lambda(E') \otimes_{\mathbb{K}} \Lambda(E'')$$

pour identifier $\Phi \in \mathbf{D}(\mathcal{B}, Bl) \otimes_{\mathbb{K}} \Lambda^\bullet(\mathbb{R}^n)$ avec son symbole $\sum \tilde{\Phi} = \frac{1}{k!} \tilde{\Phi}^{i_1 \cdots i_k} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ où $\tilde{\Phi}^{i_1 \cdots, i_k} \in \mathcal{C}^\infty(E', \mathbb{K}) \otimes \mathsf{S}\mathbb{R}^n$ comme avant. La différentielle de Koszul (2.24) s'exprime comme suit

$$\partial_K \tilde{\Phi} = \sum_{i=1}^n e_i \wedge \{x^i, \tilde{\Phi}\} = \sum_{i=1}^{n-l} e_i \wedge \{x_i, \tilde{\Phi}\} = d'_p \tilde{\Phi}$$

où $\{\ ,\ \}$ désigne le crochet de Poisson usuel dans $T^*E' = E' \times E'^*$, d'_p désigne la différentielle de deRham dans la direction des impulsions $p' \in E'^*$ et les $e_1, \ldots, e_{n-l}$ s'identifient de manière canonique avec les 1-formes $dp'_1, \ldots, dp'_{n-l}$. Grâce au lemme de Poincaré, on en déduit le résultat.
□

En utilisant la suite exacte longue de cohomologie résultant de la suite exacte courte des complexes $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}} \to \mathfrak{G} \to \widetilde{\mathfrak{G}}$ et le fait que l'homomorphisme connectant s'annule, on obtient finalement le résultat souhaité :

Théorème 2.4 *Quel que soit l'entier* k *:*

1. $H\mathfrak{G}^k \cong \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{K}} \Lambda^k E = \mathfrak{g}$ *(théorème HKR classique).*
2. $H\widetilde{\mathfrak{G}}^k \cong \mathcal{B} \otimes_{\mathbb{K}} \Lambda^k E'' = \widetilde{\mathfrak{g}}^k$.
3. $H\mathfrak{G}^k_{\mathcal{I}} \cong \mathfrak{g}^k_{\mathcal{I}}$.

2.5 (Co)homologie de Hochschild graduée de $\mathfrak{g}$ et de $\widetilde{\mathfrak{g}}$

On aura besoin de calculer plus tard la cohomologie (différentielle) et l'homologie continue graduées des algèbres commutatives graduées $\mathfrak{g} = \mathcal{A} \otimes \Lambda E$ et $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathcal{B} \otimes \Lambda E''$. On rappelle *le cobord de Hochschild gradué* pour une algèbre associative graduée $A = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i$:

$$\begin{aligned}(\mathsf{b}\phi)(f_1, \dots, f_{k+1}) \;=\;& (-1)^{|f_1|\,|\phi|} f_1\, \phi(f_2, \dots, f_{k+1}) \\ &+ \sum_{r=1}^{k} (-1)^r \phi(f_1, \dots, f_r f_{r+1}, \dots, f_{k+1}) \\ &+ (-1)^{k+1} \phi(f_1, \dots, f_k) f_{k+1}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

pour une cochaîne $\phi \in \mathrm{Hom}(A^{\otimes k}, A)$ de degré $|\phi|$ et $f_1, \dots, f_{k+1} \in A$.

Théorème 2.5 *On a les résultats HKR suivants pour la cohomologie différentielle graduée et l'homologie continue pour les algèbres associatives commutatives graduées $\mathfrak{g}$ et $\widetilde{\mathfrak{g}}$ pour tout entier positif k :*

1. $HH^k(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g} \otimes \oplus_{p=0}^{k} \big(\Lambda^p E \otimes \mathsf{S}^{k-p} E^*\big)$.
2. $HH^k(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{\mathfrak{g}}) \cong \widetilde{\mathfrak{g}} \otimes \oplus_{p=0}^{k} \big(\Lambda^p E' \otimes \mathsf{S}^{k-p} E''^*\big)$.
3. $HH_k(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g} \otimes \oplus_{p=0}^{k} \big(\Lambda^p E^* \otimes \mathsf{S}^{k-p} E\big)$.
4. $HH_k(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{\mathfrak{g}}) \cong \widetilde{\mathfrak{g}} \otimes \oplus_{p=0}^{k} \big(\Lambda^p E'^* \otimes \mathsf{S}^{k-p} E''\big)$.

Démonstration: $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des espaces des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{K})$ pour $N = n$ et $N = n - l$. On va calculer les cohomologies pour $\mathcal{A} \otimes \Lambda W$ pour un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et donc obtenir les énoncés comme cas particuliers.
Puisque W et donc $\Gamma := \Lambda W$ sont de dimension finie, on peut utiliser les résolutions libres de Γ^e-modules où Γ^e est l'algèbre $\Gamma \otimes \Gamma^{\mathrm{opp}}$ avec la multiplication évidente $(g_1 \otimes g_2)(g_1' \otimes g_2') := (-1)^{|g_2|(|g_1'| + |g_2'|)} g_1 g_1' \otimes g_2' g_2$ et Γ est considéré comme Γ^e-module gradué de façon usuelle, i.e. $(g_1 \otimes g_2) g := (-1)^{|g_2|\,|g|} g_1 g g_2$. Dans la catégorie des Γ^e-modules gradués, la cohomologie de Hochschild graduée de Γ à valeurs dans Γ est donnée par les groupes $Ext^k_{\Gamma^e}(\Gamma, \Gamma)$ et l'homologie de Hochschild graduée de Γ à valeurs dans Γ est donnée par les groupes $Tor_k^{\Gamma^e}(\Gamma, \Gamma)$, voir e.g. [13, p.169] pour le cas non gradué qui se généralise sans problème. La première résolution libre de Γ comme Γ^e-module est donnée par le complexe bar usuel (voir [13, p.174]) défini par la famille $CH(\Gamma)^k := (\Gamma \otimes \Gamma^{\otimes k} \otimes \Gamma)_{k \in \mathbb{N}}$ dont l'opérateur bord est

$$\begin{aligned}\hat{\partial}_H^k(g \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_k \otimes g') :=\;& g g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_k \otimes g' \\ &+ \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^r g \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_r g_{r+1} \otimes \cdots \otimes g_k \otimes g' \\ &+ (-1)^k g \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_{k-1} \otimes g_k g' \end{aligned} \tag{2.27}$$

sans modification de signe. La résolution de Koszul graduée est définie par la famille de Γ^e-modules gradués libres $\Gamma^e \otimes \mathsf{S}^k W$, et l'opérateur bord $\partial_K^k : \Gamma^e \otimes \mathsf{S}^k W \to \Gamma^e \otimes \mathsf{S}^{k-1} W$ suivant

$$\begin{aligned}&\partial_K^k(g \otimes L \otimes g') := \\ &\quad (-1)^{|g'|} \sum_{i=1}^{\dim W} \big(g \wedge e_i \otimes i(e^i)(L) \otimes g' \;-\; g \otimes i(e^i)(L) \otimes e_i \wedge g'\big).\end{aligned}$$

On voit que –avec cette résolution– les homomorphismes de Γ^e-modules gradués à valeurs dans Γ annulent ∂_K^k, ainsi que les produits tensoriels gradués sur Γ^e avec le Γ^e-module Γ, alors

$$HH^k(\Gamma,\Gamma) \cong Ext^k_{\Gamma^e}(\Gamma,\Gamma) \cong \Lambda W \otimes \mathsf{S}W^*$$

et

$$HH_k(\Gamma,\Gamma) \cong Tor_k^{\Gamma^e}(\Gamma,\Gamma) \cong \Lambda W \otimes \mathsf{S}W.$$

Pour finalement calculer les (co)homologies de Hochschild pour l'algèbre produit tensoriel $\mathcal{A} \otimes \Lambda W$ on regarde d'abord la résolution 'topologique' donnée par le complexe acyclique défini par la famille $(CH^k \otimes CH(\Gamma)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ et les opérateurs bord $\partial_H^k \otimes \hat{\partial}_H^k$. Puisque les deux complexes $(CH^k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(CH(\Gamma)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont des modules simpliciaux gradués (voir [35, p.44]), le théorème d'Eilenberg-Zilber (voir e.g. [37, p.238]) nous permet de remplacer le complexe acyclique $(CH^k \otimes CH(\Gamma)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ (dont l'homologie est égale à $\mathcal{A}\otimes\Gamma$) par le produit tensoriel des complexes acycliques $\big((CH^k)_{k\in\mathbb{N}}, (\partial_H^k)_{k\in\mathbb{N}}\big)$ et $\big((CH(\Gamma)^k)_{k\in\mathbb{N}}, (\hat{\partial}_H^k)_{k\in\mathbb{N}}\big)$ (dont l'homologie est aussi égale à $\mathcal{A}\otimes\Gamma$ grâce à un argument simple de bicomplexes, voir la proposition 4.1) comme résolution 'topologique' de $\mathcal{A}\otimes\Lambda W$. Le quasi-isomorphisme d'Alexander-Whitney (voir e.g. [37, p.241]) entre ces deux complexes est également un morphisme de $\mathcal{A}^e \otimes \Gamma^e$-modules. En considérant les homomorphismes différentiels dans $\mathcal{A}\otimes\Gamma$ et les produits tensoriels topologiques avec $\mathcal{A}\otimes\Gamma$, respectivement, avec cette dernière résolution, il résulte du théorème de Künneth (voir e.g. [37, p.166]) que la (co)homologie de $\mathcal{A}\otimes\Lambda W$ est le produit tensoriel sur $\mathbb{K}$ de la (co)homologie de $\mathcal{A}$ et de celle de $\Gamma = \Lambda W$, d'où le résultat d'après ce qui précède, d'après la proposition 2.8 et d'après le théorème 2.2. □

2.6 Les applications HKR

Dans cette sous-section nous allons construire des quasi-isomorphismes entre les algèbres de Lie différentielles graduées $(\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}, \mathsf{b})$ et $(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}, 0)$. Nous verrons que l'application HKR usuelle correspondant à l'antisymétrisation ne convient pas et doit être modifiée.

Pour un entier positif k soit $\alpha^k : \Lambda^k E \to E^{\otimes k}$ l'application d'antisymétrisation usuelle : $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \mapsto \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\epsilon(\sigma)v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{(\sigma(k))}$. Soit aussi $P^1 : SE \to E$ la projection canonique. En utilisant le fait que $\mathfrak{G}^k \cong \mathcal{A}\otimes_{\mathbb{K}} (SE)^{\otimes k}$ (à l'aide du calcul symbolique) nous définissons les deux applications suivantes

$$\psi^k_{HKR} : \mathfrak{g}^k \to \mathfrak{G}^k : f\otimes T \mapsto f\otimes\alpha^k(T), \tag{2.28}$$

et

$$\pi^k_{HKR} : \mathfrak{G}^k \to \mathfrak{g}^k : f\otimes L_1\otimes\cdots\otimes L_k \mapsto f\otimes P^1(L_1)\wedge\cdots\wedge P^1(L_k). \tag{2.29}$$

Nous écrirons ψ_{HKR} (resp. π_{HKR}) pour la somme de tous les ψ^k_{HKR} (resp. π^k_{HKR}) où ψ^k_{HKR} et π^k_{HKR} s'annulent pour $k \le -1$ et $k > \dim E$. Le théorème de Hochschild, Kostant et Rosenberg (HKR), 2.4, permet de déduire le suivant

Théorème 2.6 *Quel que soit l'entier positif k, les applications ψ^k_{HKR} et π^k_{HKR} ont les propriétés suivantes :*

1. $\pi^k_{HKR}\psi^k_{HKR} = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}^k}$.
2. $\mathsf{b}\psi^k_{HKR} = 0$.
3. *Soit $\phi \in \mathfrak{G}^k$. Si $\mathsf{b}\phi = 0$ et $\pi^k_{HKR}\phi = 0$, alors ϕ est un cobord, i.e. il existe $\phi' \in \mathfrak{G}^{k-1}$ tel que $\phi = \mathsf{b}\phi'$.*
4. *Soient $X, Y \in \mathfrak{g}$, alors il existe $\xi \in \mathfrak{G}$ tel que*

$$[\psi_{HKR}X, \psi_{HKR}Y]_G - \psi_{HKR}[X,Y]_S = \mathsf{b}\xi.$$

5. *Soient $X \in \mathfrak{g}^k$ et $Y \in \mathfrak{g}^l$, alors il existe $\xi \in \mathfrak{G}$ tel que*

$$\psi_{HKR}X \cup \psi_{HKR}Y - (-1)^{kl}\psi_{HKR}Y \cup \psi_{HKR}X - \psi_{HKR}(X \wedge Y) = \mathsf{b}\xi.$$

Malheureusement, l'application HKR ψ_{HKR} n'envoie pas le sous-espace $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$ de $\mathfrak{g}$ dans le sous-espace $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ de $\mathfrak{G}$: en utilisant la décomposition

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{I}} \quad = \quad \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{K}} \Lambda E'' \otimes_{\mathbb{K}} \Lambda^+ E' \quad \oplus \quad \mathcal{I} \otimes_{\mathbb{K}} \Lambda E'' \tag{2.30}$$

on voit que l'image de ψ_{HKR} contiendrait des éléments provenant du premier terme de la somme ci-dessus dont le facteur le plus à droite est dans E'' sans que le coefficient soit dans l'idéal, et un tel opérateur multidifférentiel ne serait plus dans $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$.

Il faut alors modifier les applications α^k : il est bien connu que la multiplication extérieure induit un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\Phi : \Lambda E'' \otimes_{\mathbb{K}} \Lambda E' \to \Lambda(E' \oplus E'') = \Lambda E : T_2 \otimes T_1 \mapsto T_2 \wedge T_1. \tag{2.31}$$

Soit $\iota^{(l,k-l)} : E''^{\otimes l} \otimes_{\mathbb{K}} E'^{\otimes(k-l)} \to E^{\otimes k}$ l'injection induite par des sous-espaces E', E''. L'application $\hat{\alpha}^k := \sum_{l=0}^k \iota^{(l,k-l)}\alpha^l \otimes \alpha^{k-l}$ envoie $\left(\Lambda E'' \otimes_{\mathbb{K}} \Lambda E'\right)_k$ dans $E^{\otimes k}$. Nous définissons l'application HKR modifiée par

$$\psi^1{}^k_{HKR} : \mathfrak{g}^k \to \mathfrak{G}^k : f \otimes T \mapsto f \otimes \hat{\alpha}^k\big(\Phi^{-1}(T)\big), \tag{2.32}$$

et ψ^1_{HKR} comme étant la somme des tous les $\psi^1{}^k_{HKR}$. Ainsi le facteur le plus à droite est toujours dans E' dans le cas où son coefficient est dans $\mathcal{A}$, et n'est dans E'' que si son coefficient est dans $\mathcal{I}$. Par conséquent, ψ^1_{HKR} envoie bien $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$ dans $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$. En écrivant $\psi^{[1]}$ pour la restriction de ψ^1_{HKR} à $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$ on a l'analogue suivant du théorème 2.6 :

Théorème 2.7 *Quel que soit l'entier positif k, les applications ${\psi^{[1]}}^k$ et π^k_{HKR} ont les propriétés suivantes :*

1. $\pi^k_{HKR}{\psi^{[1]}}^k = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}^k_{\mathcal{I}}}$.
2. $\mathsf{b}{\psi^{[1]}}^k = 0$.
3. *Soit $\phi \in \mathfrak{G}^k_{\mathcal{I}}$. Si $\mathsf{b}\phi = 0$ et $\pi^k_{HKR}\phi = 0$, alors ϕ est un cobord, i.e. il existe $\phi' \in \mathfrak{G}^{k-1}_{\mathcal{I}}$ tel que $\phi = \mathsf{b}\phi'$.*
4. *Soient $X, Y \in \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$, alors il existe $\phi \in \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ tel que*

$$[\psi^{[1]}X, \psi^{[1]}Y]_G - \psi^{[1]}[X,Y]_S = \mathsf{b}\phi.$$

5. *Soient $X \in \mathfrak{g}^k$ et $Y \in \mathfrak{g}^l$, alors il existe $\xi \in \mathfrak{G}$ tel que*

$$\psi^{[1]}X \cup \psi^{[1]}Y - (-1)^{kl}\psi^{[1]}Y \cup \psi^{[1]}X - \psi^{[1]}(X \wedge Y) = \mathsf{b}\xi.$$

Démonstration: 1. Le premier énoncé est évident.
2. Puisque l'image de $\psi^{[1]}$ consiste en des opérateurs multidifférentiels
1-différentiels, cet espace ne contient que des cocycles, d'où le deuxième énoncé.
3. D'après le troisième énoncé du théorème 2.6, ϕ est un cobord dans $\mathfrak{G}$, mais puisque le morphisme connectant de la suite exacte longue correpondant à la suite exacte courte $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}} \to \mathfrak{G} \to \widetilde{\mathfrak{G}}$ s'annule, il s'ensuit que ϕ est aussi un cobord dans $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$.
4. D'après 1. et le premier énoncé de 2.6, on trouve $\phi_1, \phi_2, \phi' \in \mathfrak{G}$ tels que $\psi^{[1]}X = \psi_{HKR}X + \mathsf{b}\phi_1$, $\psi^{[1]}Y = \psi_{HKR}Y + \mathsf{b}\phi_2$ et $\psi^{[1]}[X,Y] = \psi_{HKR}[X,Y] + \mathsf{b}\phi'$. A l'aide de l'énoncé 4. de 2.6, on voit que le membre de gauche de 4. est un élément de $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ et un cobord dans $\mathfrak{G}$, donc –à l'aide du même argument que pour 3.– un cobord dans $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$.
5. Raisonnement analogue à celui pour 4. $\square$

3 Formalité, star-produits adaptés et une structure G_∞ sur $\mathfrak{G}_\mathcal{I}$

Dans cette section, on rappelle d'abord la construction d'un star-produit (adapté) à l'aide d'n L_∞-morphisme due à Kontsevich. Puis, dans la deuxième sous-section, nous donnons les étapes de la construction d'un tel morphisme en utilisant des structures G_∞. Nous nous adapterons, au cas où l'espace est $\mathfrak{G}_\mathcal{I}$, la preuve de Tamarkin de la conjecture de Deligne [18] (il existe une stucture G_∞ sur $\mathfrak{G}$).

3.1 Formalité et star-produits

Dans ce paragraphe, $\mathfrak{a}$ est ou bien l'espace gradué $\mathfrak{g} = \Gamma^\infty(X, \Lambda TX)$ ou son sous-espace gradué $\mathfrak{g}_\mathcal{I}$ et $\mathfrak{A}$ est ou bien l'espace gradué des opérateurs multidifférentiels $\mathfrak{G}$ ou son sous-espace $\mathfrak{G}_\mathcal{I}$.

D'après les sections précédentes, l'espace $\mathfrak{a}[1]$ est muni de la structure d'algèbre de Lie graduée $[\ ,\ ]_S$ (le crochet de Schouten (2.7)) et $\mathfrak{A}[1]$ est muni de la structure d'algèbre de Lie différentielle graduée $\big([\ ,\ ]_G, \mathsf{b}\big)$ (crochet de Gerstenhaber (2.3) et différentielle de Hochschild (2.4)). Il s'ensuit que $\mathfrak{a}[1]$ est muni d'une structure L_∞, qu'on note d_L et $\mathfrak{A}[1]$ est muni d'une structure L_∞ qu'on note D_L, voir l'appendice A.2 pour des détails. Un *morphisme de formalité* est une somme $\psi = \sum_{k=1}^\infty \psi^{[k]}$ d'applications $\psi^{[k]} : \mathsf{S}^k(\mathfrak{a}[2]) \to \mathfrak{A}[2]$ qui sont de degré 0 et des opérateurs k-différentiels dans $\mathbf{D}^k\big(\mathfrak{a}[2]; \mathfrak{A}[2]\big)$ et qui satisfont à la condition suivante : le morphisme de cogèbres cocommutatives graduées $\overline{\psi} : \mathsf{S}(\mathfrak{a}[2]) \to \mathsf{S}(\mathfrak{A}[2])$ co-induit par ψ préserve les codérivations $\overline{d_L}$ sur $\mathsf{S}(\mathfrak{a}[2])$ et $\overline{D_L}$ sur $\mathsf{S}(\mathfrak{A}[2])$, i.e. $\overline{\psi} \circ \overline{d_L} = \overline{D_L} \circ \overline{\psi}$.
La construction suivante est un résultat célèbre de Kontsevich [32] :

Théorème 3.1 *Soit ψ un morphisme de formalité entre les L_∞-algèbres $\mathfrak{a}[1]$ et $\mathfrak{A}[1]$. Il existe un star-produit $\star$ sur X (dans le cas $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$) qui est adapté à la sous-variété C (dans le cas $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_I$).*

Démonstration: Soit $P \in \mathfrak{a}[1][[h]]$ une structure de Poisson formelle, i.e. $[P, P]_S = 0$. Dans la cogèbre topologique, $\mathsf{S}(\mathfrak{a}[2])[[h]]$ la structure P est de degré 0 et la série $e^{h \bullet P}$ (où $\bullet$ désigne la multiplication shuffle, voir l'appendice A.1) est un élément de genre groupe. Le morphisme de cogèbres cocommutatives $\overline{\psi}$ envoie $e^{h\bullet P}$ sur un autre élément de genre groupe dans la cogèbre topologique $\mathsf{S}(\mathfrak{A}[2])[[h]]$. Grâce à la coliberté de $\mathsf{S}(\mathfrak{A}[2])$ il vient que l'image $\overline{\psi}\big(e^{h\bullet P}\big)$ est nécessairement de la forme exponentielle $e^{h\bullet m_\star}$ avec m_* de degré 0 dans $\mathfrak{A}[2]$, donc une série d'opérateurs bidifférentiels. Puisque P est une structure de Poisson, il vient $\overline{d_L}\big(e^{h\bullet P}\big) = 0$. Par conséquent, $\overline{D_L}\big(e^{h\bullet m_\star}\big) = 0$ car $\overline{\psi}$ préserve les codérivations. La composante par rapport à $\mathfrak{A}[2]$ de cette dernière équation donne

$$0 = D_L^{[1]}(hm_\star) + \frac{1}{2} D_L^{[2]}(h^2 m_\star \bullet m_\star) = \mathsf{b}(hm_\star) + \frac{1}{2}[hm_\star, hm_\star]_G$$

qui est appelée 'l'équation Maurer-Cartan' et équivaut à l'associativité de la série $\star := m + hm_\star$ d'opérateurs bidifférentiels où m est la multiplication point-par-point dans $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{K})$: en effet, $\star \circ_G \star = [m, hm_\star]_G + \frac{1}{2}[hm_\star, hm_\star]_G$ et l'opérateur cobord de Hochschild b est donné par le crochet de Gerstenhaber avec m. $\square$

Le but de notre étude est donc de trouver un tel morphisme de formalité ψ entre les L_∞-algèbres $\mathfrak{g}_\mathcal{I}[1]$ et $\mathfrak{G}_\mathcal{I}[1]$. Un argument de perturbation homologique montre que l'on peut toujours trouver un tel morphisme ψ si on admet une modification d'_L de la structure L_∞, d_L, sur $\mathfrak{a}[1]$ avec des termes d'ordre supérieur, voir la proposition A.3. Mais l'apparition de d'_L changerait drastiquement l'argument de Kontsevich ci-dessus. Pour retransformer d'_L en d_L par un L_∞-morphisme, les obstructions se trouvent dans le cocomplexe $\big(\mathbf{D}(\mathsf{S}^+(\mathfrak{a}[2]), \mathfrak{a}[2]), [d_L,\ ]_{NR}\big)$, voir la proposition A.4. Malheureusement, cette cohomologie de Chevalley-Eilenberg de $(\mathfrak{a}[1], [\ ,\ ]_S)$ n'est pas concentré en

0, et il faut alors construire ψ par d'autres moyens. Dans le cas $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$, Kontsevich a développé une méthode géométrique à l'aide de graphes, voir [32]. A cause de l'asymétrie des opérateurs bidifférentiels adaptés dans $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$, la restriction du morphisme de formalité de Kontsevich à la sous-cogèbre codifférentielle $\mathsf{S}(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}[2])$ ne prend pas ses valeurs dans $\mathsf{S}(\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}[2])$. On suivra la méthode de Tamarkin [46], [27] : ceci explique le détour par des structures G_∞.

