TRESSAGES DES GROUPES DE POISSON
À DUAL QUASITRIANGULAIRE

FABIO GAVARINI[†] , GILLES HALBOUT[‡]

[†] Università di Roma "Tor Vergata", Dipartimento di Matematica – Roma, ITALY
[‡] Institut de Recherche Mathématique Avancée, ULP–CNRS – Strasbourg, FRANCE

ABSTRACT. Let $\mathfrak{g}$ be a quasitriangular Lie bialgebra over a field k of characteristic zero, and let $\mathfrak{g}^*$ be its dual Lie bialgebra. We prove that the formal Poisson group $F[[\mathfrak{g}^*]]$ is a braided Hopf algebra. More generally, we prove that if (U_h, R) is any quasitriangular QUEA, then $\Big({U_h}', Ad(R)\big|_{{U_h}' \otimes {U_h}'}\Big)$ — where ${U_h}'$ is defined by Drinfeld — is a braided QFSHA. The first result is then just a consequence of the existence of a quasitriangular quantization (U_h, R) of $U(\mathfrak{g})$ and of the fact that ${U_h}'$ is a quantization of $F[[\mathfrak{g}^*]]$.

Introduction

Soit $\mathfrak{g}$ une bigèbre de Lie sur un corps k de caractéristique zéro; notons $\mathfrak{g}^*$ la bigèbre de Lie duale de $\mathfrak{g}$ et $F[[\mathfrak{g}^*]]$ l'algèbre des fonctions sur le groupe de Poisson formel associé à $\mathfrak{g}^*$. Si $\mathfrak{g}$ est quasitriangulaire, munie d'une r–matrice r, cela donne à $\mathfrak{g}$ certaines propriétés additionnelles. Une question se pose alors: quelle nouvelle structure obtient-on sur la bigèbre duale $\mathfrak{g}^*$? Dans ce travail, nous allons montrer que l'algèbre de Hopf-Poisson topologique $F[[\mathfrak{g}^*]]$ est une algèbre tressée (nous donnerons la définition plus loin). Cela avait été démontré pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,k)$ par Reshetikhin (cf. [Re]), et généralisé au cas où $\mathfrak{g}$ est de Kac-Moody de type fini (cf. [G1]) ou de type affine (cf. [G2]) par le premier auteur.

Pour démontrer le résultat, nous allons utiliser les quantifications d'algèbres enveloppantes. D'après Etingof-Kazhdan (cf. [EK]), toute bigèbre de Lie admet une quantification $U_h(\mathfrak{g})$, à savoir une algèbre de Hopf (topologique) sur $k[[h]]$ dont la spécialisation à $h=0$ est isomorphe à $U(\mathfrak{g})$ comme algèbre de Hopf co-Poisson; de plus, si $\mathfrak{g}$ est quasitriangulaire et r est sa r–matrice, alors il existe une quantification $U_h(\mathfrak{g})$ qui est aussi quasitriangulaire, en tant qu'algèbre de Hopf, munie d'une R–matrice $R_h \in U_h(\mathfrak{g}) \otimes U_h(\mathfrak{g})$ telle que $R_h \equiv 1 + r\,h \mod h^2$ (où l'on identifie les espaces vectoriels $U_h(\mathfrak{g})$ et $U(\mathfrak{g})[[h]]$).

D'après Drinfel'd (*cf.* [Dr]), pour toute algèbre enveloppante universelle quantifiée U, on peut définir une sous-algèbre de Hopf U' telle que, si la limite semi-classique de U est $U(\mathfrak{g})$ (avec $\mathfrak{g}$ une bigèbre de Lie), alors la limite semi-classique de U' est $F[[\mathfrak{g}^*]]$. Dans notre cas,