3.2 Structures G_∞ sur $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$

Le lecteur peut trouver les détails et conventions de signe précises pour les structures à homotopie près dans l'appendice A.2.

Soit $\mathfrak{a}$ un espace vectoriel gradué, par exemple $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{G}$ ou $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$. La *cogèbre de Gerstenhaber colibre* sur $\mathfrak{a}[2]$, est la 'cogèbre symétrique colibre en la cogèbre de Lie colibre avec un certain décalage', plus précisément, l'espace gradué $\mathsf{S}\big((\underline{\mathfrak{a}[1]^{\otimes}})[1]\big)$ avec deux structures algèbriques compatibles : une comultiplication coassociative cocommutative graduée et un cocrochet de Lie gradué sur $\mathsf{S}\big((\underline{\mathfrak{a}[1]^{\otimes}})[1]\big)[-1]$.

1. Structures G_∞ : une structure G_∞ sur $\mathfrak{h} := \mathfrak{a}[1]$ est définie par une codérivation $\overline{d}$ (pour les deux structures algèbriques de de $\mathsf{S}\big((\underline{\mathfrak{h}^{\otimes}})[1]\big)$ de degré 1 et de carré 0 co-induite par $d \in \mathrm{Hom}\,\big(\mathsf{S}\big((\underline{\mathfrak{h}^{\otimes}})[1]\big), \mathfrak{h}[1]\big)$ (voir l'appendice A.2 pour plus de détails). Pour simplifier la notation, on va l'écrire dans sa version décalée $m := d[-1] = \sum_{r,p_1,\ldots,p_r=1}^{\infty} m^{p_1,\ldots,p_r}$ où les applications $m^{p_1,\ldots,p_r}$ de degré $2-r$ sont des opérateurs $p_1 + \cdots + p_r$-différentiels de $\underline{\mathfrak{h}^{\otimes p_1}} \wedge \cdots \wedge \underline{\mathfrak{h}^{\otimes p_n}}$ dans $\mathfrak{h}$. Ici, m^1 est une codifférentielle, $m^{1,1}$ est une structure d'algèbre de Lie à homotopie près sur $\mathfrak{h}$, et $m^2[-1]$ est une structure d'algèbre commutative associative à homotopie près sur $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}[-1]$.

2. Structures G_∞ **sur les multivecteurs** : puisque toute algèbre de Gerstenhaber est muni d'une structure G_∞ où $m = m^1 + m^{1,1} + m^2$, les espaces des multivecteurs (adaptés), $\mathfrak{g}[1]$ et $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}[1]$ sont automatiquement munis d'une structure G_∞ donnée par $m^1 = 0$, $m^{1,1} = [\ ,\ ]_S$ et $m^2[-1] = \wedge$.

Il n'est pas aussi facile de trouver une structure G_∞ sur les espaces d'opérateurs multidifférentiels $\mathfrak{G}[1]$ ou $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}[1]$ car les lois b, $[\ ,\ ]_G$ et $\cup[1]$ n'en font pas des algèbres de Gerstenhaber : la règle de Leibniz entre $[\ ,\ ]_G$ et $\cup$ n'est satisfaite qu'à un cobord de Hochschild près, voir [23, p.285, Theorem 5]. Tamarkin procède de façon suivante :

3. Structure de bigèbre de Lie codifférentielle sur la cogèbre de Lie colibre implique structure G_∞ : c'est la proposition A.1 (montré dans [46] et [27]) : soit $\mathfrak{h}$ un espace gradué et soit $([\ ,\ ], \mathsf{b})$ la structure d'une bigèbre de Lie graduée codifférentielle sur la cogèbre de Lie libre $\underline{\mathfrak{h}^{\otimes}}$ (voir l'appendice A.2 pour des définitions), co-induite par une somme d'applications l^{p_1,p_2} : $\underline{\mathfrak{h}^{\otimes p_1}} \otimes \underline{\mathfrak{h}^{\otimes p_1}} \to \mathfrak{h}$ et $l^p : \underline{\mathfrak{h}^{\otimes p}} \to \mathfrak{h}$. Alors cette structure se prolonge en une structure G_∞ sur $\mathfrak{h}$ avec $m^{p_1,p_2} = l^{p_1,p_2}$ et $m^p = l^p$, les autres composantes étant zéro.

4. Les accolades définissent la structure d'une bigèbre codifférentielle sur les cogèbres colibres $\mathfrak{G}[1]^{\otimes}$ **et** $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}[1]^{\otimes}$: les deux espaces d'opérateurs multidifférentiels $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ sont des sous-espaces des $\mathbb{K}$-homomorphismes $\mathcal{A}^{\otimes} \to \mathcal{A}$ avec $\mathcal{A} = \mathcal{A}^0 = \mathcal{C}^\infty(X,\mathbb{K})$, alors $\mathfrak{G}[1], \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}[1]$ sont des sous-espaces gradués de $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}[1]^{\otimes}, \mathcal{A}[1])$. De plus, $\mathfrak{G}[1]$ et $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}[1]$ sont fermés pour les opérations $\circ_i$ (A.19) grâce à la proposition 2.1. Dans cette situation générale, il existe une structure canonique de bigèbre sur la cogèbre colibre $\mathfrak{H}^{\otimes}$ (où par exemple $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}[1]$ ou $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}[1]$) définie par des accolades (*braces*), voir l'appendice A.3 pour des détails. Ici la comultiplication reste la comultiplication de déconcaténation, tandis que la multiplication $\bullet_K$ (A.20) se présente comme une certaine 'déformation de la multiplication shuffle $\bullet$' si l'on prend le degré tensoriel comme filtration. La multiplication est co-induite par certaines applications $m_K = \sum_{p_1,p_2=1}^{\infty} a^{p_1,p_2}$ avec $a^{p_1,p_2} : \mathfrak{H}^{\otimes p_1} \otimes \mathfrak{H}^{\otimes p_2} \to \mathfrak{H}$. Le commutateur gradué (par rapport à $\bullet_K$) avec la décalée $m[1]$ de la multiplication associative m sur $\mathcal{A}$ définit une codifférentielle b_K (A.21) de la bigèbre qui est co-induite par des applications $a^p : \mathfrak{H}^{\otimes p} \to \mathfrak{H}$) avec $p = 1, 2$: a^1 est égale au cobord de Hochschild b sur $\mathfrak{H}$ et a^2 est égal à la décalée $\cup[1]$ de la multiplication $\cup$.

5. Le théorème de déquantification d'Etingof-Kazhdan implique la structure de bigèbre de Lie sur la cogèbre de Lie colibre : la filtration par degré tensoriel de la bigèbre accolades mentionnée dans **4.** n'est pas bonne : en passant à la bigèbre graduée associée, on obtiendrait –en divisant par les shuffles $\mathfrak{H}^{\otimes +} \bullet \mathfrak{H}^{\otimes +}$, voir l'appendice A.1– la structure d'une bigèbre de Lie graduée sur la cogèbre de Lie colibre, mais la composante m^2 serait nulle, donc on n'aurait pas inclus la multiplication $\cup$. Ce n'est qu'une application du théorème de déquantification d'Etingof-Kazhdan (voir l'appendice de l'article [27]) qui permet de passer de la bigèbre codifférentielle accolades (où la codifférentielle est le commutateur gradué avec la multiplication point-par-point m) à la structure d'une bigèbre de Lie sur la cogèbre de Lie colibre qui inclut la multiplication *cup* co-induite par a^2 :

Proposition 3.1 *Soit $\mathfrak{H}$ un espace vectoriel gradué. Supposons donnée une structure de bigèbre différentielle sur la cogèbre tensorielle colibre $\mathfrak{H}^{\otimes} = \oplus_{n\geq 0} \mathfrak{H}^{\otimes n}$ dont la différentielle et la multiplication sont données respectivement par des applications $a^n : \mathfrak{H}^{\otimes n} \to \mathfrak{H}$ et $a^{p_1,p_2} : \mathfrak{H}^{\otimes p_1} \otimes \mathfrak{H}^{\otimes p_2} \to \mathfrak{H}$. Alors on a une structure de bigèbre de Lie différentielle sur la cogèbre de Lie $\underline{\mathfrak{H}^{\otimes}} = \oplus_{n\geq 1} \underline{\mathfrak{H}^{\otimes n}}$, dont la différentielle et le crochet de Lie sont donnés respectivement par les applications l^n et l^{p_1,p_2} où $l^1 = a^1$, l^2 est l'anti-symétrisée de a^2 et $l^{1,1}$ est l'anti-symmetrisée de $a^{1,1}$.*

6. Bonne structure G_∞ sur $\mathfrak{G}[1]$ et $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}[1]$: c'est une conséquence directe des trois étapes précédentes **3.**, **4.**, **5.**. On note la structure G_∞ sur $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}[1]$ ou $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}[1]$ par D.

7. Morphisme de formalité (différentiel) G_∞ entre $(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}[1], d')$ et $(\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}[1],\ D)$: un raisonnement général de perturbation homologique (voir la proposition A.3) permet de construire une structure G_∞ différentielle d' sur $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}[1]$ ou $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}[1]$ et un G_∞-morphisme différentiel de formalité $\overline{\psi} : (\mathfrak{h}, d') \to (\mathfrak{H}, D)$ à partir de l'application HKR ψ_{HKR} (pour $\mathfrak{G}$) ou l'application HKR modifiée $\psi^{[1]}$ (pour $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$). Les propriétés de $\psi^{[1]}$ dans le théorème 2.7 permettent de conclure que la structure G_∞ sur $\mathfrak{h}$, d', est donnée par une modification de la structure usuelle $d := d'^{[2]} = [\ ,\ ]_S[1] + \wedge[2]$ par des termes de rang supérieur $d^{p_1,\cdots,p_r}$ avec $p_1 + \cdots + p_r \geq 3$.

8. Le cocomplexe d'obstructions pour transformer d' en d : encore une fois, il faut transformer la structure G_∞ d' sur $\mathfrak{h}$ en la structure usuelle d par un morphisme G_∞ différentiel ψ' de la cogèbre de Gerstenhaber colibre de $\mathfrak{h}$ dans elle-même. La proposition A.4 décrit le cocomplexe de toutes les obstructions récurrentes à cette transformation comme l'espace

$$\Big(\mathbf{D}(\mathbf{\Lambda}^{\cdot} \underline{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}[1]^{\otimes \cdot}}, \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}[1]), \big[[-,-]_S + \wedge[1], -\big]\Big),$$

pour le cas $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}[1]$. On va montrer dans la section suivante 4 que la cohomologie de ce cocomplexe est concentré en 0 donc cette transformation sera toujours possible.

9. Morphisme de formalité G_∞ entre $(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}[1], d)$ et $(\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}[1], D)$: la composition $\overline{\psi} \circ \overline{\psi'}$ des deux G_∞-morphismes différentiels $\overline{\psi}$ (**7.**) et $\overline{\psi'}$ (**8.**) donne le résultat.

10. L_∞**-morphisme de formalité différentiel** $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}[1] \to \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}[1]$ **à partir de la restriction du** G_∞**-morphisme** : afin d'appliquer le théorème de Kontsevich 3.1 pour la construction d'un star-produit adapté (dont les opérateurs bidifférentiels résident dans $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$), il faut obtenir le morphisme L_∞ différentiel à partir du morphisme G_∞ différentiel : c'est toujours possible grâce à la proposition A.2. On obtient les structures L_∞ et le L_∞-morphisme de formalité par restriction aux cogèbres symétriques vues comme sous-cogèbres de Gerstenhaber, voir l'appendice A.2. Ainsi la restriction de $d = d^{1,1} + d^2$ nous donne le crochet de Schouten $d_L^2 = d^{1,1} = [\ ,\ ]_S[1]$, et la restriction de $D = \sum_{p\geq 1} D^p + \sum_{p_1,p_2\geq 1} D^{p_1,p_2}$ donne $D^1 + D^{1,1} = \mathsf{b} + [\ ,\ ]_G[1]$. La restriction du G_∞-morphisme différentiel de formalité définit donc le L_∞-morphisme différentiel de formalité souhaité.

11. La preuve du théorème principal 0.1 est terminée après le théorème 2.4, les étapes **1.** à **10.** et l'acyclicité du cocomplexe d'obstructions dans le paragraphe 4.

4 Calcul des obstructions

Nous avons vu que les obstructions à la construction de star-représentations résidaient dans le groupe de cohomologie du *cocomplexe d'obstructions*

$$\Big(\mathbf{D}(\mathbf{\Lambda}^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}[1]^{\otimes\cdot}}, \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}[1]), \big[[-,-]_S + \wedge[1], -\big]_T\Big)\,, \tag{4.1}$$

voir la proposition A.4. Dans cette section, nous nous proposons de calculer ces groupes d'obstructions et de montrer qu'ils s'annulent.

Cette tâche sera divisée en deux parties : le cocomplexe d'obstructions (4.1) est un *bicomplexe* quand on munit un élément x de $\underline{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}[1]^{\otimes p_1}\mathbf{\Lambda}\cdots\mathbf{\Lambda}\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}[1]^{\otimes p_n}}$ du bidegré additionnel $(\sum_{i=1}^n p_i - 1, n-1)$: la codifférentielle $D_{CE} := [d^{1,1},\ ]_T$ provenant du crochet de Schouten $[\ ,\ ]_S$ est de bidegré $(0,1)$ et anticommute avec la codifférentielle $D_{Har} := [d^2,\ ]_T$ provenant de la multiplication $\wedge$ qui est de bidegré $(1,0)$ (voir [46], [27], [28]). Le théorème élémentaire d'algèbre homologique suivant (voir par exemple [1, p.25, Cor. 37]) sera très utile pour la suite :

Proposition 4.1 *La cohomologie d'un bicomplexe par rapport à la deuxième codifférentielle est toujours un cocomplexe induit pour la première codifférentielle. Si cette cohomologie par rapport à la deuxième codifférentielle est concentrée en degré* 0*, alors la cohomologie totale du bicomplexe est isomorphe à la cohomologie du cocomplexe induit.*

Dans la première sous-section, nous montrerons que l'homologie de Harrison de $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$ est concentrée en degré 1 (après décalage), et que ce résultat implique que le bicomplexe d'obstructions (4.1) pour la codifférentielle D_{Har} est acyclique. Ceci entraîne une première réduction du bicomplexe d'obstructions au cocomplexe induit

$$\big(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{\Lambda}^{\cdot}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}\otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}\Omega_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}), \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}), \delta^{1,1}\big)\,, \tag{4.2}$$

où $\delta^{1,1}$ est la codifférentielle induite de la codifférentielle D_{CE}, l'algèbre $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}$ est $\mathbb{K}1 \oplus \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$ et $\mathfrak{g}\otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}\Omega_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}$ désigne le $\mathfrak{g}$-module des différentielles de Kähler de $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}$. En fait, cette cohomologie est une version graduée de la cohomologie de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre de Lie graduée des différentielles de Kähler.

Dans la deuxième sous-section, nous montrerons que si $X = \mathbb{R}^n$ et $C = \mathbb{R}^{n-l}$ la cohomologie du cocomplexe induit (4.2) est concentré en degré 0. On dira parfois abusivement qu'un complexe est acyclique pour dire qu'il est concentré en degré 0 (ou bidegré $(0,0)$).

4.1 Première réduction du cocomplexe d'obstructions à l'aide de l'homologie de Harrison continue

Dans cette partie on s'attache à démontrer

Théorème 4.1 *Avec les notations introduites ci-dessus :*

1. *L'homologie graduée de Harrison continue de* $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}$ *à valeurs dans* $\mathfrak{g}$ *est donnée par*

$$\mathrm{Har}_k(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}|\mathbb{K},\mathfrak{g}) = \begin{cases} \mathfrak{g} & si \quad k=0 \\ \mathfrak{g}\otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}\Omega^1_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} & si \quad k=1 \\ \{0\} & si \quad k\geq 2 \end{cases}$$

   où $\mathfrak{g}\otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}\Omega^1_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} := HH_{1\ \mathrm{cont}}(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+},\mathfrak{g})$*, l'espace des différentielles de Kähler, est donné par le noyau de l'application* $\Psi : HH_{1\ \mathrm{cont}}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) \to HH_{1\ \mathrm{cont}}(\widetilde{\mathfrak{g}},\widetilde{\mathfrak{g}})$.

2. *Le cocomplexe d'obstructions (4.1) se réduit au cocomplexe induit (4.2) donné par* $\big(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{\Lambda}^{\cdot}_{\mathfrak{g}}\big(\mathfrak{g}\otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}\Omega_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}$

Démonstration: L'astuce principale est de faire apparaître les $\mathfrak{g}$-modules : pour tout espace vectoriel gradué V, le produit tensoriel $\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{K}} V$ est un $\mathfrak{g}$-module à gauche libre engendré par V (par multiplication sur le premier facteur). On a évidemment un isomorphisme d'espace vectoriels complexes :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{\Lambda}^{\cdot}\underline{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{\otimes\cdot}},\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{\Lambda}^{\cdot}_{\mathfrak{g}}\left(\mathfrak{g}\otimes\underline{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{\otimes\cdot}}\right),\mathfrak{g}_{\mathcal{I}})$$

que l'on peut prolonger au produits tensoriels topologiques car on ne considère que les cochaînes multidifférentiels, donc continues. La codifférentielle induite sur le dernier complexe par $[m^2,-]$ est la duale d'une différentielle induite par δ^2 sur $\mathbf{\Lambda}^{\cdot}_{\mathfrak{g}}\left(\mathfrak{g}\otimes\underline{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{\otimes\cdot}}\right)$ qui n'est autre que la *différentielle de Harrison* β sur chaque facteur $\mathfrak{g}\otimes\underline{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{\otimes\cdot}}$. En effet, pour $\varphi : \mathbf{\Lambda}^{\cdot}_{\mathfrak{g}}\left(\mathfrak{g}\otimes\underline{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{\otimes\cdot}}\right) \to \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$ et $x\otimes x_1\otimes\cdots\otimes x_n \in \mathbf{\Lambda}^{\cdot}_{\mathfrak{g}}\left(\mathfrak{g}\otimes\underline{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{\otimes\cdot}}\right)$, on a

$$\begin{aligned}
&[m^2,\varphi](x\otimes x_1\otimes\cdots\otimes x_n) \\
&\qquad = \pm m^2(x_1,\varphi(x\otimes x_2\cdots)) \pm m^2(\varphi(x\otimes x_1\cdots),x_n) \\
&\qquad\quad + \sum \pm\varphi(x\otimes x_1\cdots m^2(x_i,x_{i+1})\cdots) \\
&\qquad = \varphi(m^2(x,x_1)\otimes x_2\cdots) + \sum \pm\varphi(x\otimes\cdots m^2(x_i,x_{i+1})\cdots) \\
&\qquad = \varphi(\beta(x\otimes x_1\otimes\cdots\otimes x_n)).
\end{aligned}$$

Une itération du théorème des bicomplexes 4.1 assure que si l'homologie du complexe (tronqué, i.e. $k\geq 1$) de Harrison $\left(\mathfrak{g}\otimes\underline{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}^{\otimes\cdot}},\beta\right)$ de $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$ à coefficients dans $\mathfrak{g}$ est concentrée en degré 1 (dans notre cas égale à $\mathfrak{g}\otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}\Omega^1_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}$), alors l'homologie du complexe $\left(\mathbf{\Lambda}^{k}_{\mathfrak{g}}\big(\mathfrak{g}\otimes\underline{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{\otimes}}\big),\beta\right)$ est acyclique $\forall k\geq 1$, et finalement, la cohomologie du cocomplexe d'obstructions (4.1) par rapport à la codifférentielle D_{Har} est acyclique (voir également [46], [27]).

Rappelons que $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+} = \mathbb{K}\oplus\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$. Montrons maintenant que l'homologie de Harrison est égale à $\mathfrak{g}\otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}\Omega^1_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}$. On a une suite d'inclusions de sous-algèbres graduées commutatives et unitaires

$$\mathbb{K}\hookrightarrow\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}\hookrightarrow\mathfrak{g}$$

Comme $\mathbb{K}$ est de caractéristique 0, pour tout $\mathfrak{g}$-module M, on peut écrire la version graduée topologique de la *suite exacte de Jacobi-Zariski associée* (où la notation $B|A$ signifie que l'anneau commutatif gradué B est vu comme algèbre sur le sous-anneau gradué A), voir par exemple [1, p.61-p.74] pour des démonstrations :

$$\cdots \mathrm{Har}_{\cdot+1}(\mathfrak{g}|\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}, M) \to \mathrm{Har}_{\cdot}(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}|\mathbb{K}, M) \\ \to \mathrm{Har}_{\cdot}(\mathfrak{g}|\mathbb{K}, M) \to \mathrm{Har}_{\cdot}(\mathfrak{g}|\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}, M) \to \cdots .$$

Rappelons que cette propriété provient du fait que lorsque $A \supset \mathbb{Q}$, l'homologie de Harrison $\mathrm{Har}_{\cdot}(B|A, M)$ d'une A-algèbre B à valeurs dans un B-module M est égale à l'homologie d'André-Quillen $AQ_{\cdot}(B|A, M)$ (à un décalage du degré près) qui admet toujours une telle suite exacte. De plus, elle s'identifie aussi avec la partie de poids 1 de la décomposition de Hodge de l'homologie de Hochschild $HH_{\cdot}(B|A, M)$, voir [35, p.145, Prop. 4.5.13]. On s'intéresse au cas $M = \mathfrak{g}$. Grâce à la version graduée du théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg pour l'homologie continue de l'algèbre graduée $\mathfrak{g} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}) \otimes \Lambda E$ (voir le théorème 2.5), on a un isomorphisme

$$HH_{\cdot}(\mathfrak{g}|\mathbb{K}, \mathfrak{g}) \cong \Lambda^{\cdot} HH_1(\mathfrak{g}|\mathbb{K}, \mathfrak{g}) =: \Lambda^{\cdot}\Omega^1_{\mathfrak{g}|\mathbb{K}}$$

donc, d'après la décomposition de Hodge mentionnée ci-dessus, il vient

$$\mathrm{Har}_k(\mathfrak{g}|\mathbb{K}, \mathfrak{g}) \cong \begin{cases} \Omega^1_{\mathfrak{g}|\mathbb{K}} & \text{si } k = 1 \\ \{0\} & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

ce qui ramène le calcul de $\mathrm{Har}_{\cdot}(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}|\mathbb{K}, \mathfrak{g})$ à celui de $\mathrm{Har}_{\cdot+1}(\mathfrak{g}|\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}, \mathfrak{g})$ d'après la suite exacte de Jacobi-Zariski. Calculons donc $HH_{\cdot}(\mathfrak{g}|\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}, \mathfrak{g})$.

Il est bien connu que l'homologie de Hochschild $HH_{\cdot}(B|A, M)$ d'une A-algèbre unitaire B à valeurs dans un B-module M est égale à l'homologie du complexe de Hochschild normalisé $\overline{C_k}(B|A, M)$ défini, en notant $B_{/A}$ le module quotient de B par A, pour tout $k \geq 0$, par $\overline{C_k}(B|A, M) = M \otimes_A (B_{/A})^{\otimes_A k}$ muni de la différentielle de Hochschild b. Il nous suffit donc de calculer l'homologie de $\overline{C_{\cdot}}(\mathfrak{g}_{/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} (\mathfrak{g}_{/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}) \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \cdots \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} (\mathfrak{g}_{/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}})$.

Comme $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+} = \mathbb{K} \oplus \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$ la projection $\mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$ induit un isomorphisme $\mathfrak{g}_{/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} = \widetilde{\mathfrak{g}}_{/\mathbb{K}}$. Puisque $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$ est un idéal, si on munit $\mathfrak{g}_{/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}_{/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}$ de la structure de $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}$ module induit par le morphisme d'anneaux $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+} \to \mathbb{K}$, on voit que la projection canonique $\mathfrak{g}_{/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \times \mathfrak{g}_{/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \to \mathfrak{g}_{/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}_{/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}$ est $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}$-bilinéaire. Comme toute application $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}$-bilinéaire est aussi $\mathbb{K}$-bilinéaire, on en déduit que toute application $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}$-bilinéaire de $\mathfrak{g}_{/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \times \mathfrak{g}_{/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}$ dans un module V se factorise au travers de $\mathfrak{g}_{/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}_{/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}$ et on obtient un isomorphisme

$$\widetilde{\mathfrak{g}}_{/\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} \widetilde{\mathfrak{g}}_{/\mathbb{K}} \cong \mathfrak{g}_{/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}_{/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \cong \mathfrak{g}_{/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \mathfrak{g}_{/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}.$$

En itérant ce raisonnement et en utilisant que la projection $\mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$ est un morphisme d'algèbres on obtient un isomorphisme de complexes

$$\mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \left(\mathfrak{g}_{/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}\right) \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \cdots \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \left(\mathfrak{g}_{/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}\right) \cong (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}) \otimes_{\mathbb{K}} (\widetilde{\mathfrak{g}}_{/\mathbb{K}}) \otimes_{\mathbb{K}} \cdots \otimes_{\mathbb{K}} (\widetilde{\mathfrak{g}}_{/\mathbb{K}}) \\ \cong \widetilde{\mathfrak{g}} \otimes_{\mathbb{K}} (\widetilde{\mathfrak{g}}_{/\mathbb{K}}) \otimes_{\mathbb{K}} \cdots \otimes_{\mathbb{K}} (\widetilde{\mathfrak{g}}_{/\mathbb{K}}) .$$

Le dernier complexe n'est autre que le complexe de Hochschild normalisé $\overline{C_{\cdot}}(\widetilde{\mathfrak{g}}|\mathbb{K}, \widetilde{\mathfrak{g}})$ de $\widetilde{\mathfrak{g}}$. La version graduée du théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg pour l'homologie de Hochschild continue graduée de l'algèbre graduée $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathcal{C}^\infty(C,\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} \Lambda E''$ (voir le théorème 2.5) donne un isomorphisme

$$H_{\cdot}(\overline{C_{\cdot}}^{\mathbb{K}}(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{\mathfrak{g}})) \cong HH_{\cdot}(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{\mathfrak{g}}) \cong \Lambda^{\cdot}\Omega^1_{\widetilde{\mathfrak{g}}}$$

dont la composante de poids 1 est $\Omega^1_{\widetilde{\mathfrak{g}}}$, voir [35, p.145, Prop. 4.5.13], donc les groupes d'homologie de Harrison s'annulent à partir de $k \geq 2$. La suite exacte de Jacobi-Zariski se réduit alors à la suite exacte de $\mathfrak{g}$-modules

$$\{0\} \to \mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \Omega^1_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \hookrightarrow \Omega^1_{\mathfrak{g}} \twoheadrightarrow \Omega^1_{\widetilde{\mathfrak{g}}} \to \{0\}$$

(où la structure de $\mathfrak{g}$-module de $\Omega^1_{\widetilde{\mathfrak{g}}}$ est induite par la projection $\mathfrak{g} \twoheadrightarrow \widetilde{\mathfrak{g}}$) qui donne l'isomorphisme cherché $\mathrm{Har}_{\cdot}(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}|\mathbb{K}, \mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \Omega^1_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}$. □

4.2 Acyclicité du cocomplexe d'obstructions réduit

On rappelle

$$\begin{array}{lll} x'_\alpha := x_\alpha & 1 \leq \alpha \leq n-l & \text{coordonnées le long de } C, \\ x''_\mu := x_{n-l+\mu} & 1 \leq \mu \leq l & \text{coordonnées transversales à } C. \end{array}$$

et l'on pose

$$\begin{array}{lll} y'_\alpha & 1 \leq \alpha \leq n-l & \text{base de l'espace } E', \\ y''_\mu & 1 \leq \mu \leq l & \text{base de l'espace } E''. \end{array}$$

D'après le théorème HKR 2.5, il vient que les modules des différentielles de Kähler continues de $\mathfrak{g} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}) \otimes \Lambda E$ et de $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n-l},\mathbb{K}) \otimes \Lambda E''$ sont donnés par des modules libres $\Omega^1_{\mathfrak{g}} := HH_1(\mathfrak{g}|\mathbb{K}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes (E^* \oplus E)$ (sur $\mathfrak{g}$) et $\Omega^1_{\widetilde{\mathfrak{g}}} := HH_1(\widetilde{\mathfrak{g}}|\mathbb{K}, \widetilde{\mathfrak{g}}) = \widetilde{\mathfrak{g}} \otimes (E'^* \oplus E'')$ (sur $\widetilde{\mathfrak{g}}$). On écrira les bases de $\Omega^1_{\mathfrak{g}}$ et de $\Omega^1_{\widetilde{\mathfrak{g}}}$ comme des différentielles des 'coordonnées' (x, y) comme suit :

$$\text{Pour } \Omega^1_{\mathfrak{g}} : \quad \mathbf{d}x'_\alpha = \mathrm{d}x'_\alpha, \mathbf{d}x''_\mu = \mathrm{d}x''_\mu, \mathbf{d}y'_\beta, \mathbf{d}y''_\nu$$

quels que soient $1 \leq \alpha, \beta \leq n-l$ et $1 \leq \mu, \nu \leq l$, et

$$\text{pour } \Omega^1_{\widetilde{\mathfrak{g}}} : \quad \mathbf{d}x'_\alpha = \mathrm{d}x'_\alpha, \mathbf{d}y''_\nu$$

quels que soient $1 \leq \alpha, \leq n-l$ et $1 \leq \nu \leq l$. Le morphisme de $\mathfrak{g}$-modules $\Omega^1_{\mathfrak{g}} \twoheadrightarrow \Omega^1_{\widetilde{\mathfrak{g}}}$ est donc donné par

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \xi_\alpha \mathbf{d}x'_\alpha + \sum_\mu \xi''_\mu \mathbf{d}x''_\mu + \sum_\beta \eta'_\beta \mathbf{d}y'_\beta + \sum_\nu \eta''_\nu \mathbf{d}y''_\nu \\ \mapsto \qquad \sum_\alpha p_{\widetilde{\mathfrak{g}}}(\xi_\alpha)\mathbf{d}x'_\alpha + \sum_\nu p_{\widetilde{\mathfrak{g}}}(\eta''_\nu)\mathbf{d}y''_\nu \end{aligned}$$

où $p_{\widetilde{\mathfrak{g}}}$ désigne le morphisme d'algèbres $\mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$. Puisqu'on peut identifier le $\mathfrak{g}$-module $\mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \Omega^1_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}$ avec $\mathrm{Ker}(\Omega^1_{\mathfrak{g}} \twoheadrightarrow \Omega^1_{\widetilde{\mathfrak{g}}})$ et $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}} = \mathrm{Ker}(\mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}})$ est l'idéal engendré par x''_μ et y'_α en tant que $\mathfrak{g}$-module, alors $\mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \Omega^1_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}$ est engendré par les différentielles de Kähler

$$\mathbf{d}x''_\mu,\ \mathbf{d}y'_\alpha,\ x''_\nu\mathbf{d}x'_\beta,\ y'_\gamma\mathbf{d}x'_{\gamma'},\ x''_\rho\mathbf{d}y''_\sigma,\ y'_{\gamma''}\mathbf{d}y''_\tau \tag{4.3}$$

quel que soient $1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \gamma', \gamma'' \leq n-l$ et $1 \leq \mu, \nu, \rho, \sigma, \tau \leq l$. Remarquons que le crochet de Schouten définit la structure d'une algèbre de Lie graduée sur $\Omega^1_{\mathfrak{g}}$ définit par $[\mathbf{d}\xi, \mathbf{d}\eta] := \mathbf{d}[\xi, \eta]_S$ et $\mathbf{d}\xi.\eta := [\mathbf{d}\xi, \eta] := [\xi, \eta]_S$ pour $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$.

Voici le résultat central de ce paragraphe :

Théorème 4.2 *Si $X = \mathbb{R}^n$ et $C = \mathbb{R}^{n-l}$ avec $l \geq 2$, la cohomologie du complexe* $\big(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{\Lambda}^{\cdot}_{\mathfrak{g}}\big(\mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \Omega_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}\big)$ $, \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}), \delta^{1,1}\big)$ *est concentrée en degré* 0.

Démonstration: Montrons d'abord que tout morphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{\Lambda}^{\cdot}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \Omega_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}), \mathfrak{g}_{\mathcal{I}})$ peut se relever en un morphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{\Lambda}^{\cdot}_{\mathfrak{g}}\Omega_{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Reprenons les notations prédédentes : le $\mathfrak{g}$-module $\mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \Omega^1_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}$ est engendré par les différentielles de Kähler (4.3).

Soit φ dans $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \Omega_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}, \mathfrak{g}_{\mathcal{I}})$. Montrons que pour tout $1 \leq \alpha \leq n-l$, il existe un unique c_α dans $\mathfrak{g}$ tel que pour tous $1 \leq \mu \leq l$ et pour tous $1 \leq \beta \leq n-l$ on ait :

$$\varphi\big(x''_\mu \mathbf{d}x'_\alpha\big) = x''_\mu c_\alpha, \text{ et } \varphi\big(y'_\beta \mathbf{d}x'_\alpha\big) = (-1)^{|\varphi|} y'_\beta c_\alpha.$$

En effet, par $\mathfrak{g}$-linéarité, $x''_{l-1}\varphi(x''_l \mathbf{d}x'_\alpha) = x''_l \varphi(x''_{l-1}\mathbf{d}x'_\alpha)$ quel que soit $1 \leq \alpha \leq n-l$. Par conséquent, $x''_{l-1}\varphi(x''_l \mathbf{d}x'_\alpha)$ et donc $\varphi(x''_l \mathbf{d}x'_\alpha)$ s'annule sur l'hyperplan $H_l := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x''_l = 0\}$. L'idéal annulateur de H_l est égal à $x''_l \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$ d'après le lemme d'Hadamard : si $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{K})$ s'annule sur H_l, alors

$$g(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_l}(x_1, \ldots, x_{n-1}, t x_n) dt \;\; x_n$$

avec $x_n = x''_l$. Donc il existe un unique c_α dans $\mathfrak{g}$ tel que $\varphi(x''_l \mathbf{d}x'_\alpha) = x''_l c_\alpha$ et $\varphi(x''_{l-1}\mathbf{d}x'_\alpha) = x''_{l-1} c_\alpha$. Soit $1 \leq \mu \leq l-2$, on a encore $x''_l \varphi(x''_\mu \mathbf{d}x'_\alpha) = x''_\mu \varphi(x''_l \mathbf{d}x'_\alpha) = x''_\mu x''_l c_\alpha$ et donc $\varphi(x''_\mu \mathbf{d}x'_\alpha) = x''_\mu c_\alpha$. De même, pour $1 \leq \beta \leq n-l$, $x''_l \varphi(y'_\beta \mathbf{d}x'_\alpha) = (-1)^{|\varphi|} y'_\beta \varphi(x''_l \mathbf{d}x'_\alpha) = (-1)^{|\varphi|} y'_\beta x''_l c_\alpha$ et donc $\varphi(y'_\beta \mathbf{d}x'_\alpha) = (-1)^{|\varphi|} y'_\beta c_\alpha$.
Il est clair que l'on peut montrer de la même manière le résultat analogue que pour tout $1 \leq \mu \leq l$, il existe un unique $\hat{c}_\mu$ dans $\mathfrak{g}$ tel que pour tous $1 \leq \nu \leq l$ et pour tous $1 \leq \beta \leq n-l$ on ait :

$$\varphi\big(x''_\nu \mathbf{d}y''_\mu\big) = x''_\nu \hat{c}_\mu, \text{ et } \varphi\big(y'_\beta \mathbf{d}y''_\mu\big) = (-1)^{|\varphi|} y'_\beta \hat{c}_\mu.$$

Grâce au fait que $\Omega^1_{\mathfrak{g}}$ est un $\mathfrak{g}$-module libre, il s'ensuit que la prescription $\tilde{\varphi}(\mathbf{d}x'_\alpha) := c_\alpha$ et $\tilde{\varphi}(\mathbf{d}y''_\mu) := \hat{c}_\mu$ avec $\tilde{\varphi}(\mathbf{d}x''_\mu) := \varphi(\mathbf{d}x''_\mu)$ et $\tilde{\varphi}(\mathbf{d}y'_\beta) := \varphi(\mathbf{d}y'_\beta)$ définit un $\mathfrak{g}$-homomorphisme $\tilde{\varphi} : \Omega_{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ qui coïncide avec φ sur les générateurs de $\mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \Omega_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}$.
On montre ensuite, par récurrence, que tout morphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{\Lambda}^{\cdot}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \Omega_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}), \mathfrak{g}_{\mathcal{I}})$ peut se prolonger en un unique morphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{\Lambda}^{\cdot}_{\mathfrak{g}}\Omega_{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$.

Considérons maintenant un morphisme φ, k-cocycle dans le complexe $\big(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{\Lambda}^{\cdot}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \Omega_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}), \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}), \delta^{1,1}\big)$ avec $k \geq 2$. Relevons φ en un morphisme $\tilde{\varphi}$ de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{\Lambda}^{\cdot}_{\mathfrak{g}}\Omega_{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Il est clair que $\tilde{\varphi}$ est aussi un cocycle dans ce dernier complexe. D'après [46] (voir aussi [27]), le complexe $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{\Lambda}^{\cdot}_{\mathfrak{g}}\Omega_{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ est acyclique et donc $\tilde{\varphi}$ est un cobord dans ce complexe : $\tilde{\varphi} = \delta^{1,1}(\xi)$. Le morphisme ξ est complètement défini sur les générateurs de $\Omega_{\mathfrak{g}}$: $\mathbf{d}x_1, \ldots, \mathbf{d}x_n, \mathbf{d}y_1, \ldots, \mathbf{d}y_n$. Définissons le morphisme $\xi_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}}$ sur ces mêmes générateurs du module libre $(A_1, \ldots, A_k \in \{\mathbf{d}x_1, \ldots, \mathbf{d}x_n, \mathbf{d}y_1, \ldots, \mathbf{d}y_n\})$:

$$\begin{aligned}
&\xi_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}}(A_1 \mathbf{\Lambda} \cdots \mathbf{\Lambda} A_k) := p_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}}\left(\xi(A_1 \mathbf{\Lambda} \cdots \mathbf{\Lambda} A_k)\right) \text{ si} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \forall i, \ \big(A_i = \mathbf{d}y'_\alpha \text{ ou } A_i = \mathbf{d}x''_\mu\big) \\
&\xi_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}}(A_1 \mathbf{\Lambda} \cdots \mathbf{\Lambda} A_k) := \xi(A_1 \mathbf{\Lambda} \cdots \mathbf{\Lambda} A_k) \text{ sinon}
\end{aligned}$$

où $p_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}}$ (resp. $p_{\widetilde{\mathfrak{g}}}$) est la projection $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$ (resp. $\mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$) parallèlement à $\widetilde{\mathfrak{g}}$, considérée comme sous-algèbre abélienne de $(\mathfrak{g}[1], [\ ,\ ]_S)$ (resp. $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$). En utilisant les générateurs du sous-module $\mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \Omega^1_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}$, on voit que la restriction de $\xi_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}}$ à $\mathbf{\Lambda}^{\cdot}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \Omega_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}})$ prend ses valeurs dans $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$. On a, pour $A_1, ...A_k \in \{\mathbf{d}x_1, \ldots, \mathbf{d}x_n, \mathbf{d}y_1, \ldots, \mathbf{d}y_n\}$ la formule graduée de Chevalley-Eilenberg pour la codifférentielle $\delta^{1,1}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(A_0 \mathbf{\Lambda} \cdots \mathbf{\Lambda} A_k) &= (\delta^{1,1}\xi)(A_0 \mathbf{\Lambda} \cdots \mathbf{\Lambda} A_k) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \pm(-1)^i A_i.\big(\xi(A_0 \mathbf{\Lambda} \cdots \mathbf{\Lambda} A_{i-1} \mathbf{\Lambda} A_{i+1} \mathbf{\Lambda} \cdots \mathbf{\Lambda} A_k\big) \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

car les crochets de Lie $[A_i, A_j]$ s'annulent. Montrons que cette équation est encore vraie si l'on remplace ξ par $\xi_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}}$:

1. Si au moins deux A_i sont égaux à un $\mathbf{d}y''_\mu$ ou à un $\mathbf{d}x'_\alpha$, ceci est immédiat par définition de $\xi_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}}$.

2. Si tous les A_i sont égaux à un $\mathbf{d}y'_\alpha$ ou à un $\mathbf{d}x''_\mu$, ceci est encore vrai car $\tilde{\varphi}(A_1 \boldsymbol{\wedge} \cdots \boldsymbol{\wedge} A_n) = \varphi(A_1 \boldsymbol{\wedge} \cdots \boldsymbol{\wedge} A_n)$ est dans $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$, le crochet $[y'_\alpha, \widetilde{\mathfrak{g}}] \subset \widetilde{\mathfrak{g}}$ et $[x''_\mu, \widetilde{\mathfrak{g}}] \subset \widetilde{\mathfrak{g}}$.

3. Si maintenant un seul des A_i, notons le B, est égal à un $\mathbf{d}y''_\mu$ ou à un $\mathbf{d}x'_\alpha$, on peut encore une fois remplacer ξ par $\xi_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}}$ car $B.\big(\xi(\cdots)\big) = B.\big(\xi_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}}(\cdots)\big)$ car $B \in \mathbf{d}\widetilde{\mathfrak{g}}$ et $\widetilde{\mathfrak{g}}$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{g}$ par rapport à $[\ ,\ ]_S$, voir la proposition 2.7.

En conclusion, on a trouvé un $\xi_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}}$ qui se restreint bien en un morphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\boldsymbol{\Lambda}^{\cdot}_{\mathfrak{g}}\big(\mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \Omega_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}\big), \mathfrak{g}_{\mathcal{I}})$ tel que $\varphi = \delta^{1,1}(\xi_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}})$. □

Dans le cas où $X = \mathbb{R}^1$ et $C = \mathbb{R}^0$, un calcul simple nous donne :

Proposition 4.2 *La cohomologie du complexe* $\big(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\boldsymbol{\Lambda}^{\cdot}_{\mathfrak{g}}\big(\mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \Omega_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}\big),\ \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}), \delta^{1,1}\big)$ *est concentré en degré* 0.

A Appendice

Dans ce paragraphe, on rappellera –sans utiliser les opérades– quelques notions autour des structures A_∞, C_∞, L_∞ et G_∞ –qui se trouvent dans la littérature de façon dispersée– pour fixer nos notations et conventions de signe, voir également [37], [33], [2], [34] et pour un cadre opéradique [27] et [38]. On fixe un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique 0.