---

1991 *Mathematics Subject Classification:* Primary 17B37, 81R50

Le premier auteur a eté en partie financ'e par une bourse du *Consiglio Nazionale delle Ricerche* (Italy)

si l'on considère $U_h(\mathfrak{g})'$, on peut remarquer que la R–matrice n'appartient pas, *a priori*, à $U_h(\mathfrak{g})' \otimes U_h(\mathfrak{g})'$; néanmoins, nous prouvons que son action adjointe $\mathfrak{R}_h := \mathrm{Ad}(R_h) : U_h(\mathfrak{g}) \otimes U_h(\mathfrak{g}) \longrightarrow U_h(\mathfrak{g}) \otimes U_h(\mathfrak{g})$, $x \otimes y \mapsto R_h \cdot (x \otimes y) \cdot R_h^{-1}$, stabilise $U_h(\mathfrak{g})' \otimes U_h(\mathfrak{g})'$, donc induit par spécialisation un opérateur $\mathfrak{R}_0$ sur $F[[\mathfrak{g}^*]] \otimes F[[\mathfrak{g}^*]]$. Enfin, les propriétés qui font de R_h une R–matrice font de $\mathfrak{R}_h$ un opérateur de tressage, donc il en est de même pour $\mathfrak{R}_0$: ainsi, la paire $\big(F[[\mathfrak{g}^*]], \mathfrak{R}_0\big)$ est une algèbre tressée.

REMERCIEMENTS

Les auteurs tiennent à remercier M. Rosso et C. Kassel pour de nombreux entretiens.

§ 1. Définitions et rappels

1.1 Les objects classiques. Soit k un corps fixé de caractéristique zero. Dans la suite k sera le corps de base de tous les objets — algèbres et bigèbres de Lie, algèbres de Hopf, etc. — que nous introduirons.

Suivant [CP], §1.3, nous appellons bigèbre de Lie une paire $(\mathfrak{g}, \delta_\mathfrak{g})$ où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie et $\delta_\mathfrak{g}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ est une application linéaire antisymétrique — dite cocrochet de Lie — telle que son dual $\delta_\mathfrak{g}^*\colon \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ soit un crochet de Lie et que δ_g elle même soit un 1-cocycle de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Le dual linéaire $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ est alors à son tour une bigèbre de Lie. Suivant [CP], §2.1.B, nous appelons bigèbre de Lie quasitriangulaire une paire $(\mathfrak{g}, r)$ telle que $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ soit solution de l'équation de Yang-Baxter classique (CYBE) $[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0$ dans $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}$ soit une bigèbre de Lie par rapport au cocrochet $\delta = \delta_\mathfrak{g}$ defini par $\delta(x) = [x, r]$; l'élément r est alors appelé r–matrice de $\mathfrak{g}$.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, son algèbre enveloppante universelle $U(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Hopf; si de plus $\mathfrak{g}$ est une bigèbre de Lie, alors $U(\mathfrak{g})$ est en fait une algèbre de Hopf co-Poisson (cf. [CP], §6.2.A).

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie quelconque: on appelle algèbre de fonctions sur le groupe formel associé à $\mathfrak{g}$, ou tout simplement groupe formel associé à $\mathfrak{g}$, l'espace $F[[\mathfrak{g}]] := \ U(\mathfrak{g})^*$ dual linéaire de $U(\mathfrak{g})$. Comme $U(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Hopf, son dual $F[[\mathfrak{g}]]$ est une algèbre de Hopf formelle (suivant [Di], Ch. 1). Remarquons que si G est un groupe algébrique connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et $F[G]$ est l'algèbre de Hopf des fonctions regulières sur G, et si $\mathfrak{m}_e$ est l'idéal maximal dans $F[G]$ des fonctions qui s'annulent au point unité $e \in G$, alors l'algèbre de Hopf formelle $F[[\mathfrak{g}]]$ n'est rien d'autre que la complétion $\mathfrak{m}_e$–adique de $F[G]$ (cf. [On], Ch. I). Lorsque, de plus, $\mathfrak{g}$ est une bigèbre de Lie, $F[[\mathfrak{g}]]$ est en fait une algèbre de Hopf-Poisson (cf. [CP], §6.2.A) formelle.