A.1 Quelques cogèbres colibres pour des espaces gradués

On rappelle d'abord la *catégorie des* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels gradués* : les objets sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels gradués $\mathfrak{h} = \oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathfrak{h}^k$ (où 'gradué' veut toujours dire $\mathbb{Z}$-gradué). On écrira $|x| \in \mathbb{Z}$ pour le degré d'un élément homogène $x \in \mathfrak{h}$. Par la suite, on n'utilisera que des éléments homogènes si rien d'autre n'est dit. Pour un autre $\mathbb{K}$-espace gradué $\hat{\mathfrak{h}} = \oplus_{k\in\mathbb{Z}}\hat{\mathfrak{h}}^k$ et un entier j on note $\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \hat{\mathfrak{h}})^j$ l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires $\mathfrak{h} \to \hat{\mathfrak{h}}$ de degré j (i.e $f(\mathfrak{h}^k) \subset \hat{\mathfrak{h}}^{k+l}$). L'espace $\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \hat{\mathfrak{h}})$ est défini par l'espace gradué $\oplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}, \hat{\mathfrak{h}})^j$. De plus, le produit tensoriel $\mathfrak{h} \otimes \hat{\mathfrak{h}}$ est gradué par $\big(\mathfrak{h} \otimes \hat{\mathfrak{h}}\big)^k = \oplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathfrak{h}^j \otimes \hat{\mathfrak{h}}^{k-j}$, voir e.g. [37, p.175]. Le produit tensoriel de deux morphismes $\phi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}'$ et $\psi : \hat{\mathfrak{h}} \to \hat{\mathfrak{h}}'$ est défini en appliquant la *règle de signe de Koszul*

$$\big(\phi \otimes \psi\big)(a \otimes b) = (-1)^{|\psi|\ |a|}\phi(a) \otimes \psi(b) \tag{A.1}$$

pour $a \in \mathfrak{h}^{|a|}$ et ψ de degré $|\psi|$, voir e.g. [37, p.176]. On rappelle également la *transposition graduée* $\tau : \mathfrak{h} \otimes \hat{\mathfrak{h}} \to \hat{\mathfrak{h}} \otimes \mathfrak{h}$ par $\tau(x \otimes y) := (-1)^{|x|\ |y|}y \otimes x$. Les deux règles précédentes détermineront tous les signes qui apparaîtront.

Pour un entier j, l'espace gradué *décalé* $\mathfrak{h}[j]$ et défini par $\mathfrak{h}[j]^k := \mathfrak{h}^{k+j}$. , L'application identique $\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ définit une application $s^n : \mathfrak{h}[j] \to \mathfrak{h}[j-n]$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ qui est de degré n car $s^n(\mathfrak{h}[j]^k) = \mathfrak{h}^{j+k} = \mathfrak{h}[j-n]^{k+n}$. On regarde s^n comme la $n$ème itération de la *suspension* $s := s^1 : \mathfrak{h}[j] \to \mathfrak{h}[j-1]$. La suspension sera 'visible' pour des *applications multilinéaires décalées* : soit $\phi : \mathfrak{h}^{\otimes k} \to \hat{\mathfrak{h}}^{\otimes l}$ une application linéaire de degré i. On définit sa décalée $\phi[j] : \mathfrak{h}[j]^{\otimes k} \to \hat{\mathfrak{h}}[j]^{\otimes l}$ par $\phi[j] := (s^{\otimes l})^{-j} \circ \phi \circ (s^{\otimes k})^j$. Son degré est égal à $j(k-l)+i$ et on a évidemment $(\phi[j])[j'] = \phi[j+j']$. On remarque que $(s^{\otimes k})^j = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}\frac{j(j-1)}{2}}(s^j)^{\otimes k}$. Pour calculer la décalée, on écrit d'abord pour $\xi := x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \in \mathfrak{h}^{\otimes k}$ la valeur $\phi(\xi)$ avec la convention de Sweedler comme $\sum \phi_{(1)}(\xi) \otimes \cdots \otimes \phi_{(l)}(\xi)$

avec $\phi_{(i)}(\xi) \in \hat{\mathfrak{h}}$. D'après la règle de signe (A.1), la valeur de la décalée $\phi[j]$ sur $\eta := y_1 \otimes \cdots \otimes y_k \in \mathfrak{h}[j]^{\otimes k}$ se calcule de la manière suivante avec $\tilde{\eta} := s^j(y_1) \otimes \cdots \otimes s^j(y_k)$:

$$\begin{aligned}
&\phi[j](y_1 \otimes \cdots \otimes y_k) = \\
&\quad (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}\frac{j(j-1)}{2}+\frac{l(l-1)}{2}\frac{-j(-j-1)}{2}}(-1)^{j\left((k-1)|y_1|+(k-2)|y_2|+\cdots+(k-(k-1))|y_{k-1}|\right)} \\
&\qquad \sum(-1)^{j\left((l-1)|\phi_{(1)}(\tilde{\eta})|+(l-2)|\phi_{(2)}(\tilde{\eta})|+\cdots+(l-(l-1))|\phi_{(l-1)}(\tilde{\eta})|\right)} \\
&\qquad\quad \phi_{(1)}(y_1 \otimes \cdots \otimes y_k) \otimes \cdots \otimes \phi_{(l)}(y_1 \otimes \cdots \otimes y_k).
\end{aligned} \tag{A.2}$$

L'algèbre libre sur $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}^{\otimes}_{\mathrm{alg}} := \oplus_{k\in\mathbb{N}}\mathfrak{h}^{\otimes k}$, est une $\mathbb{K}$-algèbre associative graduée avec élément neutre 1, voir e.g. [37, p.179]. Pour éviter des confusions, on n'utilise pas le symbole $\otimes$ pour la multiplication $\mu = \mu_{\mathfrak{h}^{\otimes}_{\mathrm{alg}}}$ dans l'algèbre libre. De plus, c'est une bigèbre graduée : soit $\mathfrak{h}^{\otimes +} := \oplus_{k>0}\mathfrak{h}^{\otimes k}$ l'idéal d'augmentation. La co-unité $\epsilon = \epsilon_{\mathfrak{h}^{\otimes}} : \mathfrak{h}^{\otimes}_{\mathrm{alg}} \to \mathbb{K}$ est définie par la condition que $Ker\epsilon := \mathfrak{h}^{\otimes +}$ et $\epsilon(1) := 1$; et la *comultiplication shuffle* graduée Δ_{sh} est l'homomorphisme d'algèbres associatives $\mathfrak{h}^{\otimes}_{\mathrm{alg}} \to \mathfrak{h}^{\otimes}_{\mathrm{alg}} \otimes \mathfrak{h}^{\otimes}_{\mathrm{alg}}$ induit par sa valeur $\Delta_{sh}(x) := x \otimes 1 + 1 \otimes x$ sur les générateurs $x \in \mathfrak{h}$. Puisque la multiplication $\mu^{[2]}$ sur $\mathfrak{h}^{\otimes}_{\mathrm{alg}} \otimes \mathfrak{h}^{\otimes}_{\mathrm{alg}}$ est donnée par $(\mu \otimes \mu) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id})$ avec la transposition graduée, il y a donc des signes dans les formules pour Δ_{sh}, par exemple $\Delta_{sh}(xy) = xy \otimes 1 + x \otimes y + (-1)^{|x|\ |y|} y \otimes x + 1 \otimes xy$ pour $x \in \mathfrak{h}^{|x|}$ et $y \in \mathfrak{h}^{|y|}$. Cette comultiplication est cocommutative graduée (i.e. $\tau\Delta_{sh} = \Delta_{sh}$) et de degré 0.
On peut dualiser cette structure de bigèbre graduée pour obtenir sur l'espace gradué $\mathfrak{h}^{\otimes}_{\mathrm{alg}}$ une deuxième structure de bigèbre graduée, plus importante pour nos fins, donnée par la comultiplication (non cocommutative graduée) de *déconcaténation*, $\Delta = \Delta_{\mathfrak{h}^{\otimes}}$ (qui dualise la multiplication libre et est définie par $\Delta(x_1 \cdots x_k) = 1 \otimes x_1 \cdots x_k + \sum_{r=2}^{k} x_1 \cdots x_{r-1} \otimes x_r \cdots x_k + x_1 \cdots x_k \otimes 1$) et la *multiplication shuffle* μ_{sh} graduée commutative, parfois écrite $\bullet$, (qui dualise la comultiplication Δ_{sh}). Pour une formule explicite de μ_{sh}, voir (A.8). Les deux opérations Δ et μ_{sh} sont de degré 0. Ici 1 reste l'élément neutre et ϵ la co-unité. On note cette bigèbre graduée par $\mathfrak{h}^{\otimes}$ et la projection canonique sur $\mathfrak{h}^{\otimes 1} = \mathfrak{h}$ par $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}}$. Encore une fois $\mathfrak{h}^{\otimes}$ est également une bigèbre bigraduée.
En général, une cogèbre graduée $(C, \epsilon_C, \Delta_C)$ est dite *augmentée* lorsqu'il existe un unique élément de genre groupe, noté 1, alors $C = \mathbb{K}1 \oplus \mathrm{Ker}\epsilon_C$. Le sous-espace $C^+ := \mathrm{Ker}\epsilon_C$ est isomorphe à la cogèbre graduée quotient $C/\mathbb{K}1$ sans co-unité ($\mathbb{K}1$ est une sous-cogèbre, donc un co-idéal de $\mathfrak{h}^{\otimes}$). Une cogèbre graduée sans co-unité est dite *nilpotente* (voir [38, 166-168]) lorsque pour tout élément x il existe un entier positif N tel que la Nème itération de la comultipliciation sur x s'annule. Les cogèbres graduées augmentées telles que C^+ (vu comme cogèbre quotient) est nilpotente forment une sous-catégorie $\mathcal{C}_{AN}$ de la catégorie des cogèbres graduées. La catégorie $\mathcal{C}_{AN}$ est fermée pour les produits tensoriels et contient $\mathfrak{h}^{\otimes}$ et toutes les cogèbres considérées dans cet appendice. La cogèbre $\mathfrak{h}^{\otimes}$ est *colibre* dans $\mathcal{C}_{AN}$, i.e. pour toute cogèbre C dans $\mathcal{C}_{AN}$ et toute application linéaire $\phi : C \to \mathfrak{h}$ de degré 0 s'annulant sur 1 il existe un unique morphisme de cogèbres graduées $\overline{\phi} : C \to \mathfrak{h}^{\otimes}$ (i.e. $\overline{\phi} \otimes \overline{\phi} \circ \Delta_C = \Delta \circ \overline{\phi}$) tel que $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} \circ \overline{\phi} = \phi$:

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{h}^{\otimes} & \stackrel{\overline{\phi}}{\longleftarrow} & C \\
 & \stackrel{\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}}}{\searrow} \quad \stackrel{\phi}{\swarrow} & \\
 & \mathfrak{h} &
\end{array} \tag{A.3}$$

On dit que $\overline{\phi}$ est co-induit par ϕ. Evidemment, deux morphismes de cogèbres $\Phi, \Psi : \mathfrak{h}^{\otimes} \leftarrow C$ coïncident si et seulement si leurs composantes $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} \circ \Phi$ et $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} \circ \Psi$ coïncident. On calcule par exemple que la multiplication μ_{sh} est co-induite par l'application $\mathfrak{h}^{\otimes} \otimes \mathfrak{h}^{\otimes} \to \mathfrak{h}$ donnée par $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} \otimes \epsilon + \epsilon \otimes \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}}$.
L'algèbre colibre dans la catégorie de toutes les cogèbres coassociatives graduées *n'est pas* donnée

par $\mathfrak{h}^{\otimes}$, mais par un espace 'plus grand' entre $\mathfrak{h}^{\otimes}$ et son complété par rapport à la filtration donnée par degré tensoriel, voir [45, pp.124-135] et [38, 166-168].
Pour deux applications linéaires ψ_1, ψ_2 d'une cogèbre coassociative graduée (C, Δ_C) dans une algèbre associative graduée (A, μ_A) on rappelle la *convolution* $\psi_1 \star \psi_2$ *de* ψ_1 *et de* ψ_2 *par rapport à* μ_A *et* Δ_C donnée par $\psi_1 \star \psi_2 := \mu_A \circ (\psi_1 \otimes \psi_2) \circ \Delta_C$, qui est une multiplication associative graduée dans $\mathrm{Hom}(C, A)$. Le morphisme de cogèbres $\overline{\phi}$ co-induit par $\phi : C^+ \to \mathfrak{h}$ se calcule comme série géométrique $\overline{\phi} = \sum_{r=0}^{\infty} \phi^{\star r}$ avec $\phi^{\star 0} := 1\epsilon_C$ à l'aide de la convolution $\star$ par rapport à la multiplication libre μ et Δ_C.
Soit $d : C \to \mathfrak{h}$ une application linéaire de degré $j \in \mathbb{Z}$. On peut montrer qu'il existe une unique *codérivation graduée de degré j le long de* $\overline{\phi}$, $\overline{d} : C \to \mathfrak{h}^{\otimes}$, (i.e. $\Delta \circ \overline{d} = (\overline{d} \otimes \overline{\phi} + \overline{\phi} \otimes \overline{d}) \circ \Delta_C)$ avec $\overline{d}(1) = 0$ et $\mathrm{pr}_1 \circ \overline{d} = d$. Cette codérivation $\overline{d}$, dite co-induite par d, se calcule comme $\overline{\phi} \star d \star \overline{\phi}$. En particulier, pour $d_1, d_2 : \mathfrak{h}^{\otimes} \to \mathfrak{h}$ et $\overline{\phi} = \mathrm{id}_{\mathfrak{h}^{\otimes}}$ on note

$$d_1 \circ_G d_2 := d_1 \circ \overline{d_2} = \sum_{i,j=0}^{\infty} d_1 \circ \left(\mathrm{id}_{\mathfrak{h}}^{\otimes i} \otimes d_2 \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{h}}^{\otimes j}\right) \ : \ \mathfrak{h}^{\otimes} \to \mathfrak{h} \tag{A.4}$$

la *multiplication de Gerstenhaber* graduée. Il s'en suit que le *commutateur gradué* $[\overline{d_1}, \overline{d_2}] = \overline{d_1} \circ \overline{d_2} - (-1)^{|d_1|\ |d_2|}\overline{d_2} \circ \overline{d_1}$ des deux codérivations le long de $\mathrm{id}_{\mathfrak{h}^{\otimes}}$ est une codérivation de $\mathfrak{h}^{\otimes}$ le long de $\mathrm{id}_{\mathfrak{h}^{\otimes}}$, alors $[\overline{d_1}, \overline{d_2}]$ est co-induit par sa composante $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}}[\overline{d_1}, \overline{d_2}] = d_1 \circ_G d_2 - (-1)^{|d_1|\ |d_2|} d_2 \circ_G d_1 =: [d_1, d_2]_G$, le *crochet de Gerstenhaber gradué* de d_1 et d_2. On en déduit l'identité de Gerstenhaber suivante

$$(d \circ_G d_1) \circ_G d_2 - (-1)^{|d_1|\ |d_2|}(d \circ_G d_2) \circ_G d_1 = d \circ_G [d_1, d_2]_G. \tag{A.5}$$

Ainsi $\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}^{\otimes}, \mathfrak{h})$ muni du crochet de Gerstenhaber est une algèbre de Lie graduée. Les structures $\circ_G$ et $[\ ,\ ]_G$ étaient définies dans [23] pour la situation $\mathfrak{h} = V[1]$ où l'espace gradué était $V = V^0$.
Soit $m : \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ une multiplication associative graduée (de degré 0). Alors l'application décalée $d := m[1] : \mathfrak{h}[1] \otimes \mathfrak{h}[1] \to \mathfrak{h}[1]$ est de degré 1, et l'associativité de m est équivalente à $d \circ_G d = 0$.
L'application $\mathsf{b} : \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}[1]^{\otimes +}, \mathfrak{h}[1]) \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}[1]^{\otimes +}, \mathfrak{h}[1])$ définie par $\mathsf{b}\phi := [\phi, d]_G$ coïncide avec *l'opérateur cobord de Hochschild gradué*. Les formules (2.2) et (2.3) de la première partie sont des cas particuliers $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^0 = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. On observe que $m[1] = -m$ dans ce cas. Alternativement, on peut définir le cobord de Hochschild directement sur $\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}^{\otimes +}, \mathfrak{h})$ sans décalage par la formule équivalente et plus simple $\mathsf{b}\phi = \big[\phi[1], m[1]\big]_G[-1]$, voir par exemple l'équation (2.27).

La *bigèbre symétrique graduée* sur $\mathfrak{h}$, $\mathsf{S}\mathfrak{h} = \oplus_{r \in \mathbb{N}} \mathsf{S}^r \mathfrak{h}$, est définie par le quotient de l'algèbre libre $\mathfrak{h}^{\otimes}_{\mathrm{alg}}$ modulo l'idéal bilatère gradué $I_+(\mathfrak{h})$ engendré par tous les éléments de la forme $xy - (-1)^{|x|\ |y|} yx$ quels que soient $x \in \mathfrak{h}^{|x|}$ et $y \in \mathfrak{h}^{|y|}$. Le quotient $\mathsf{S}\mathfrak{h}$ est une algèbre associative commutative graduée. De plus, la première comultiplication Δ_{sh} passe au quotient et définit sur $\mathsf{S}\mathfrak{h}$ la structure d'une comultiplication cocommutative graduée, notée également Δ_{sh}. L'espace $\mathsf{S}\mathfrak{h}$ est donc une bigèbre commutative cocommutative graduée . Il est connu que $\mathsf{S}\mathfrak{h}$ est *l'algèbre commutative graduée libre engendrée par* $\mathfrak{h}$.

Pour un entier n, une permutation σ du groupe symétrique S_n et $\xi = x_1 \cdots x_n \in \mathfrak{h}^{\otimes n}$, on note $\xi^\sigma := x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$ l'action à droite usuelle de S_n sur $\mathfrak{h}^{\otimes n}$. On définit la *signature graduée de* σ *par rapport à* ξ par

$$\begin{aligned} e(x_1 \cdots x_n, \sigma) &:= \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(i) + (-1)^{|x_{\sigma(i)}|\ |x_{\sigma(j)}|}\ \sigma(j)}{i + (-1)^{|x_i|\ |x_j|}\ j} \\ &= \prod_{i<j \text{ et } \sigma(i)>\sigma(j)} (-1)^{|x_{\sigma(i)}|\ |x_{\sigma(j)}|} \end{aligned} \tag{A.6}$$

et on en déduit l'action à droite graduée $\xi^{\cdot\sigma} := e(\xi,\sigma)\xi^\sigma$ de S_n sur $\mathfrak{h}^{\otimes n}$ car $e(\xi,\sigma\sigma') = e(\xi,\sigma)e(\xi^\sigma,\sigma')$. A l'aide de cette action, on peut donner des formules plus explicites de la multiplication shuffle et de la comultiplication shuffle : on note $Sh(k, n-k)$ l'ensemble des *permutations de battage ou shuffle*, i.e. pour lesquelles $\sigma(1) < \cdots < \sigma(k)$ et $\sigma(k+1) < \ldots < \sigma(n)$:

$$\Delta_{sh}(x_1\cdots x_n) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\sigma\in Sh(k,n-k)} e(x_1\cdots x_n,\sigma)x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(k)}\otimes x_{\sigma(k+1)}\cdots x_{\sigma(n)}, \tag{A.7}$$

et

$$(x_1\cdots x_k)\bullet(x_{k+1}\cdots x_n) = \sum_{\sigma^{-1}\in Sh(k,n-k)} e(x_1\cdots x_n,\sigma)x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}. \tag{A.8}$$

Pour tout entier positif n soit $\mathcal{S}^{(n)} : \mathfrak{h}^{\otimes n} \to \mathfrak{h}^{\otimes n}$ la symétrisation $\xi \mapsto \sum_{\sigma\in S_n} e(\xi,\sigma)\xi^\sigma$. On définit $\mathcal{S} : \mathfrak{h}^{\otimes}_{\mathrm{alg}} \to \mathfrak{h}^{\otimes}$ par $\mathcal{S} := \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{S}^{(n)}$. On voit que $\mathcal{S}$ est un morphisme de la bigèbre $\mathfrak{h}^{\otimes}_{\mathrm{alg}}$ dans la bigèbre (duale) $\mathfrak{h}^{\otimes}$ et l'image de $\mathcal{S}$ est la sous-bigèbre commutative et cocommutative $\mathsf{S}\mathfrak{h}$. L'application $\mathcal{S}$ est co-induite par l'application de la cogèbre cocommutative graduée $(\mathfrak{h}^{\otimes}_{\mathrm{alg}}, \Delta_{\mathrm{sh}})$ dans $\mathfrak{h}$ donnée par $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}}$. Encore une fois, la cogèbre cocommutative graduée $\mathsf{S}\mathfrak{h}$ est colibre dans la catégorie $\mathcal{CS}_{AN}$ des cogèbres cocommutatives augmentées graduées à C^+ nilpotent, et la co-induction des morphismes et codérivations dans le sens du diagramme (A.3) se fait comme pour $\mathfrak{h}^{\otimes}$, où les applications co-induites pour la cogèbre $\mathfrak{h}^{\otimes}$, $\overline{\phi}$ et $\overline{d}$, prennent leurs valeurs automatiquement dans la sous-cogèbre $\mathsf{S}\mathfrak{h}$. On peut également utiliser la multiplication shuffle μ_{sh} de $\mathsf{S}\mathfrak{h}$ au lieu de μ de $\mathfrak{h}^{\otimes}$ pour une deuxième convolution $\tilde{\star}$ pour obtenir $\overline{\phi} = e^{\tilde{\star}\phi}$ au lieu de la série géométrique, et $\overline{d} = e^{\tilde{\star}\phi}\tilde{\star}d$ au lieu de $\overline{\phi}\star d\star\overline{\phi}$. Exactement de la même façon qu'en (A.4) pour $\mathfrak{h}^{\otimes}$ on définit la *multiplication de Nijenhuis-Richardson* $\circ_{NR}$ sur l'espace $\mathrm{Hom}(\mathsf{S}\mathfrak{h},\mathfrak{h})$ qui satisfait la même identité (A.5) avec $\circ_G$ remplacé par $\circ_{NR}$. Explicitement, pour $d_1 \in \mathrm{Hom}(\mathsf{S}^r\mathfrak{h},\mathfrak{h})$ et $d_2 \in \mathrm{Hom}(\mathsf{S}^t\mathfrak{h},\mathfrak{h})$:

$$\begin{aligned}(d_1\circ_{NR} d_2)&(x_1\bullet\cdots\bullet x_{r+t-1}) = \\ &\sum_{1\le i_1<\cdots<i_t\le r+t-1}\prod_{p=1}^{t}(-1)^{|x_{i_p}|\left(|x_1|+\cdots+\widehat{|x_{i_1}|}+\cdots+\widehat{|x_{i_{p-1}}|}+\cdots+|x_{i_p-1}|\right)} \\ &\qquad d_1\big(d_2(x_{i_1}\bullet\cdots\bullet x_{i_t})\bullet x_1\bullet\cdots\widehat{x_{i_1}}\cdots\widehat{x_{i_t}}\cdots\bullet x_{r+t-1}\big)\end{aligned} \tag{A.9}$$

quels que soient $x_1,\cdots,x_{r+t-1}\in\mathfrak{h}$ et $\hat{}$ désigne l'omission de l'argument. L'espace $\mathrm{Hom}(\mathsf{S}\mathfrak{h},\mathfrak{h})$ est une algèbre de Lie graduée par le crochet de Nijenhuis-Richardson $[d_1,d_2]_{NR} := d_1\circ_{NR} d_2 - (-1)^{|d_1|\,|d_2|}d_2\circ_{NR} d_1$. Les structures $\circ_{NR}$ et $[\ ,\ ]_{NR}$ étaient définies dans [42] pour la situation $\mathfrak{h} = V[1]$ où l'espace gradué était $V = V^0$.

Si l'on regarde dans $\mathfrak{h}^{\otimes}_{\mathrm{alg}}$ l'idéal bilatère gradué $I_-(\mathfrak{h})$ engendré par tous les éléments de la forme $xy + (-1)^{|x|\,|y|}yx$ pour $x\in\mathfrak{h}^{|x|}$ et $y\in\mathfrak{h}^{|y|}$, on obtient comme quotient *l'algèbre de Grassmann* $\mathbf{\Lambda}\mathfrak{h} := \oplus_{r\in\mathbb{N}}\mathbf{\Lambda}^r\mathfrak{h}$: ceci est une algèbre associative $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$-graduée par le degré usuel et le degré tensoriel qui est donc bigraduée commutative (et non pas graduée commutative). On note que $I_-(\mathfrak{h})$ *n'est pas un coidéal* de $\mathfrak{h}^{\otimes}_{\mathrm{alg}}$, donc $\mathbf{\Lambda}\mathfrak{h}$ *n'hérite pas automatiquement la structure d'une bigèbre graduée* (en effet, elle est une bigèbre bigraduée héritée par la comultiplication shuffle $\Delta'_{\mathrm{sh}} \neq \Delta_{\mathrm{sh}}$ sur $\mathfrak{h}^{\otimes}_{\mathrm{alg}}$ qu'on obtient par le produit tensoriel $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$-gradué). Mais $\mathbf{\Lambda}\mathfrak{h}$ peut être liée à la bigèbre symétrique : soit j un entier, $\tau_{\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{h}}$ la transposition dans $\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{h}$ et $\tau_{\mathfrak{h}[j]\otimes\mathfrak{h}[j]}$ la transposition dans $\mathfrak{h}[j]\otimes\mathfrak{h}[j]$. Grâce à l'identité

$$(\tau_{\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{h}})[j] = (-1)^j\tau_{\mathfrak{h}[j]\otimes\mathfrak{h}[j]} \tag{A.10}$$

ou $s^j\otimes s^j\circ\tau_{\mathfrak{h}[j]\otimes\mathfrak{h}[j]} = (-1)^j\tau_{\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{h}}\circ s^j\otimes s^j$, on voit sans peine que si j est impair, la bijection linéaire $\sum_{r=0}^{\infty}(s^{\otimes r})^j : \mathfrak{h}[j]^{\otimes}_{\mathrm{alg}} \to \mathfrak{h}^{\otimes}_{\mathrm{alg}}$ envoie l'idéal $I_+(\mathfrak{h}[j])$ sur l'idéal $I_-(\mathfrak{h})$, et l'on obtient l'isomorphisme linéaire (pas d'algèbres associatives)

$$\forall\, r \in \mathbb{N} : \quad S^r\big(\mathfrak{h}[j]\big) \cong \big(\mathbf{\Lambda}^r \mathfrak{h}\big)[jr] \quad \text{pour } j \text{ impair}$$

dont on déduit la formule suivante :

$$s^{\otimes r}\big((s^{-1}x_1) \bullet \cdots \bullet (s^{-1}x_r)\big) \;=\; (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}(-1)^{(r-1)|x_1|+(r-2)|x_2|+\cdots+|x_{r-1}|}\; x_1 \mathbf{\Lambda} \cdots \mathbf{\Lambda} x_r$$

quels que soient $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{h}$. Pour le cas particulier $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^0 = V$, on constate que l'algèbre graduée $\mathsf{S}\big(V[-1]\big)$ est égale à l'algèbre graduée $\mathbf{\Lambda}V$ (où la dernière est munie de son degré usuel). En général, une application linéaire $\phi : \mathfrak{h}^{\otimes k} \to \hat{\mathfrak{h}}$ est dite *antisymétrique* lorsque $\phi \circ (\mathrm{id}^{\otimes i} \otimes \tau \circ \otimes \mathrm{id}^{\otimes(k-2-i)}) = -\phi$ quel que soit $0 \leq i \leq k-2$. D'après ce qui précède, sa décalée $\phi[j]$ est symétrique pour j impair :

$$\phi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{\Lambda}^r \mathfrak{h}, \hat{\mathfrak{h}})^k \quad \Leftrightarrow \quad \phi[j] \in \mathrm{Hom}(\mathsf{S}^r(\mathfrak{h}[j]), \hat{\mathfrak{h}}[j])^{k+j(r-1)} \text{ pour } j \text{ impair.}$$

En particulier, soit $(\mathfrak{l}, [\ ,\ ])$ une *algèbre de Lie graduée*, i.e. pour le crochet $[\ ,\ ] \in \mathrm{Hom}(\mathbf{\Lambda}^2 \mathfrak{l}, \mathfrak{l})$ de degré 0 on a *l'identité de Jacobi graduée* $[\ ,\ ]([\ ,\ ]\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}^{\otimes 3} + \tau_{12}\tau_{23} + \tau_{23}\tau_{12}) = 0$ avec $\tau_{12} := \tau \otimes \mathrm{id}$ et $\tau_{23} := \mathrm{id} \otimes \tau$. Sur l'espace décalé $\mathfrak{l}[j]$ (j impair), le crochet décalé $[\ ,\ ][j]$ est de degré j, se trouve dans $\mathrm{Hom}(\mathsf{S}^2(\mathfrak{l}[j], \mathfrak{l}[j]))$, est donc symétrique gradué et satisfait $[\ ,\ ][j] \circ ([\ ,\ ][j] \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id}^{\otimes 3} + \tau'_{12}\tau'_{23} + \tau'_{23}\tau'_{12})$ avec $\tau' := \tau_{\mathfrak{l}[j]\otimes \mathfrak{l}[j]}$. De plus, la décalée $d = [\ ,\ ][1]$ du crochet de Lie satisfait $d \circ_{NR} d = 0$ et définit par $\phi \mapsto [\phi, d]_{NR}$ *l'opérateur cobord de Chevalley-Eilenberg* sur $\mathrm{Hom}(\mathsf{S}^+(\mathfrak{l}[1]), \mathfrak{l}[1])$. Comme dans le cas d'une algèbre associative, on peut alternativement définir le cobord de Chevalley-Eilenberg directement sur $\mathrm{Hom}(\mathbf{\Lambda}\mathfrak{l}, \mathfrak{l})$ par la formule isomorphe $\psi \mapsto \big[\psi[1], [\ ,\ ][1]\big]_{NR}[-1]$.

Une *cogèbre de Lie graduée* $(\mathfrak{c}, \delta_{\mathfrak{c}})$ est un espace gradué muni d'une application linéaire $\delta_{\mathfrak{c}} : \mathfrak{c} \to \mathfrak{c} \otimes \mathfrak{c}$ de degré 0 (le *cocrochet*) telle que $\delta_{\mathfrak{c}}$ est graduée antisymétrique (i.e. $\tau\delta_{\mathfrak{c}} = -\delta_{\mathfrak{c}}$) et satisfait à l'identité de Jacobi graduée (i.e. $(\mathrm{id}^{\otimes 3} + \tau_{12}\tau_{23} + \tau_{23}\tau_{12})(\delta_{\mathfrak{c}} \otimes \mathrm{id})\ \delta_{\mathfrak{c}} = 0$ avec $\tau_{12} := \tau \otimes \mathrm{id}$ et $\tau_{23} := \mathrm{id} \otimes \tau$), voir par exemple [39] et [40]. On obtient un exemple en considérant la cogèbre colibre $\mathfrak{h}^{\otimes}$ sur l'espace gradué $\mathfrak{h}$: l'idéal d'augmentation $\mathfrak{h}^{\otimes +} = \oplus_{k\geq 1}\mathfrak{h}^{\otimes k}$ est également un idéal bilatère de la multiplication shuffle, ainsi que son carré $\mathfrak{h}^{\otimes +} \bullet \mathfrak{h}^{\otimes +} \subset \mathfrak{h}^{\otimes +}$. L'espace gradué

$$\underline{\mathfrak{h}^{\otimes}} := \bigoplus_{k \geq 1} \underline{\mathfrak{h}^{\otimes k}} := \mathfrak{h}^{\otimes +}/(\mathfrak{h}^{\otimes +} \bullet \mathfrak{h}^{\otimes +})$$

(qui est appelé l'espace des *éléments indécomposables* de la bigèbre $\mathfrak{h}^{\otimes}$) est muni de la structure d'une cogèbre de Lie graduée $\delta : \underline{\mathfrak{h}^{\otimes}} \to \underline{\mathfrak{h}^{\otimes}} \otimes \underline{\mathfrak{h}^{\otimes}}$ provenant de l'antisymétrisation graduée $\Delta - \tau\Delta$ de la comultiplication Δ qui passe au quotient. En général, une cogèbre de Lie graduée $(\mathfrak{c}, \delta_{\mathfrak{c}})$ est dite *nilpotente* lorsque pour tout $x \in \mathfrak{c}$ il existe un entier N tel que tous les Nèmes itérés de $\delta_{\mathfrak{c}}$ s'annulent sur x. Dans la catégorie $\mathcal{CL}_N$ de ces cogèbres de Lie, l'espace $(\underline{\mathfrak{h}^{\otimes}}, \delta)$ est une cogèbre de Lie graduée *colibre* dans le sens du diagramme A.3, en remplaçant cogèbres par cogèbres de Lie. De la même façon, on peut co-induire des codérivations des cogèbres de Lie de degré j le long d'un morphisme de cogèbres de Lie graduées où l'on remplace Δ par δ dans les définitions. Les applications linéaires d de $\mathrm{Hom}(\underline{\mathfrak{h}^{\otimes}}, \mathfrak{h})$ s'identifient avec les applications linéaires d' de $\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}^{\otimes}, \mathfrak{h})$ s'annulant sur $\mathfrak{h}^{\otimes +} \bullet \mathfrak{h}^{\otimes +}$ et sont connues comme des *cochaînes de Harrison graduées*. On montre que la codérivation graduée $\overline{d'}$ est également une dérivation graduée de la multiplication shuffle $\bullet$, donc la multiplication de Gerstenhaber $d'_1 \circ_G d'_2$ s'annule toujours sur $\mathfrak{h}^{\otimes +} \bullet \mathfrak{h}^{\otimes +}$, ce qui prouve que $\circ_G$ préserve le sous-espace et définit sur $\mathrm{Hom}(\underline{\mathfrak{h}^{\otimes}}, \mathfrak{h})$ une multiplication $\circ_H$ satisfaisant (A.5) avec $\circ_G$ remplacé par $\circ_H$. L'espace $\mathrm{Hom}(\underline{\mathfrak{h}^{\otimes}}, \mathfrak{h})$ muni du crochet $[\ ,\ ]_H$ (l'antisymétrisé gradué de $\circ_H$) est donc une algèbre de Lie graduée. Soit $m : \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ une multiplication associative commutative graduée (de degré 0) sur $\mathfrak{h}$. Alors sa décalée $m[1]$ s'annule sur $\mathfrak{h}[1] \bullet \mathfrak{h}[1]$, et l'application induite

$d \in \mathrm{Hom}(\underline{\mathfrak{h}[1]^{\otimes 2}}, \mathfrak{h}[1])$ satisfait $d \circ_H d = 0$. La codérivation ∂_{Har} de $\underline{\mathfrak{h}[1]^{\otimes}}$ co-induite par d définit un complexe sur $\underline{\mathfrak{h}[1]^{\otimes}}$ analogue à ∂_{H}. De plus, la formule $\mathsf{b}_{\mathrm{Har}} : \phi \mapsto [\phi, d]_H$ définit le *cobord de Harrison gradué* sur l'espace $\mathrm{Hom}(\underline{\mathfrak{h}[1]^{\otimes}}, \mathfrak{h}[1])$ des cochaînes de Harrison. On peut donc regarder le cocomplexe de Harrison comme un sous-cocomplexe du cocomplexe de Hochschild.

La structure d'une *algèbre de Gerstenhaber* (voir aussi [28, p.104] sur un espace vectoriel gradué $\mathfrak{g}$ est la donnée de la structure d'une algèbre associative commutative graduée $m_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ avec élément neutre 1 et de la structure $[\ ,\ ]$ d'une algèbre de Lie graduée sur l'espace décalé $\mathfrak{g}[1]$ satisfaisant la *règle de Leibniz graduée* suivante : soit $\lambda_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ le crochet décalé $\lambda_{\mathfrak{g}} := [\ ,\ ][-1]$ (qui est donc de degré -1, commutative graduée ($\lambda_{\mathfrak{g}} \circ \tau = \lambda_{\mathfrak{g}}$) et satisfait l'identité de Jacobi graduée), alors

$$\lambda_{\mathfrak{g}} \circ (\mathrm{id} \otimes m_{\mathfrak{g}}) = m_{\mathfrak{g}} \circ (\lambda_{\mathfrak{g}} \otimes \mathrm{id}) + m_{\mathfrak{g}} \circ (\mathrm{id} \otimes \lambda_{\mathfrak{g}}) \circ \tau_{12}. \tag{A.11}$$

Dans la suite, on note une algèbre de Gerstenhaber soit par $(\mathfrak{g}, m_{\mathfrak{g}}, 1, \lambda_{\mathfrak{g}})$ avec le crochet décalé $\lambda_{\mathfrak{g}}$, soit par $(\mathfrak{g}[1], m_{\mathfrak{g}}[1], 1, [\ ,\ ])$ avec la multiplication décalée $m_{\mathfrak{g}}[1]$.
L'exemple principal est construit de manière suivante : soit $(\mathfrak{l}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{l}})$ une algèbre de Lie graduée, soit $\mathfrak{h} = \mathfrak{l}[-1]$ et soit $\lambda_{\mathfrak{l}}$ le crochet décalé $[\ ,\ ][-1]$ donné par $s \circ [\ ,\ ]_{\mathfrak{l}} \circ (s \otimes s)^{-1}$ qui est de degré -1. On pose $\mathfrak{g} := \mathsf{S}\mathfrak{h} = \mathsf{S}\big(\mathfrak{l}[-1]\big)$. L'application $\mathfrak{h} \leftarrow \mathsf{S}\mathfrak{h} \otimes \mathsf{S}\mathfrak{h}$ donnée par $\lambda_{\mathfrak{l}} \circ (\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} \otimes \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}})$ co-induit une codérivation $\overline{\lambda_{\mathfrak{l}}} =: \lambda_{\mathfrak{g}} : \mathsf{S}\mathfrak{h} \otimes \mathsf{S}\mathfrak{h} \to \mathsf{S}\mathfrak{h}$ le long de la multiplication shuffle μ_{sh}, et on voit sans peine que $(\mathsf{S}\big(\mathfrak{l}[-1]\big), \mu_{\mathrm{sh}}, 1, \lambda_{\mathfrak{g}})$ est une algèbre de Gerstenhaber graduée.
Un exemple géométrique est donné par *l'espace de tous les champs de multivecteurs sur une variété différentielle* X, $\mathfrak{g} = \Gamma^\infty(X, \Lambda TX)$, muni de la multiplication extérieure point-par-point $\wedge =: m$ et du *crochet de Schouten* $[\ ,\ ]_S$ sur $\mathfrak{g}[1]$, voir le paragraphe 2.2.
Plus généralement, soit $V = V^0$ un espace vectoriel, $m : V \otimes V \to V$ une multiplication associative, $\mathfrak{G} := \mathrm{Hom}(V[1]^{\otimes}, V[1])$ muni du cobord de Hochschild b et $\mathfrak{h}$ la cohomologie du co-complexe $(\mathfrak{G}, \mathsf{b})$. D'après un résultat classique de Gerstenhaber [23], $\mathfrak{h}[-1]$ est une algèbre de Gerstenhaber où le crochet de Lie sur $\mathfrak{h}$ est induit par le crochet de Gerstenhaber sur $\mathfrak{G}$ et la multiplication sur $\mathfrak{h}[-1]$ provient de la multiplication '*cup*' $\cup$ sur $\mathrm{Hom}(V^{\otimes}, V)$ définie par la convolution de deux éléments de $\mathrm{Hom}(V^{\otimes}, V)$ par rapport à l'algèbre associative (V, m) et la cogèbre $(V^{\otimes}, \Delta)$.

De manière analogue, la structure d'une *cogèbre de Gerstenhaber graduée* sur $\mathfrak{g}$ est la donnée de la structure d'une cogèbre coassociative cocommutative graduée $\Delta_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ avec co-unité $\epsilon_{\mathfrak{g}}$ et de la structure $\delta_{\mathfrak{g}}$ d'une cogèbre de Lie graduée sur l'espace décalé $\mathfrak{g}[-1]$ satisfaisant la *règle de co-Leibniz graduée* suivante : soit $\kappa_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ le cocrochet décalé $\kappa_{\mathfrak{g}} := \delta_{\mathfrak{g}}[1]$ (qui est donc de degré -1, cocommutative graduée ($\tau \circ \kappa_{\mathfrak{g}} = \kappa_{\mathfrak{g}}$) et satisfait l'identité de co-Jacobi graduée), alors

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta_{\mathfrak{g}}) \circ \kappa_{\mathfrak{g}} = (\kappa_{\mathfrak{g}} \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_{\mathfrak{g}} + \tau_{12} \circ (\mathrm{id} \otimes \kappa_{\mathfrak{g}}) \circ \Delta_{\mathfrak{g}}. \tag{A.12}$$

ou $(\Delta_{\mathfrak{g}} \otimes \mathrm{id}) \circ \kappa_{\mathfrak{g}} = \tau_{23} \circ (\kappa_{\mathfrak{g}} \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_{\mathfrak{g}} + (\mathrm{id} \otimes \kappa_{\mathfrak{g}}) \circ \Delta_{\mathfrak{g}}$ comme condition équivalente. Dans la suite, on notera une cogèbre de Gerstenhaber $(\mathfrak{g}, \Delta_{\mathfrak{g}}, \epsilon_{\mathfrak{g}}, \kappa_{\mathfrak{g}})$ avec le cocrochet décalé $\kappa_{\mathfrak{g}}$. On retrouve $\delta_{\mathfrak{g}}$ par $\kappa_{\mathfrak{g}}[-1]$. Un *morphisme de cogèbres de Gerstenhaber* $\phi : (\mathfrak{g}, \Delta_{\mathfrak{g}}, \epsilon_{\mathfrak{g}}, \kappa_{\mathfrak{g}}) \to (\mathfrak{g}', \Delta_{\mathfrak{g}'}, \epsilon_{\mathfrak{g}'}, \kappa_{\mathfrak{g}'})$ est un morphisme de cogèbres qui est en même temps un morphisme de cogèbres de Lie, i.e. $(\phi \otimes \phi) \circ \Delta_{\mathfrak{g}} = \Delta_{\mathfrak{g}'} \circ \phi$ et $(\phi \otimes \phi) \circ \kappa_{\mathfrak{g}} = \kappa_{\mathfrak{g}'} \circ \phi$. De plus, une *codérivation de cogèbres de Gerstenhaber* $d : (\mathfrak{g}, \Delta_{\mathfrak{g}}, \epsilon_{\mathfrak{g}}, \kappa_{\mathfrak{g}}) \to (\mathfrak{g}', \Delta_{\mathfrak{g}'}, \epsilon_{\mathfrak{g}'}, \kappa_{\mathfrak{g}'})$ de degré j le long d'un morphisme de cogèbres de Gerstenhaber ϕ est une application linéaire de degré j telle que $(\phi \otimes d + d \otimes \phi) \circ \Delta_{\mathfrak{g}} = \Delta_{\mathfrak{g}'} \circ d$ et $(\phi \otimes d + d \otimes \phi) \circ \kappa_{\mathfrak{g}} = (-1)^j \kappa_{\mathfrak{g}'} \circ d$.
Soit $(\mathfrak{c}, \delta_{\mathfrak{c}})$ une cogèbre de Lie graduée. Soit $\mathfrak{h} := \mathfrak{c}[1]$ donc $\mathfrak{c} = \mathfrak{h}[-1]$, et $\delta_{\mathfrak{c}}[1] : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ le cocrochet décalé. L'application $\mathfrak{h} \xrightarrow{\delta_{\mathfrak{c}}[1]} \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h} \to \mathsf{S}\mathfrak{h} \otimes \mathsf{S}\mathfrak{h}$ se prolonge de manière unique comme une dérivation graduée κ_δ de degré -1 de l'algèbre commutative graduée libre $(\mathsf{S}\mathfrak{h}, \mu_{\mathrm{sh}})$ dans l'algèbre commutative graduée $\mathsf{S}\mathfrak{h} \otimes \mathsf{S}\mathfrak{h}$ le long de l'homomorphisme Δ_{sh}. On calcule sans peine que $(\mathsf{S}\big(\mathfrak{c}[1]\big), \Delta_{\mathrm{sh}}, \epsilon, \kappa_\delta)$ est toujours une cogèbre de Gerstenhaber. De plus, étant donné un morphisme $\phi : (\mathfrak{c}_1, \delta_{\mathfrak{c}_1} \to (\mathfrak{c}_2, \delta_{\mathfrak{c}_1})$