1.2 Tressages et quasitriangularité. Soit H une algèbre de Hopf dans une catégorie tensorielle $(\mathcal{A}, \otimes)$ (cf. [CP], §5): H est dite tressée (cf. [Re], Définition 2) s'il existe un automorphisme d'algèbre $\mathfrak{R}$ de $H \otimes H$, appelé opérateur de tressage de H, différent de la volte $\sigma\colon a \otimes b \mapsto b \otimes a$ et vérifiant

$$\mathfrak{R} \circ \Delta = \Delta^{\mathrm{op}}$$

$$(\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{13} \circ \mathfrak{R}_{23} \circ (\Delta \otimes \mathrm{Id}) \, , \qquad (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{13} \circ \mathfrak{R}_{12} \circ (\mathrm{Id} \otimes \Delta)$$

où $\Delta^{\mathrm{op}} = \sigma \circ \Delta$ et $\mathfrak{R}_{12}$, $\mathfrak{R}_{13}$ et $\mathfrak{R}_{23}$ sont les automorphismes de $H \otimes H \otimes H$ définis par $\mathfrak{R}_{12} = \mathfrak{R} \otimes \mathrm{Id}$, $\mathfrak{R}_{23} = \mathrm{Id} \otimes \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_{13} = (\sigma \otimes \mathrm{Id}) \circ (\mathrm{Id} \otimes \mathfrak{R}) \circ (\sigma \otimes \mathrm{Id})$.

Enfin, dans le cas où H est, de plus, une algèbre de Hopf Poisson, nous dirons que cette algèbre est tressée en tant qu'algèbre de Hopf Poisson si elle est tressée en tant qu'algèbre de Hopf — par un tressage qui est aussi un automorphisme d'algèbre de Poisson.

Si la paire $(H, \mathfrak{R})$ est une algèbre tressée, il résulte de la définition que $\mathfrak{R}$ vérifie l'équation de Yang-Baxter quantique — QYBE dans la suite — dans $\mathrm{End}(H^{\otimes 3})$, à savoir

$$\mathfrak{R}_{12} \circ \mathfrak{R}_{13} \circ \mathfrak{R}_{23} = \mathfrak{R}_{23} \circ \mathfrak{R}_{13} \circ \mathfrak{R}_{12}$$

ce qui entraîne que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le groupe des tresses $\mathcal{B}_n$ agit sur $H^{\otimes n}$; on peut ensuite alors obtenir des invariants de noeuds, selon la recette donnée en [CP], §15.12.

Une algèbre de Hopf H (dans une categorie tensorielle) est dite quasitriangulaire (cf. [Dr], [CP]) s'il existe un élément inversible $R \in H \otimes H$, appelé R–matrice de H, tel que

$$R \cdot \Delta(a) \cdot R^{-1} = \mathrm{Ad}(R)(\Delta(a)) = \Delta^{\mathrm{op}}(a)$$
$$(\Delta \otimes \mathrm{Id})(R) = R_{13} R_{23} \ , \qquad (\mathrm{Id} \otimes \Delta)(R) = R_{13} R_{12}$$

où R_{12}, R_{13} et R_{23} sont des éléments de $H^{\otimes 3}$ définis par $R_{12} = R \otimes 1$, $R_{23} = 1 \otimes R$ et $R_{13} = (\sigma \otimes \mathrm{Id})(R_{23}) = (\mathrm{Id} \otimes \sigma)(R_{12})$. Il résulte alors des identités ci-dessus que R vérifie la QYBE dans $H^{\otimes 3}$, i.e.

$$R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12} \ .$$

Ainsi, les produits tensoriels de H–modules sont munis d'une action du groupe des tresses. En outre, il est clair que si (H, R) est quasitriangulaire, alors $\big(H, \mathrm{Ad}(R)\big)$ est tressée.

1.3 Les objects quantiques. Soit $\mathcal{A}$ la catégorie dont les objets sont les $k[[h]]$–modules topologiquement libres et complets au sens h–adique, et les morphismes sont les applications $k[[h]]$–linéaires continues. Pour tous V, W dans $\mathcal{A}$, définissons $V \otimes W$ comme étant la limite projective des $k[[h]]\big/(h^n)$–modules $\big(V/h^n V\big) \otimes_{k[[h]]/(h^n)} \big(W/h^n W\big)$: cela fait de $\mathcal{A}$ une catégorie tensorielle (voir [CP] pour plus de details). D'après Drinfel'd (cf. [Dr]), on appelle algèbre enveloppante universelle quantifiée — QUEA dans la suite — toute algèbre de Hopf dans la catégorie $\mathcal{A}$ dont la limite semi-classique (i.e. la spécialisation en $h = 0$) est l'algèbre enveloppante universelle d'une bigèbre de Lie. De même, on appelle algèbre de Hopf de séries formelles quantiques — QFSHA dans la suite — toute algèbre de Hopf dans la catégorie $\mathcal{A}$ dont la limite semi-classique est l'algèbre de fonctions sur un groupe formel.