de cogèbres de Lie, il vient que l'unique morphisme de cogèbres coassociatives cocommutatives graduées $\overline{\phi[1]} : \mathsf{S}(\mathfrak{c}_1[1]) \to \mathsf{S}(\mathfrak{c}_2[1])$ co-induit par $\phi[1]$ est un morphisme de cogèbres de Gerstenhaber. Finalement, soit $\varphi : \mathbf{\Lambda}^r \mathfrak{c} \to \mathfrak{c}$ une application linéaire de degré $|\varphi|$. L'application φ est dite un 1-*cocycle de* $\mathfrak{c}$ lorsque

$$\begin{aligned}(\delta_{\mathfrak{c}} \circ \varphi)(x_1 \mathbf{\Lambda} \cdots \mathbf{\Lambda} x_r) = \\ \sum_{i=1}^{r} \sum_{(x_i)} (-1)^{|x_i'|(|\varphi|+|x_1|+\cdots+|x_{i-1}|)} x_i' \otimes \varphi\big(x_1 \mathbf{\Lambda} \cdots \mathbf{\Lambda} x_{i-1} \mathbf{\Lambda} x_i'' \mathbf{\Lambda} x_{i+1} \mathbf{\Lambda} \cdots \mathbf{\Lambda} x_r\big) \\ \sum_{i=1}^{r} \sum_{(x_i)} (-1)^{|x_i''|(|x_{i+1}|+\cdots+|x_r|)} \varphi\big(x_1 \mathbf{\Lambda} \cdots \mathbf{\Lambda} x_{i-1} \mathbf{\Lambda} x_i' \mathbf{\Lambda} x_{i+1} \mathbf{\Lambda} \cdots \mathbf{\Lambda} x_r\big) \otimes x_i''\end{aligned} \tag{A.13}$$

quels que soient $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{c}$ où l'on a utilisé la notation de Sweedler $\delta_{\mathfrak{c}}(x) =: \sum_{(x)} x' \otimes x''$. On montre que la codérivation de cogèbres cocommutatives coassociatives graduées $\overline{\varphi[1]} : \mathsf{S}(\mathfrak{c}[1]) \to \mathsf{S}(\mathfrak{c}[1])$, co-induite par la décalée $\varphi[1] \in \mathrm{Hom}\big(\mathsf{S}(\mathfrak{c}[1]), \mathfrak{c}[1]\big)$, est une codérivation graduée de degré $|\varphi| + 1$ de cogèbres de Gerstenhaber. De plus, dans le cas $\mathfrak{c} = \underline{\mathfrak{h}^{\otimes}}$ de la cogèbre de Lie colibre, tout 1-cocycle $\varphi : \mathbf{\Lambda}^r \underline{\mathfrak{h}^{\otimes}} \to \underline{\mathfrak{h}^{\otimes}}$ est uniquement déterminé par sa composante $pr_{\mathfrak{h}} \circ \varphi$.
Soit $\mathcal{CG}_{AN}$ la catégorie des cogèbres de Gerstenhaber telles que la cogèbre associative est dans $\mathcal{C}_{AN}$, le cocrochet décalé s'annule sur 1 et la cogèbre de Gerstenhaber quotient par $\mathbb{K}1$ est nilpotente dans le sens que pour tout élément il existe un entier positif N tel que toutes les Nèmes itérations de la comultiplication et du cocrochet décalé s'annulent. Soit $\mathfrak{h}$ un espace vectoriel gradué. En prenant la cogèbre de Lie colibre $\mathfrak{c} = \underline{\mathfrak{h}[-1]^{\otimes}}$ on constate au bout d'un long calcul que la cogèbre de Gerstenhaber $\mathsf{S}\big(\mathfrak{c}[1]\big)$, qui est égale à

$$\mathsf{G}\mathfrak{h} := \mathsf{S}\Big(\big(\underline{\mathfrak{h}[-1]^{\otimes}}\big)[1]\Big) \tag{A.14}$$

est une *cogèbre de Gerstenhaber colibre* dans la catégorie $\mathcal{CG}_{AN}$: en fait, étant donnée une application linéaire $\phi : C \to \mathfrak{h}$ de degré 0 dans le diagramme (A.3) on utilise d'abord la structure de cogèbre de Lie de $C[-1]$ pour construire de $\phi[-1] := s \circ \phi \circ s^{-1}$ un morphisme de cogèbres de Lie graduées $\psi := \overline{\phi[-1]} : C[-1] \to \underline{\mathfrak{h}[-1]^{\otimes}}$. Ensuite, le morphisme de cogèbres coassociatives cocommutatives graduées $\overline{\psi[1]} : C \to \mathsf{S}\Big(\big(\underline{\mathfrak{h}[-1]^{\otimes}}\big)[1]\Big)$ co-induit par $\psi[1]$ préserve aussi les structures de cogèbres de Lie graduées sur C et $\mathsf{G}\mathfrak{h}$.
De la même façon, on peut co-induire des applications linéaires $d : C^+ \to \mathfrak{h}$ de degré k comme codérivations graduées $\overline{d}$ de degré k de $C \to \mathsf{G}\mathfrak{h}$ le long d'un morphisme $\overline{\phi} : C \to \mathsf{G}\mathfrak{h}$ de cogèbres de Gerstenhaber graduées co-induit par $\phi : C^+ \to \mathfrak{h}$. Le cas particulier $C = \mathsf{G}\mathfrak{h}$ et $\overline{\phi} = \mathrm{id}_{\mathsf{G}\mathfrak{h}}$ est intéressant : puisque $\overline{d}$ est uniquement déterminée par sa composante $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}}(\overline{d}) = d$, on introduit une multiplication $d_1 \circ_T d_2 := d_1 \circ \overline{d_2}$ sur l'espace $\mathrm{Hom}(\mathsf{G}^+\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$ d'après le moule (A.4). Cette multiplication satisfait (A.5) (avec $\circ_G$ remplacé par $\circ_T$), et le commutateur gradué $[\ ,\ ]_T$ (l'antisymétrisé gradué de $\circ_T$) est la structure d'une algèbre de Lie graduée sur $\mathrm{Hom}(\mathsf{G}^+\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$. On donnera plus de détails sur $\circ_T$ lors de la discussion des structures G_∞ dans le prochain paragraphe.

A.2 Un aperçu des structures à homotopie près

Pour définir des *structures* $\mathbf{F}_\infty$ *(pour* $\mathbf{F} = \mathbf{A}, \mathbf{L}, \mathbf{C}, \mathbf{G}$*) sur un espace vectoriel gradué* $\mathfrak{h}$, on considère d'abord l'espace décalé $\mathfrak{h}[1]$:

$\mathbf{A}_\infty$: on regarde la cogèbre colibre graduée $\mathbf{A}_\infty\mathfrak{h} := \mathfrak{h}[1]^{\otimes}$. Une *structure* $\mathbf{A}_\infty$ *(version complexe de cochaînes) sur* $\mathfrak{h}$ est un élément $d \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}[1]^{\otimes+}, \mathfrak{h}[1])$ de degré 1 avec

$$d \circ_G d = 0. \tag{A.15}$$

De manière équivalente, on parle d'une codérivation graduée $\overline{d}$ (co-induite par d) de degré 1 et de carré nul, i.e. $\overline{d} \circ \overline{d} = 0$. Alors le couple $(\mathfrak{h}[1]^{\otimes}, \overline{d})$ est appelé une *cogèbre codifférentielle graduée.* Puisque l'espace vectoriel $\mathfrak{h}[1]^{\otimes}$ a une deuxième graduation $\mathfrak{h}[1]^{\otimes} = \oplus_{r\in\mathbb{N}}\mathfrak{h}[1]^{\otimes r}$ (on écrira parfois $\mathfrak{h}[1]^{\otimes r} =: \mathfrak{h}[1]^{[r]}$), l'application d se décompose comme $d = \sum_{r=1}^{\infty} d^r$ où les d^r se trouvent dans $\mathrm{Hom}(\mathfrak{h}[1]^{\otimes r}, \mathfrak{h}[1])^1$ quel que soit $r \in \mathbb{N}$. Les décalés

$$m^r := d^r[-1] = s \circ d^r \circ (s^{\otimes r})^{-1} \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}^{\otimes r}, \mathfrak{h})^{2-r} \tag{A.16}$$

sont donc des morphismes de degré $2-r$ et satisfont à l'équation

$$0 = m \circ_{St} m := \big(m[1] \circ_G m[1]\big)[-1]. \tag{A.17}$$

En particulier, m^1 est de degré 1 et m^2 est de degré 0. L'identité (A.17) pour $r = 1$ est équivalente à dire que m^1 est une *codifférentielle* sur $\mathfrak{h}$ ($m^1 m^1 = 0$). Pour $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}^{\otimes k}, \mathfrak{h})$ soit $(m^1.\alpha)$ l'action usuelle d'une codifférentielle, i.e. $(m^1.\alpha) = m^1 \circ \alpha - (-1)^{|\alpha|} \sum_{i=0}^{k-1} \alpha \circ \big(\mathrm{id}^{\otimes i} \otimes m^1 \otimes \mathrm{id}^{\otimes k-1-i}\big)$. Au rang $r = 2$, (A.17) exprime la compatibilité de m^1 avec m^2, i.e. $m^1.m^2 = 0$. Au rang 3 de (A.17) on voit que *l'associateur de* m^2, $m^2 \circ (m^2 \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{h}}) - m^2 \circ (\mathrm{id}_{\mathfrak{h}} \otimes m^2)$, est un cobord, i.e. égal à $m^1.m^3$, ce qui explique le nom *structure associative à homotopie près.* La structure d'une *algèbre associative codifférentielle graduée* sur $\mathfrak{h}$ est un exemple d'une structure A_∞ avec $m^r = 0$ pour $r \geq 3$. Les signes précis pour les identités des quantités décalées m^r se calculent à l'aide de la règle de signe (A.1), (A.2). Historiquement, les structures A_∞ furent introduites par Stasheff, 1963, [44, p.294, Def. 2.1], dans leur version complexe de chaînes, i.e. les m_r étaient de degré $r-2$ et satisfaisaient à $0 = \big(m[-1] \circ_G m[-1]\big)[1]$ ce qui donne exactement les signes de Stasheff. Soient $(\mathfrak{h}, d)$ et $(\hat{\mathfrak{h}}, \hat{d})$ des structures A_∞ sur $\mathfrak{h}$ et sur $\hat{\mathfrak{h}}$. Un *morphisme d'algèbres* A_∞ est un morphisme de cogèbres codifférentielles graduées $\Phi : \mathfrak{h}[1]^{\otimes} \to \hat{\mathfrak{h}}[1]^{\otimes}$, i.e. Φ préserve les comultiplications et les codifférentielles dans le sens

$$(\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta = \hat{\Delta} \circ \Phi \quad \text{et} \quad \Phi \circ \overline{d} = \overline{\hat{d}} \circ \Phi. \tag{A.18}$$

Toutes les autres structures $\mathbf{F}_\infty$ sont conçues exactement d'après le même moule :

$\mathbf{L}_\infty$: on regarde la cogèbre colibre cocommutative graduée $\mathbf{L}_\infty\mathfrak{h} := \mathsf{S}\big(\mathfrak{h}[1]\big)$ qui est isomorphe en tant qu'espace vectoriel à $\mathbf{\Lambda}\mathfrak{h}$. Une *structure* $\mathbf{L}_\infty$ *sur* $\mathfrak{h}$ est un élément $d_L \in \mathrm{Hom}(\mathsf{S}^+\mathfrak{h}[1], \mathfrak{h}[1])$ de degré 1 avec $d_L \circ_{NR} d_L = 0$. A l'aide de la codérivation $\overline{d_L}$ de $\mathsf{S}\big(\mathfrak{h}[1]\big)$ co-induite par d, le couple $\big(\mathsf{S}\big(\mathfrak{h}[1]\big), \overline{d_L}\big)$ est une cogèbre cocommutative codifférentielle graduée. En utilisant la deuxième graduation de $\mathsf{S}(\mathfrak{h}[1]) = \oplus_{r\in\mathbb{N}}\mathsf{S}^r(\mathfrak{h}[1]) =: \oplus_{r\in\mathbb{N}}\mathfrak{h}[1]^{[r]}$ on définit comme avant les applications d_L^r, et les structures décalées $m_L^r := d_L^r[-1]$ comme dans (A.16) sont des applications de degré $2-r$ dans l'espace $\mathrm{Hom}\big(\mathfrak{h}^{\otimes r}, \mathfrak{h}\big)$ qui sont automatiquement antisymétriques graduées. L'application m_L^1 est une codifférentielle, on a $m_L^1.m_L^2 = 0$, et le *jacobiateur* de m_L^2, $m_L^2 \circ (m_L^2 \otimes \mathrm{id}) \circ \big(\mathrm{id}^{\otimes 3} + \tau_{12}\tau_{23} + \tau_{23}\tau_{12}\big)$, est proportionnel à $m_L^1.m_L^3$, d'où le nom *structure d'algèbre de Lie à homotopie près.* Les signes dans les identités des m_L^r sont induits par ceux qu'on obtient à l'aide de la règle de signe, voir [33]. Les morphismes L_∞ sont des morphismes de cogèbres codifférentielles graduées comme dans (A.18). Un cas particulier est la structure d'une *algébre de Lie codifférentielle graduée* sur $\mathfrak{h}$, i.e. $m_L = m_L^1 + m_L^2$.

$\mathbf{C}_\infty$: on regarde la cogèbre de Lie colibre graduée $\mathbf{C}_\infty\mathfrak{h} := \underline{\mathfrak{h}[1]^{\otimes}}$. Une *structure* $\mathbf{C}_\infty$ *sur* $\mathfrak{h}$ est la donnée d'un élément $d \in \mathrm{Hom}(\underline{\mathfrak{h}[1]^{\otimes}}, \mathfrak{h}[1])$ de degré 1 avec $d \circ_H d = 0$. Tout ce qui a été dit pour le cas $\mathbf{A}_\infty$ se traduit de manière analogue, par exemple la composante décalée $m^2 := d^2[-1]$ est une *multiplication associative commutative graduée à homotopie près.* Pour $r \in \mathbb{N}$, on écrira parfois la notation générale $\mathfrak{h}[1]^{[r]}$ pour $\underline{\mathfrak{h}[1]^{\otimes r}}$. Un cas particulier est la structure d'une *algébre associative commutative codifférentielle graduée* sur $\mathfrak{h}$, i.e. $m = m^1 + m^2$.

$\mathbf{G}_\infty$: on regarde la cogèbre de Gerstenhaber colibre graduée $\mathbf{G}_\infty\mathfrak{h} := \mathsf{G}\big(\mathfrak{h}[1]\big) = \mathsf{S}\big((\underline{\mathfrak{h}^\otimes})[1]\big)$ qui est isomorphe en tant qu'espace vectoriel à $\mathbf{\Lambda}\underline{\mathfrak{h}^\otimes}$, notation plus simple qu'on utilisera souvent. Une *structure* $\mathbf{G}_\infty$ *sur* $\mathfrak{h}$ est la donnée d'un élément $d \in \mathrm{Hom}(\mathsf{G}^+(\mathfrak{h}[1]), \mathfrak{h}[1])$ de degré 1 avec $d \circ_T d = 0$. La famille des sous-espaces $\mathfrak{h}[1]^{[p_1,\dots,p_r]}$ de $\mathsf{G}\big(\mathfrak{h}[1]\big)$ pour $r, p_1, \dots, p_r \in \mathbb{N}$ définis par $(\underline{\mathfrak{h}^{\otimes p_1}})[1] \bullet \cdots \bullet (\underline{\mathfrak{h}^{\otimes p_r}})[1]$ détermine une décomposition de $\mathsf{G}\big(\mathfrak{h}[1]\big)$, et les sommes $\mathfrak{h}[1]^{[n]} := \oplus_{r,p_1+\cdots+p_r=n}\mathfrak{h}[1]^{[p_1,\dots,p_r]}$ donnent une deuxième graduation sur $\mathsf{G}\big(\mathfrak{h}[1]\big)$ dont la filtration correspondante, $\mathfrak{h}^{[\leq n]} := \oplus_{k=1}^{n}\mathfrak{h}[1]^{[k]}$, est préservée par les structures algébriques Δ, l et $\overline{d}$. On note $d^{p_1,\dots,p_r}$ la restriction de d à $\mathfrak{h}[1]^{[p_1,\dots,p_r]}$. Soit $d^{p_1,\dots,p_r}[-1] =: m^{p_1,\dots,p_r} =: m$ la décalée qui se trouve dans $\mathrm{Hom}\big(\underline{\mathfrak{h}^{\otimes p_1}}\mathbf{\Lambda}\cdots\mathbf{\Lambda}\underline{\mathfrak{h}^{\otimes p_r}}, \mathfrak{h}\big)$.

Les composantes d^1, $d^{1,1}$ et d^2 sont particulièrement importantes : la décalée $m^1 := d^1[-1]$ est une codifférentielle sur $\mathfrak{h}$. De plus, la décalée $m^{1,1} := d^{1,1}[-1]$ se restreint à la structure d'une algèbre de Lie graduée à homotopie près sur $\mathfrak{h}$. Finalement, la restriction de la décalée $m^2 := d^2[-1]$ à $\mathfrak{h}$ est égale à la décalée $m_{\mathfrak{h}[-1]}[1]$ d'une structure d'algèbre commutative graduée associative à homotopie près sur $\mathfrak{h}[-1]$.
Si $(\mathfrak{h}, m_{\mathfrak{h}[-1]}[1], 1, [\ ,\ ], \mathsf{b})$ est une algèbre de Gerstenhaber codifférentielle (i.e. la codifférentielle b préserve la multiplication $m_{\mathfrak{h}[-1]}$ et le crochet de Lie gradué $[\ ,\ ]$, il s'ensuit que ceci induit une structure G_∞ sur $\mathsf{G}(\mathfrak{h}[1])$ avec $d = d^1 + d^{1,1} + d^2$.
Une généralisation importante de ce cas d'une structure G_∞ s'obtient de la façon suivante : soit $(\mathfrak{b}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{b}}, \delta_{\mathfrak{b}}, \mathsf{b})$ une *bigèbre de Lie codifférentielle graduée*, i.e. $[\ ,\ ]_{\mathfrak{b}}$ est une structure d'algèbre de Lie graduée, $\delta_{\mathfrak{b}}$ est une structure de cogèbre de Lie graduée, $\mathsf{b} : \mathfrak{b} \to \mathfrak{b}$ est une application linéaire de degré 1 et de carré nul telles que b préserve $[\ ,\ ]_{\mathfrak{b}}$ et $\delta_{\mathfrak{b}}$, i.e.

$$\mathsf{b} \circ [\ ,\ ]_{\mathfrak{b}} = [\ ,\ ]_{\mathfrak{b}} \circ \big(\mathsf{b} \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \mathsf{b}\big) \quad , \quad \delta_{\mathfrak{b}} \circ \mathsf{b} = \big(\mathsf{b} \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \mathsf{b}\big) \circ \delta_{\mathfrak{b}},$$

et $[\ ,\ ]_{\mathfrak{b}}$ et $\delta_{\mathfrak{b}}$ sont compatibles, i.e.

$$\begin{aligned} \delta_{\mathfrak{b}} \circ [\ ,\ ]_{\mathfrak{b}} &= ([\ ,\ ]_{\mathfrak{b}} \otimes \mathrm{id}) \circ \big(\tau_{23} \circ (\delta_{\mathfrak{b}} \otimes \mathrm{id}) + \mathrm{id} \otimes \delta_{\mathfrak{b}}\big) \\ &\quad + (\mathrm{id} \otimes [\ ,\ ]_{\mathfrak{b}}) \circ \big(\delta_{\mathfrak{b}} \otimes \mathrm{id} + \tau_{12} \circ (\mathrm{id} \otimes \delta_{\mathfrak{b}})\big). \end{aligned}$$

La dernière condition est équivalente à l'énoncé que le crochet $[\ ,\ ]$ est un 1-cocycle de la cogèbre de Lie $(\mathfrak{b}, \delta_{\mathfrak{b}})$, voir l'éqn (A.13). Dans le cas particulier où $\mathfrak{b}$ est la cogèbre de Lie graduée colibre $\underline{\mathfrak{h}^\otimes}$ munie du cocrochet δ canonique, il est clair que la codifférentielle b est co-induite par sa composante $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} \circ \mathsf{b} = \sum_{p=1}^{\infty} \mathsf{b}^p$. De plus, tout crochet antisymétrique gradué $[\ ,\ ]$ qui est compatible avec δ est également déterminé par sa composante $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} \circ [\ ,\ ] = \sum_{p_1,p_2=1}^{\infty} l^{p_1,p_2}$ où $l^{p_1,p_2} : \underline{\mathfrak{h}^{\otimes p_1}} \otimes \underline{\mathfrak{h}^{\otimes p_2}} \to \mathfrak{h}$ parce que $[,\ ,\ ]$ est un 1-cocycle de $(\underline{\mathfrak{h}^\otimes}, \delta)$. Pour revenir au cas d'une bigèbre de Lie graduée codifférentielle générale, on construit d'abord la cogèbre de Gerstenhaber $\big(\mathsf{S}\big(\mathfrak{b}[1]\big), \Delta_{\mathrm{sh}}, \epsilon, l_{\delta_{\mathfrak{b}}}\big)$ à l'aide de la cogèbre de Lie graduée $(\mathfrak{b}, \delta_{\mathfrak{b}})$, comme déjà mentionné ci-dessus. La décalée d^1 de b est une application linéaire de degré 1 de $\mathfrak{b}[1]$ dans $\mathfrak{b}[1]$, et la décalée d^2 de $[\ ,\ ]_{\mathfrak{b}}$ est une application linéaire de degré 1 de $S^2\big(\mathfrak{b}[1]\big)$ dans $\mathfrak{b}[1]$. La codérivation $\overline{d}$ de la cogèbre $\big(\mathsf{S}\big(\mathfrak{b}[1]\big), \Delta_{\mathrm{sh}}, \epsilon\big)$ co-induite par la somme $d := d^1 + d^2$ préserve $l_{\delta_{\mathfrak{b}}}$ (grâce à la deuxième et troisième équation de compatibilité ci-dessus) et est de carré 0 car b l'est, $[\ ,\ ]_{\mathfrak{b}}$ satisfait l'identité de Jacobi graduée et b préserve $[\ ,\ ]_{\mathfrak{b}}$. Alors $\big(\mathsf{S}\big(\mathfrak{b}[1]\big), \Delta_{\mathrm{sh}}, \epsilon, l_{\delta_{\mathfrak{b}}}, \overline{d}\big)$ est une cogèbre de Gerstenhaber codifférentielle graduée. Ceci implique la proposition suivante montrée dans [27, p.43, Lemma 2.1] :

Proposition A.1 *Supposons donnée une structure de bigèbre de Lie codifférentielle sur la cogèbre de Lie graduée colibre* $\underline{\mathfrak{h}^\otimes}$ *dont la différentielle et le crochet de Lie sont co-induits respectivement* *par les applications* $\mathsf{b}^p : \underline{\mathfrak{h}^{\otimes p}} \to \mathfrak{h}$ *et* $l^{p_1,p_2} : \underline{\mathfrak{h}^{\otimes p_1}} \otimes \underline{\mathfrak{h}^{\otimes p_2}} \to \mathfrak{h}$. *Alors* $\mathfrak{h}$ *a une structure* G_∞ d *donnée sur* $\mathsf{G}\big(\mathfrak{h}[1]\big)$, *pour tous entiers* $p, p_1, p_2, \ldots, p_r, \ldots \geq 1$, *par les décalées*

$$d^p := s^{-1} \circ \mathsf{b}^p \circ s_{\underline{\mathfrak{h}^{\otimes}}}, \qquad d^{p_1,p_2} := s^{-1} \circ l^{p_1,p_2} \circ \big(s_{\underline{\mathfrak{h}^{\otimes}}} \otimes s_{\underline{\mathfrak{h}^{\otimes}}}\big)$$

où $d^{p_1,\ldots,p_r} = 0$ *pour* $r \geq 3$.

Pour énoncer un *lien entre structures* G_∞ *et* L_∞, on remarque que l'espace vectoriel gradué $\mathfrak{h}$ munie du cocrochet trivial est une sous-cogèbre de Lie de la cogèbre de Lie colibre $\underline{\mathfrak{h}^{\otimes}}$ via l'injection canonique de $\mathfrak{h}$ sur $\underline{\mathfrak{h}^{\otimes 1}}$: en effet, $\delta(x) = \Delta(x) - \tau\Delta(x) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{h}$. L'application co-induite $\overline{i} : \mathsf{S}(\mathfrak{h}[1]) \to \mathsf{S}\big((\underline{\mathfrak{h}^{\otimes}})[1]\big)$ est donc un morphisme de cogèbres de Gerstenhaber injectif.

Proposition A.2 *Soient* $\mathfrak{h}$ *et* $\mathfrak{H}$ *deux espaces vectoriels gradués.*

1. *Soit* $d = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{p_1,\ldots,p_r=1}^{\infty} d^{p_1,\ldots,p_r}$ *une structure* G_∞ *sur* $\mathfrak{h}$. *Alors la restriction* d_L *de* d *à la sous-cogèbre de Gerstenhaber* $\mathsf{S}(\mathfrak{h}[1])$ *de* $\mathsf{G}(\mathfrak{h}[1])$ *définit une unique structure* L_∞ *sur* $\mathfrak{h}$ *dont les composantes sont données par* $d_L^r := d^{1,\ldots,1}$.
2. *Soient* d *et* D *des structures* G_∞ *sur* $\mathfrak{h}$ *et* $\mathfrak{H}$, *respectivement, et soit* $\overline{\Phi} : (\mathsf{G}(\mathfrak{h}[1]), d) \to (\mathsf{G}(\mathfrak{H}[1]), D)$ *un morphisme* G_∞ *co-induit par l'application* $\Phi : \mathsf{G}(\mathfrak{h}[1]) \to \mathfrak{H}[1]$. *Alors la restriction* $\overline{\phi}$ *de* $\overline{\Phi}$ *à la sous-cogèbre* $\mathsf{S}(\mathfrak{h}[1])$ *prend ses valeurs dans* $\mathsf{S}(\mathfrak{H}[1])$ *et définit un morphisme* L_∞ *entre* $(\mathsf{S}(\mathfrak{h}[1]), d_L)$ *et* $(\mathsf{S}(\mathfrak{H}[1]), D_L)$

Démonstration: On écrit $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}}^G : \mathsf{G}(\mathfrak{h}[1]) \to \mathfrak{h}[1]$ pour la projection canonique.
1. L'application $\overline{d} \circ \overline{i}$ est une codérivation de $\mathsf{S}(\mathfrak{h}[1])$ dans $\mathsf{G}(\mathfrak{h}[1])$ le long du morphisme $\overline{i}$. Elle est donc co-induite par sa projection $d_L := \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}[1]}^G \circ \overline{d} \circ \overline{i}$. Soit $\overline{d_L}$ la codérivation de la cogèbre $\mathsf{S}(\mathfrak{h}[1])$ co-induite par d_L. Alors $\overline{i} \circ \overline{d_L}$ est également une codérivation de $\mathsf{S}(\mathfrak{h}[1])$ dans $\mathsf{G}(\mathfrak{h}[1])$ le long du morphisme $\overline{i}$. Puisque $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}[1]}^G \circ \overline{d} \circ \overline{i}$ est égal à $d_L = \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}[1]} \circ \overline{d_L} = \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}[1]}^G \circ \overline{i} \circ \overline{d_L}$ on peut conclure que $\overline{d} \circ \overline{i} = \overline{i} \circ \overline{d_L}$, et $\overline{i}$ est donc un morphisme de cogèbres de Gerstenhaber graduées codifférentielles. Grâce à cette équation et l'injectivité de $\overline{i}$, il vient que $\overline{d_L} \circ \overline{d_L} = 0$, et d_L est donc une structure L_∞ sur $\mathfrak{h}$ dont les composantes sont des restrictions de d à $\mathsf{S}(\mathfrak{h}[1])$, à savoir $d^{1,\ldots,1}$.
2. D'après ce qui précède, l'application $\overline{\Phi} \circ \overline{i}_{\mathsf{S}(\mathfrak{h}[1])} : \mathsf{S}(\mathfrak{h}[1]) \to \mathsf{G}(\mathfrak{H}[1])$ est un morphisme de cogèbres de Gerstenhaber codifférentielles, et donc co-induit par sa projection $\phi := \mathrm{pr}_{\mathfrak{H}[1]}^G \circ \overline{\Phi} \circ \overline{i}_{\mathsf{S}(\mathfrak{h}[1])}$. Soit $\overline{\phi} : \mathsf{S}(\mathfrak{h}[1]) \to \mathsf{S}(\mathfrak{H}[1])$ le morphisme de cogèbres cocommutatives graduées co-induit par ϕ. Il vient que les deux morphismes de cogèbres de Gerstenhaber $\overline{\Phi} \circ \overline{i}_{\mathsf{S}(\mathfrak{h}[1])}$ et $\overline{i}_{\mathsf{S}(\mathfrak{H}[1])} \circ \overline{\phi}$ ont la même composante dans $\mathfrak{H}[1]$, et sont donc égaux. Ensuite,

$$\begin{aligned} \overline{i}_{\mathsf{S}(\mathfrak{H}[1])} \circ \overline{\phi} \circ \overline{d_L} &= \overline{\Phi} \circ \overline{i}_{\mathsf{S}(\mathfrak{h}[1])} \circ \overline{d_L} = \overline{\Phi} \circ \overline{d} \circ \overline{i}_{\mathsf{S}(\mathfrak{h}[1])} = \overline{D} \circ \overline{\Phi} \circ \overline{i}_{\mathsf{S}(\mathfrak{h}[1])} \\ &= \overline{D} \circ \overline{i}_{\mathsf{S}(\mathfrak{H}[1])} \circ \overline{\phi} = \overline{i}_{\mathsf{S}(\mathfrak{H}[1])} \circ \overline{D_L} \circ \overline{\phi}, \end{aligned}$$

donc grâce à l'injectivité de $\overline{i}_{\mathsf{S}(\mathfrak{H}[1])}$, l'application $\overline{\phi}$ est un morphisme L_∞. □

A.3 Accolades

Soit $\mathfrak{h}$ un espace vectoriel gradué. Pour chaque entier j on choisit un sous-espace $\mathfrak{H}^j$ de l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{h}^{\otimes +}, \mathfrak{h})^j$ satisfaisant la condition que pour tous $\phi \in \mathfrak{H}^j, \psi \in \mathfrak{H}^k$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$ la 'i-ème composition'

$$\phi \circ_i \psi := \sum_{j \in \mathbb{N}} \phi \circ \big(\mathrm{id}^{\otimes(i-1)} \otimes \psi \otimes \mathrm{id}^{\otimes j}\big) \tag{A.19}$$

soit un élément de $\mathfrak{H}^{j+k}$. Soit $\mathfrak{H}$ l'espace gradué $\oplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathfrak{H}^j$. On considère l'application

$$r : \mathfrak{H}^{\otimes} \otimes \mathfrak{h}^{\otimes} \to \mathfrak{h} : \xi \otimes x \mapsto \mathrm{pr}_{\mathfrak{H}}(\xi)\big(x\big) + \epsilon_{\mathfrak{H}^{\otimes}}(\xi)\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}}(x).$$

Puisque la cogèbre graduée produit tensoriel $\mathfrak{H}^{\otimes} \otimes \mathfrak{h}^{\otimes}$ est de classe $\mathcal{C}_{AN}$ et la cogèbre $(\mathfrak{h}^{\otimes}, \Delta_{\mathfrak{h}^{\otimes}}, \epsilon_{\mathfrak{h}^{\otimes}})$ est colibre dans cette catégorie, il existe un unique morphisme de cogèbres graduées $\rho' : \mathfrak{h}^{\otimes} \leftarrow \mathfrak{H}^{\otimes} \otimes \mathfrak{h}^{\otimes}$ avec $\mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} \circ \rho' = r$. On écrira toujours $\rho'(\xi \otimes x) = \rho(\xi)(x)$ et l'on considère ρ comme application linéaire $\mathfrak{H}^{\otimes} \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}^{\otimes}, \mathfrak{h}^{\otimes})$. Comme ρ' est un morphisme de cogèbres, il vient que pour tous $\phi_1, \cdots, \phi_k \in \mathfrak{H}$

$$\Delta_{\mathfrak{h}^{\otimes}} \circ \rho(\phi_1 \cdots \phi_k) = \sum_{i=1}^{k+1} \big(\rho(\phi_1 \cdots \phi_{i-1}) \otimes \rho(\phi_i \cdots \phi_k)\big) \circ \Delta_{\mathfrak{h}^{\otimes}}.$$

En particulier, $\rho(\phi_1)$ est une codérivation de $(\mathfrak{h}^{\otimes}, \Delta_{\mathfrak{h}^{\otimes}})$, alors $\rho(\phi_1) = \mathrm{id}_{\mathfrak{h}^{\otimes}} \star \phi_1 \star \mathrm{id}_{\mathfrak{h}^{\otimes}}$ (où l'on utilise la convolution $\star$ par rapport à $\mu_{\mathfrak{h}^{\otimes}}$ et $\Delta_{\mathfrak{h}^{\otimes}}$ mentionnée ci-dessus). On montre par récurrence que

$$\begin{aligned}\rho(\phi_1 \cdots \phi_k) &= \mathrm{id}_{\mathfrak{h}^{\otimes}} \star \phi_1 \star \mathrm{id}_{\mathfrak{h}^{\otimes}} \star \phi_2 \star \mathrm{id}_{\mathfrak{h}^{\otimes}} \star \cdots \star \mathrm{id}_{\mathfrak{h}^{\otimes}} \star \phi_k \star \mathrm{id}_{\mathfrak{h}^{\otimes}} \\ &= \sum_{i_1 \cdots i_{k+1}=0}^{\infty} \mathrm{id}_{\mathfrak{h}}^{\otimes i_1} \otimes \phi_1 \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{h}}^{\otimes i_2} \otimes \phi_2 \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{h}}^{\otimes i_k} \otimes \phi_k \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{h}}^{\otimes i_{k+1}}\end{aligned}$$

quels que soient $\phi_1, \cdots, \phi_k \in \mathfrak{H}$, et l'on définit les *accolades (braces)* (voir [31], [25] [26]) par

$$\phi\{\phi_1, \cdots, \phi_k\} := \phi \circ \rho(\phi_1 \cdots \phi_k).$$

Soit m_K l'application $\mathfrak{H}^{\otimes} \otimes \mathfrak{H}^{\otimes} \to \mathfrak{H}$ définie par $m_K(\xi \otimes \eta) := \mathrm{pr}_{\mathfrak{H}}(\xi) \circ \rho(\eta) + \epsilon_{\mathfrak{H}^{\otimes}}(\xi)\mathrm{pr}_{\mathfrak{H}}(\eta)$. L'unique morphisme $\mu_K : \mathfrak{H}^{\otimes} \otimes \mathfrak{H}^{\otimes} \to \mathfrak{H}^{\otimes}$ de cogèbres graduées de classe $\mathcal{C}_{AN}$ co-induit par m_K (i.e. tel que $\mathrm{pr}_{\mathfrak{H}} \circ \mu_K = m_K$) satisfait

$$\begin{aligned}\rho' \circ \big(\mathrm{id}_{\mathfrak{H}^{\otimes}} \otimes \rho'\big) &= \rho' \circ \big(\mu_K \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{h}^{\otimes}}\big) \\ \mu_K \circ \big(\mu_K \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{H}^{\otimes}}\big) &= \mu_K \circ \big(\mathrm{id}_{\mathfrak{H}^{\otimes}} \otimes \mu_K\big) \\ \mu_K \circ (e \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{H}^{\otimes}}) &= \mathrm{id}_{\mathfrak{H}^{\otimes}} = \mu_K \circ (\mathrm{id}_{\mathfrak{H}^{\otimes}} \otimes e).\end{aligned}$$

où e est l'élément genre groupe dans $\mathfrak{H}^{\otimes}$: puisque les membres de droite et de gauches des équations précédentes sont des morphismes de cogèbres il suffit de vérifier leurs projections sur $\mathfrak{h}$ et sur $\mathfrak{H}$. Alors $(\mathfrak{H}^{\otimes}, \mu_K, 1, \Delta_{\mathfrak{H}^{\otimes}}, \epsilon_{\mathfrak{H}^{\otimes}})$ est une *bigèbre graduée*, et ρ' définit sur $(\mathfrak{h}^{\otimes}, \Delta_{\mathfrak{h}^{\otimes}})$ la structure d'une *module-cogèbre graduée à gauche* par rapport à $\mathfrak{H}^{\otimes}$. On a la formule suivante pour μ_K, par fois écrit $\bullet_K$:

$$\begin{aligned}&\phi_1 \cdots \phi_k \bullet_K \psi_1 \cdots \psi_l = \\ &\quad \sum_{0 \le s_1 \le \cdots \le s_{2k} \le l} \prod_{r=1}^{k} (-1)^{(|\phi_r|+\cdots+|\phi_k|)(|\psi_{s_{2r-3}+1}|+\cdots+|\psi_{s_{2r-1}}|)} \\ &\qquad \psi_1 \cdots \psi_{s_1}(\phi_1\{\psi_{s_1+1}, \ldots, \psi_{s_2}\})\psi_{s_2+1} \cdots \psi_{s_3} \\ &\qquad \cdots (\phi_k\{\psi_{s_{2k-1}+1}, \ldots, \psi_{s_{2k}}\})\psi_{s_{2k}+1} \cdots \psi_l\end{aligned} \tag{A.20}$$

où $s_{-1} := 0$. La multiplication de Gerstenhaber (graduée) (A.4) $\phi \circ_G \psi$ est donc donnée par $\phi\{\psi\} = \phi \circ \rho(\psi)$ pour $\phi, \psi \in \mathfrak{H}$. Soit $m[1] \in \mathfrak{H}^1$ la décalée d'une multiplication associative graduée $m : \mathfrak{h}[-1] \otimes \mathfrak{h}[-1] \to \mathfrak{h}[-1]$. Il vient que le commutateur gradué $\mathsf{b}_K := [m[1], \ ]_K$ par rapport à μ_K définit une dérivation graduée de degré 1 de μ_K qui est de carré 0 grâce à l'associativité de

m. Puisque tous les éléments de $\mathfrak{H}$ sont des éléments primitifs par rapport à $\Delta_{\mathfrak{H}^\otimes}$, i.e. $\Delta_{\mathfrak{H}^\otimes}(\phi) = \phi\otimes 1 + 1\otimes\phi$ il vient que b_K est également une codérivation de la cogèbre $\mathfrak{H}^\otimes$. Pour $\phi_1,\ldots,\phi_k\in\mathfrak{H}$ on calcule

$$\begin{aligned}\mathsf{b}_K(\phi_1\cdots\phi_k) = & \\ &\sum_{0\le s\le k-1}(-1)^{|\phi_1|+\cdots+|\phi_s|}\phi_1\cdots\phi_s\big(\mathsf{b}\phi_{s+1}\big)\phi_{s+2}\cdots\phi_k \\ &+\sum_{0\le s\le k-2}(-1)^{|\phi_1|+\cdots+|\phi_{s+1}|}\phi_1\cdots\phi_s(\phi_{s+1}\cup\phi_{s+2})\phi_{s+3}\cdots\phi_k\end{aligned} \tag{A.21}$$

où $\mathsf{b} = [m,\ ]_G$ est le cobord de Hochschild (à un signe global près) et $\cup$ est la multiplication *cup* définie avant.

La construction précédente se traduit littéralement au cas où on remplace $\mathfrak{h}^\otimes$ par la cogèbre colibre cocommutative graduée $\mathsf{S}\mathfrak{h}$: ici $\mathfrak{H}_S\subset \mathrm{Hom}(\mathsf{S}\mathfrak{h},\mathfrak{h})$, $\rho'_S : \mathsf{S}\mathfrak{H}_S\otimes\mathsf{S}\mathfrak{h}\to\mathsf{S}\mathfrak{h}$ et $\mu_S : \mathsf{S}\mathfrak{H}_S\otimes\mathsf{S}\mathfrak{H}_S\to\mathsf{S}\mathfrak{H}_S$ définies par des accolades symétriques.

A.4 Morphismes de formalité

La proposition suivante est un exemple de la théorie de perturbation homologique et était montrée pour le cas G_∞ dans [27, p.45, Prop. 3.1]. La lettre F est une variable pour A, L, C, G.

Proposition A.3 *Soit $\mathfrak{H}$ un espace vectoriel gradué, soit $D = \sum_{r=1}^{\infty} D^{[r]}$ une structure F_∞ sur $\mathfrak{H}$ et soit $\mathfrak{h}$ la cohomologie par rapport à la décalée $D^{[1]}[-1]$ de la codifférentielle $D^{[1]}$. Soit $\psi^{[1]} : \mathfrak{h}[1]\to\mathfrak{H}[1]$ une application HKR, i.e. une injection linéaire de degré 0 avec $KerD^{[1]} = Im\psi^{[1]}\oplus ImD^{[1]}$. Alors pour tout entier positif $n\ge 2$ il existe une application linéaire $\psi^{[n]} : \mathfrak{h}[1]^{[n]}\to\mathfrak{H}[1]$ de degré 0 et une application $d'^{[n]} : \mathfrak{h}[1]^{[n]}\to\mathfrak{h}[1]$ de degré 1 telles que*

1. *$d' := \sum_{n=2}^{\infty} d'^{[n]}$ définit une structure F_∞ sur $\mathfrak{h}$.*
2. *L'application linéaire $\overline{\psi} : \mathbf{F}_\infty\mathfrak{h}\to\mathbf{F}_\infty\mathfrak{H}$ co-induite par $\psi := \sum_{n=1}^{\infty}\psi^{[k]}$ en tant que morphisme de cogèbres graduées est un morphisme de structures F_∞, i.e. $\overline{D}\ \overline{\psi} = \overline{\psi}\ \overline{d'}$.*

De plus d' est uniquement déterminé par le choix de ψ.

Démonstration: Afin de simplifier la notation, on enlèvera le symbol $\circ$ pour la composition des applications linéaires dans cette démonstration et dans la suivante. Pour un choix arbitraire des $\psi^{[n]}$ $(n\ge 2)$ et des $d'^{[n]}$ $(n\ge 2)$ on définit

$$\overline{P}(\psi, d') := \overline{D}\ \overline{\psi} - \overline{\psi}\ \overline{d'} \quad\text{et}\quad \overline{Q}(d') := \overline{d'}\ \overline{d'}.$$

Alors puisque $\overline{D}$ et $\overline{d'}$ sont des F-codérivations graduées et $\overline{\psi}$ est un morphisme de F-cogèbres il vient que $\overline{P}(\psi, d')$ est une F-codérivation le long de $\overline{\psi}$. De plus, l'équation $\overline{D}\ \overline{D} = 0$ entraîne l'identité suivante :

$$\overline{D}\ \overline{P}(\psi, d') \ +\ \overline{P}(\psi, d')\ \overline{d'}\ +\ \overline{\psi}\ \overline{Q}(d') = 0. \qquad (*)$$

On va construire par récurrence ψ et d' telles que $\overline{P}(\psi, d')$ et $\overline{Q}(d')$ s'annulent. D'abord on note $\mathfrak{h}[1]^{[\le n]}$ la filtration $\oplus_{k=0}^{n}\mathfrak{h}[1]^{[k]}$ de $\mathbf{F}_\infty\mathfrak{h}$ et les applications tronquées $\psi^{[\le n]} := \psi^{[1]}+\cdots+\psi^{[n]}$ et $d'^{[\le n]} := d'^{[2]}+\cdots+d'^{[n]}$. De la construction des morphismes et codérivations co-induites l'on constate les faits généraux suivants : 1. $\psi^{[k]}$ et $d'^{[k]}$ s'annulent sur $\mathfrak{h}[1]^{[l]}$ si $k > l$, donc $\overline{D}$, $\overline{d'}$ et $\overline{\psi}$ préservent les filtrations. 2. Pour les restrictions il vient

$$\left(\overline{\psi} = \overline{\psi^{[\le n]}} = \left(\overline{\psi^{[\le n-1]}+\psi^{[n]}}\right)\right)\Big|_{\mathfrak{h}[1]^{[\le n]}} \quad\text{et}\quad \left(\overline{d'} = \overline{d'^{[\le n]}}\right)\Big|_{\mathfrak{h}[1]^{[\le n]}},$$

bien que la dépendence de $\overline{\psi}$ de ψ ne soit pas linéaire contrairement aux codérivations. 3. On a $\overline{d'}\big(\mathfrak{h}[1]^{[\leq n+1]}\big) \subset \mathfrak{h}[1]^{[\leq n]}$ car $d'^{[1]} = 0$. 4. Si une codérivation $\overline{p} : \mathbf{F}_\infty\mathfrak{h} \to \mathbf{F}_\infty\mathfrak{H}$ le long d'un morphisme s'annule sur $\mathfrak{h}[1]^{[\leq n]}$, alors $\overline{p}(\mathfrak{h}[1]^{[n+1]}) = p^{[n+1]}(\mathfrak{h}[1]^{[n+1]}) \subset \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^{[1]}$ car elle est déterminée par ses projections sur $\mathfrak{H}$.
Pour $n = 1$ on trouve $\overline{P}(\psi, d')|_{\mathfrak{h}[1]^{[1]}} = D^{[1]}\psi^{[1]} = 0$ par la définition de $\psi^{[1]}$ et le fait que $d'^{[1]} = 0$. Puisque tout $d'^{[2]}$ envoie $\mathfrak{h}[1]^{[\leq 2]}$ sur $\mathfrak{h}[1]^{[1]} = \mathfrak{h}[1]$, sur lequel tout d' s'annule, il vient que $\overline{Q}(d')$ s'annule sur $\mathfrak{h}[1]^{[\leq 2]}$.
Supposons, par récurrence, qu'il y ait $\psi^{[\leq n]}$ et $d'^{[\leq n]}$ tel que $\overline{P}(\psi^{[\leq n]}, d'^{[\leq n]})$ s'annule sur $\mathfrak{h}[1]^{[\leq n]}$ et $\overline{Q}(d'^{[\leq n]})$ s'annule sur $\mathfrak{h}[1]^{[\leq n+1]}$. Alors pour tout choix $\psi^{[n+1]} : \mathfrak{h}[1]^{[n+1]} \to \mathfrak{H}[1]$ et $d'^{[n+1]} : \mathfrak{h}[1]^{[n+1]} \to \mathfrak{h}[1]$ il vient que (grâce aux faits 2. et 3. ci-dessus)

$$\begin{aligned}
&\overline{P}(\psi^{[\leq n+1]}, d'^{[\leq n+1]})|_{\mathfrak{h}[1]^{[n+1]}} \\
&\quad = \overline{P}(\psi^{[\leq n]}, d'^{[\leq n]})|_{\mathfrak{h}[1]^{[n+1]}} + D^{[1]}\psi^{[n+1]} - \psi^{[1]}d'^{[n+1]}. \qquad (**)
\end{aligned}$$

D'un autre côté, regardons l'identité $(*)$ pour $\psi = \psi^{[n]}$ et $d' = d'^{[n]}$ restreinte à $\mathfrak{h}[1]^{[n+1]}$: le terme $\overline{\psi^{[\leq n]}}\ \overline{Q}(d'^{[\leq n]})$ s'y annule par hypothèse de récurrence, ainsi que le terme $\overline{P}(\psi^{[\leq n]}, d'^{[\leq n]})\overline{d'^{[\leq n]}}$ grâce au fait 3. ci-dessus et l'hypothèse de récurrence. Finalement, grâce au fait 4. ci-dessus, la restriction $\overline{P}(\psi^{[\leq n]}, d'^{[\leq n]})|_{\mathfrak{h}[1]^{[n+1]}}$ prend ses valeurs dans $\mathfrak{H}[1]$, et donc $(*)$ se réduit à

$$0 = \overline{D}\ \overline{P}(\psi^{[\leq n]}, d'^{[\leq n]})|_{\mathfrak{h}[1]^{[n+1]}} = D^{[1]}\overline{P}(\psi^{[\leq n]}, d'^{[\leq n]})|_{\mathfrak{h}[1]^{[n+1]}}.$$

Par conséquent, $\overline{P}(\psi^{[\leq n]}, d'^{[\leq n]})|_{\mathfrak{h}[1]^{[n+1]}}$ prend ses valeurs dans $Ker\ D^{[1]} = Im\ \psi^{[1]} \oplus Im\ D^{[1]}$, et on peut donc trouver un unique $d'^{[n+1]}$ et un $\psi^{[n+1]}$ tels que le membre de gauche de l'équation $(**)$ s'annule.
De plus, $\overline{Q}(d'^{[\leq n+1]})$ restreinte à $\mathfrak{h}[1]^{[\leq n+1]}$ s'annule, car $\overline{Q}(d'^{[\leq n]})$ s'y annule et $\overline{d'^{[\leq n]}}d'^{[n+1]} = 0$ (car $d'^{[1]} = 0$) et $d'^{[n+1]}\overline{d'^{[\leq n]}}(\mathfrak{h}[1]^{[\leq n+1]}) = 0$ (grâce au fait 3.). Finalement, regardons l'identité $(*)$ pour $\psi = \psi^{[\leq n+1]}$ et $d' = d'^{[\leq n+1]}$ restreinte à $\mathfrak{h}[1]^{[n+2]}$: d'après ce qui précède $\overline{P}(\psi^{[\leq n+1]}, d'^{[\leq n+1]})$ s'annule sur $\mathfrak{h}[1]^{[\leq n+1]} \supset \overline{d'}(\mathfrak{h}[1]^{[n+2]})$, donc le terme $\overline{P}(\psi^{[\leq n+1]}, d'^{[\leq n+1]})\ \overline{d'^{[\leq n+1]}}$ s'annule sur $\mathfrak{h}[1]^{[n+2]}$. De plus, grâce au fait 4. les restrictions de $\overline{P}(\psi^{[\leq n+1]}, d'^{[\leq n+1]})$ et de $\overline{\psi^{[\leq n+1]}}\ \overline{Q}(d'^{[\leq n+1]})$ à $\mathfrak{h}[1]^{[n+2]}$ prennent leurs valeurs dans $\mathfrak{H}$. Alors, l'identité $(*)$ a la forme

$$0 = D^{[1]}\overline{P}(\psi^{[\leq n+1]}, d'^{[\leq n+1]})|_{\mathfrak{h}[1]^{[n+2]}} + \psi^{[1]}\overline{Q}(d'^{[\leq n+1]})|_{\mathfrak{h}[1]^{[n+2]}},$$

et puisque $Im\ \psi^{[1]} \cap Im\ D^{[1]} = \{0\}$ il vient que $\overline{Q}(d'^{[\leq n+1]})$ s'annule sur $\mathfrak{h}[1]^{[n+2]}$, ce qui termine la récurrence. $\square$

On remarque que la codérivation $\overline{d}$ de $\mathbf{F}_\infty\mathfrak{h}$ co-induite par $d'^{[2]} =: d : \mathfrak{h}[1]^{[2]} \to \mathfrak{h}[1]$ est de carré 0. D'après le cas $n = 2$ de la démonstration précédente elle est donnée par la formule

$$\psi^{[1]}d = \psi^{[1]}d'^{[2]} = D^{[2]}\overline{\psi^{[1]}}.$$

Evidemment, d définit également une structure F_∞ sur $\mathfrak{h}$.

Pour la construction des star-produits, il est souhaitable de transformer d' résultant de la proposition A.3 en son premier terme d : on constate d'abord que l'espace $\mathrm{Hom}(\mathbf{F}_\infty\mathfrak{h}, \mathfrak{h}[1])$ est cofiltré par la filtration de $\mathbf{F}_\infty\mathfrak{h}$, i.e.

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{F}_\infty\mathfrak{h}, \mathfrak{h}[1])^{[\geq n+1]} := \big\{\phi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{F}_\infty\mathfrak{h}, \mathfrak{h}[1]) \mid \phi(\mathfrak{h}^{[\leq n]}) = \{0\}\big\}$$

A l'aide du crochet $[\ ,\ ]_F$ (où l'indice F signifie $G,\ NR,\ H,\ T$), on voit que l'application $\phi \mapsto [\phi, d]_F$ est une codifférentielle (i.e. de carré 0) sur tout espace $\mathrm{Hom}(\mathbf{F}_\infty\mathfrak{h}, \mathfrak{h}[1])^{[\geq n+1]}$. On en déduit le critère suffisant pour transformer d' en d (montré dans [46] et [27, p.48, Prop. 4.1] pour le cas G_∞) :

Proposition A.4 *Soit $\mathfrak{h}$ un espace vectoriel gradué et $d' = \sum_{r=2}^{\infty} d'^{[r]}$ une structure F_∞ sur $\mathfrak{h}$. Si la cohomologie de $\big(\mathrm{Hom}(\mathbf{F}_\infty\mathfrak{h}, \mathfrak{h}[1])^{[\geq 2]}, [\ ,d]\big)$ s'annule, alors pour tout entier positif $n \geq 2$ il existe des applications $\psi'^{[n]} : \mathfrak{h}[1]^{[n]} \to \mathfrak{h}[1]$ de degré 0 telles que le morphisme $\overline{\psi'} : \mathbf{F}_\infty\mathfrak{h} \to \mathbf{F}_\infty\mathfrak{h}$ de F-cogèbres co-induit par $\psi' := \sum_{n=1} \psi'^{[n]}$ (avec $\psi'^{[1]} = \mathrm{id}_{\mathfrak{h}[1]}$) est un morphisme F_∞, i.e.*

$$\overline{\psi'}\ \overline{d} = \overline{d'}\ \overline{\psi'}.$$

Démonstration: On utilisera les abbréviations $\mathfrak{h}[1]^{[n]}$ et $\mathfrak{h}[1]^{[\leq n]}$ de la démonstration de la proposition A.3 précédente et $\psi'^{[\leq n]} := \psi'^{[1]} + \cdots + \psi'^{[n]}$. Pour un choix arbitraire des $\psi'^{[n]}$ on définit

$$\overline{R}(\psi') := \overline{\psi'}\ \overline{d} - \overline{d'}\ \overline{\psi'},$$

qui est une F-codérivation graduée : $\mathbf{F}_\infty\mathfrak{h} \to \mathbf{F}_\infty\mathfrak{h}$ de degré 1 le long de $\overline{\psi'}$. Puisque $\overline{d}\ \overline{d} = 0$ et $\overline{d'}\ \overline{d'} = 0$ on obtient l'identité

$$\overline{d'}\ \overline{R}(\psi') + \overline{R}(\psi')\ \overline{d} = 0. \qquad (*)$$

Puisque $d'^{[1]} = 0 = d^{[1]}$ il vient que $\overline{R}(\psi')(\mathfrak{h}[1]^{[\leq n+1]}) \subset \mathfrak{h}[1]^{[\leq n]}$ et donc $\overline{R}(\psi')|_{\mathfrak{h}[1]^{[\leq n+1]}}$ coïncide avec $\overline{R}(\psi'^{[\leq n]})|_{\mathfrak{h}[1]^{[\leq n+1]}}$. Le but est de construire les $\psi^{[n]}$ par récurrence telle que $\overline{R}(\psi'^{[\leq n]})|_{\mathfrak{h}[1]^{[\leq n+1]}} = 0$. Puisque d et d' s'annulent sur $\mathfrak{h}[1]$ et $d = d'^{[2]}$ il vient que $\overline{R}(\psi'^{[\leq 1]})$ s'annule sur $\mathfrak{h}^{[\leq 2]}$.
Supposons que l'on a choisi $\psi'^{[2]}, \ldots, \psi'^{[n]}$ telles que $\overline{R}(\psi'^{[\leq n]})|_{\mathfrak{h}[1]^{[\leq n+1]}} = 0$. Il vient que

$$\begin{aligned}
&\overline{R}(\psi'^{[\leq n+1]})|_{\mathfrak{h}[1]^{[n+2]}} = \\
&\quad \overline{R}(\psi'^{[\leq n]})|_{\mathfrak{h}[1]^{[n+2]}} + \psi'^{[n+1]}\ \overline{d}|_{\mathfrak{h}[1]^{[n+2]}} - d \circ_F \psi'^{[n+1]}|_{\mathfrak{h}[1]^{[n+2]}} \\
&\quad = \overline{R}(\psi'^{[\leq n]})|_{\mathfrak{h}[1]^{[n+2]}} + [\psi'^{[n+1]}, d]_F|_{\mathfrak{h}[1]^{[n+2]}}, \qquad (**)
\end{aligned}$$

car les monômes en $\psi'^{[1]}, \ldots, \psi'^{[n+1]}$ de $\overline{\psi'^{[\leq n+1]}}|_{\mathfrak{h}[1]^{[n+2]}}$ qui contiennent $\psi'^{[n+1]}$ ne contiennent que $\psi'^{[n+1]}$ et $\psi'^{[1]} = \mathrm{id}$, d'où l'apparition du terme $-d \circ_F \psi'^{[n+1]}|_{\mathfrak{h}[1]^{[n+2]}}$ dans $(**)$. Comme dans la démonstration précédente, on constate que $\overline{R}(\psi'^{[\leq n]})|_{\mathfrak{h}[1]^{[n+2]}}$ prend ses valeurs dans $\mathfrak{h}[1]$. On regarde la restriction de l'identité $(*)$ pour $\psi'^{[\leq n]}$ à l'espace $\mathfrak{h}[1]^{[n+3]}$. Puisque $\overline{d'}$ s'annule sur $\mathfrak{h}[1]$, la composition $\overline{d'}\ \overline{R}(\psi'^{[\leq n]})|_{\mathfrak{h}[1]^{[n+3]}}$ ne dépend que de la restriction de $\overline{R}(\psi'^{[\leq n]})$ à $\mathfrak{h}[1]^{[n+2]}$, et comme $\overline{d'}$ envoie $\mathfrak{h}[1]^{[n+3]}$ dans $\mathfrak{h}[1]^{[\leq n+2]}$ il vient

$$0 = d \circ_F \big(\overline{R}(\psi'^{[\leq n]})|_{\mathfrak{h}[1]^{[n+2]}}\big) + \big(\overline{R}(\psi'^{[\leq n]})|_{\mathfrak{h}[1]^{[n+2]}}\big) \circ_F d.$$

Il vient que $\big(\overline{R}(\psi'^{[\leq n]})|_{\mathfrak{h}[1]^{[n+2]}}\big)$ se trouve dans $\mathrm{Hom}(\mathbf{F}_\infty\mathfrak{h}, \mathfrak{h}[1])^{[\geq 2]}$ et dans le noyau de la codifférentielle $[\ ,d]_F$, et puisque la cohomologie était nulle, on trouve $\psi'^{[n+1]}$ pour annuler le membre de gauche dans l'équation $(**)$. □

Références

[1] André, M. : *Homologie des algèbres commutatives.* Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[2] Arnal, D., Manchon, D., Masmoudi, M. : *Choix des signes pour la formalité de Kontsevich.* Pacific J. Math. **203** (2002), 23-66, `math.QA/0003003`.

[3] Bayen, F., Flato, M., Frønsdal, C., Lichnerowicz, A., Sternheimer, D. : *Deformation Theory and Quantization.* Annals of Physics **111** (1978), part I : 61-110, part II : 111-151.

[4] Bordemann, M. : *(Bi)modules, morphismes et réductions des star-produits : le cas symplectique, feuilletages et obstructions*, `math.QA/` **0403334** (2004).

[5] M. Bordemann, G. Ginot, G. Halbout, H.-C. Herbig, S. Waldmann : *Star-représentations sur des sous-variétés co-isotropes*, `math.QA/0309321`, septembre 2003.

[6] Bordemann, M., Herbig, H.-C., Waldmann, S. : *BRST cohomology and Phase Space Reduction in Deformation Quantisation*, Commun.Math.Phys. **210** (2000), 107-144.

[7] M. Bordemann, S. Waldmann : *Formal GNS Construction and States in Deformation Quantization*, Comm. Math. Phys. **195** (1998), 549-583.

[8] Bursztyn, H., Waldmann, S. : *The characteristic classes of Morita equivalent star products on symplectic manifolds*. Commun. Math. Phys. **228** (2002), 103–121.

[9] Bursztyn, H., Waldmann, S. : *Completely positive inner products and strong Morita equivalence*. Preprint (FR-THEP 2003/12) **math. QA/0309402** (September 2003), 36 pages. To appear in Pacific J. Math.

[10] Bursztyn, H., Waldmann, S. : *Bimodule deformations, Picard groups and contravariant connections*. K-Theory **31** (2004), 1–37.

[11] Bursztyn, H. : *Semiclassical geometry of quantum line bundles and Morita equivalence of star products*. Int. Math. Res. Not. **2002**.16 (2002), 821–846.

[12] Bursztyn, H., Waldmann, S. : *Deformation Quantization of Hermitian Vector Bundles*. Lett. Math. Phys. **53** (2000), 349–365.

[13] Cartan, H., Eilenberg, S. : *Homological Algebra*. Princeton University Press, 1956.

[14] Cattaneo, A., Felder, G. : *Coisotropic Submanifolds in Poisson Geometry and Branes in the Poisson Sigma Model*. Dans : Gutt, S., Rawnsley, J. (eds.) : *The Euroconference PQR2003*, Lett. Math. Phys. **69** (special issue, 2004), 157-175.

[15] Cattaneo, A., Felder, G. : *Relative Formality Theorem and Quantisation of Coisotropic Submanifolds*. Prépublication `mat.QA/0501540`, janvier 2005.

[16] Cattaneo, A., Felder, G., Tomassini, L. : *From local to global deformation quantization of Poisson manifolds*. Duke Math. Journal **115** (2002), 329-352, `math.QA/0012228`.

[17] Connes, A. : *Noncommutative Differential Geometry*. Academic Press, San Diego, USA, 1994.

[18] Deligne, P. : *Letter to Stasheff, Gerstenhaber, May, Schechtman, Drinfel'd* (17 mai 1993).

[19] DeWilde, M., Lecomte, P. : *Existence of Star-Products and of Formal Deformations of the Poisson Lie Algebra of Arbitrary Symplectic Manifolds*. Lett. Math. Phys. **7** (1983), 487–496.

[20] Dolgushev, V. : *Covariant and Equivariant Formality Theorems*. Adv. Math. **191** (2005), 147-177, `math.QA/0307212`.

[21] Etingof, P., Kazhdan, D. : *Quantization of Lie bialgebras I*, Selecta Math., N.S. (2) **n.1** (1996), 1-41. *Quantization of Lie bialgebras II*, Selecta Math., N.S.(4) **n.2** (1998), 213-231, 233-269.

[22] Fedosov, B. : *Deformation Quantization and Index Theory*. Akademie Verlag, Berlin, 1996.

[23] Gerstenhaber, M. : *The Cohomology Structure of an Associative Ring*. Ann. Math. **78** (1963), 267-288.

[24] Gerstenhaber, M., Voronov, A. : *Homotopy G-algebras and moduli space operad*, Internat. Math. Res. Notices (1995), no. 3, 141–153

[25] Gerstenhaber, M., Voronov, A. : *Higher Operations on the Hochschild Complex*, Functional Analysis and Its Appl. **29** (1995), 1-5.

[26] Getzler, E., Jones, J.D.S. : *Operads, homotopy algebra, and iterated integrals for double loop spaces*. Prépublication `hep-th/9403055`, mars 1994.

[27] Ginot, G., Halbout, G. : *A deformed version of Tamarkin's formality Theorem*, A formality theorem for Poisson manifolds. Lett. Math. Phys. **66** (2003), no. 1-2, 37–64.

[28] Ginot, G. : *Homologie et modèle minimal des algèbres de Gerstenhaber*. Annales Math. Blaise Pascal **11** (2004), 95-127.

[29] Glößner, P. : *Star-Product Reduction for Coisotropic Submanifolds of Codimension 1*. Prépublication Faculté de Physique de l'Université de Freiburg FR-THEP-98/10, `math.QA/9805049`, mai 1998.

[30] Hochschild, G., Kostant, B., Rosenberg, A. : *Differential forms on regular affine algebras*. Trans. Am. Math. Soc. **102** (1962), 383-408.

[31] Kadeishvili, T. : *Structure of $A(\infty)$-algebra and Hochschild and Harrison cohomology*. Proc. of A.Razmadze Math.Inst. **91** (1988), 20-27, voir aussi `math.AT/0210331`

[32] Kontsevich, M. : *Deformation quantization of Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. **66** (2003), no. 3, 157–216.

[33] Lada, T., Stasheff, J. : *Introduction to SH Lie algebras for physicists.* Intern. J. Theoretical Physics **32** (1993), 1087-1103.

[34] Lefèvre-Hasegawa, K. : *Sur les A_∞-catégories.* Thèse de doctorat, Université Paris 7, 2003, `http ://www.institut.math.jussieu.fr/lefevre/`.

[35] Loday, J.-L. : *Cyclic homology*, Springer-Verlag 1992.

[36] Lu, J.-H. : *Moment Maps at the Quantum Level.* Commun. Math. Phys. **157** (1993), 389-404.

[37] Mac Lane, S. : *Homology.* Springer, Berlin, 1975.

[38] Markl, M., Shnider, S., Stasheff, J. : *Operads in Algebra, Topology and Physics.* AMS, Providence, R.I., 2002.

[39] Michaelis, W. : *Lie Coalgebras.* Adv. Math. **38** (1980), 1-54.

[40] Michaelis, W. : *The Dual Poincaré-Birkhoff-Witt Theorem.* Adv. Math. **57** (1985), 93-162.

[41] Nadaud, F. : *On continuous and differential Hochschild cohomology.* Lett. Math. Phys. **47** (1999), 85-95.

[42] Nijenhuis, A., Richardson, R. : *Deformations of Lie algebra structures.* J. Math. Mech **171** (1967), 89-105.

[43] Pflaum, M. : *On Continuous Hochschild Homology and Cohomology Groups.* Lett. Math. Phys. **44** (1998), 43-51.

[44] Stasheff, J.D. : *Homotopy associativity of H-spaces II*, Transactions of the AMS **108** (1963), 293-312.

[45] Sweedler, M. : *Hopf Algebras.* W.A.Benjamin, New York, 1969.

[46] Tamarkin, D. : *Another proof of M. Kontsevich formality theorem*, Preprint `math.QA/9803025` (1998).

[47] Waldmann, S. : *States and representations in deformation quantization.* Rev. Math. Phys. **17** (2005), 15–75.