Dans la suite, nous aurons besoin du résultat suivant:

Théorème 1.4. *(cf. [EK]) Soit $\mathfrak{g}$ une bigèbre de Lie. Il existe une QUEA $U_h(\mathfrak{g})$ dont la limite semi-classique est isomorphe à $U(\mathfrak{g})$; en outre, il existe un isomorphisme de $k[[h]]$–modules tel que $U_h(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g})[[h]]$.*

De plus, si $(\mathfrak{g}, r)$ est quasitriangulaire, alors il existe une QUEA $U_h(\mathfrak{g})$ comme ci-dessus et un élément $R_h \in U_h(\mathfrak{g}) \otimes U_h(\mathfrak{g})$ tels que $\big(U_h(\mathfrak{g}), R_h\big)$ soit une algèbre de Hopf quasitriangulaire et $R_h = 1 + r\,h + O\left(h^2\right)$ (avec $O\left(h^2\right) \in h^2 \cdot H \otimes H$). $\square$

1.5 Le foncteur de Drinfeld. Soit H une algèbre de Hopf sur $k[[h]]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $\Delta^n \colon H \longrightarrow H^{\otimes n}$ par $\Delta^0 := \epsilon$, $\Delta^1 := \mathrm{Id}_H$ et $\Delta^n := \big(\Delta \otimes \mathrm{Id}_H^{\otimes (n-2)}\big) \circ \Delta^{n-1}$ si $n > 2$. Pour tout sous-ensemble ordonné $\Sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ avec $i_1 < \cdots < i_k$, on définit l'homomorphisme $j_\Sigma \colon H^{\otimes k} \longrightarrow H^{\otimes n}$ par $j_\Sigma(a_1 \otimes \cdots \otimes a_k) := b_1 \otimes \cdots \otimes b_n$

avec $b_i := 1$ si $i \notin \Sigma$ et $b_{i_m} := a_m$ pour $1 \leq m \leq k$; on pose alors $\Delta_\Sigma := j_\Sigma \circ \Delta^k$. On définit aussi $\delta_n \colon H \longrightarrow H^{\otimes n}$ par $\delta_n := \sum_{\Sigma \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{n-|\Sigma|} \Delta_\Sigma$, pour tout $n \in \mathbb{N}_+$, et plus géneralement, pour tout $\Sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, avec $i_1 < \cdots < i_k$, on définit

$$\delta_\Sigma := \sum_{\Sigma' \subseteq \Sigma} (-1)^{|\Sigma|-|\Sigma'|} \Delta_{\Sigma'} \ . \tag{1.1}$$

En particulier, $\delta_{\{1,\dots,n\}} = \delta_n$. Grâce au principe d'inclusion-exclusion, ceci équivaut à

$$\Delta_\Sigma = \sum_{\Sigma' \subseteq \Sigma} \delta_{\Sigma'} \tag{1.2}$$

pour tout $\Sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ avec $i_1 < \cdots < i_k$. Enfin on définit le sous-espace

$$H' := \left\{ a \in H \,\middle|\, \delta_n(a) \in h^n H^{\otimes n} \right\} ,$$

de H que nous considèrerons muni de la topologie induite. Nous avons alors le

Théorème 1.6. *(cf. [Dr], §7, ou [G3]) Soit H une algèbre de Hopf dans la catégorie $\mathcal{A}$. Alors H' est une QFSHA. De plus, si $H = U_h(\mathfrak{g})$ est une QUEA ayant $U(\mathfrak{g})$ comme limite semi-classique, alors la limite semi-classique de $U_h(\mathfrak{g})'$ est $F[[\mathfrak{g}^*]]$.* $\square$

§ 2. Les résultats principaux

Du point de vue technique, le résultat principal de cet article concerne le cadre général des algèbres de Hopf quasitriangulaires:

Théorème 2.1. *Soit H une algèbre de Hopf quasitriangulaire dans la catégorie $\mathcal{A}$, et soit R sa R–matrice. Alors, l'automorphisme interieur $\mathrm{Ad}(R) \colon H \otimes H \to H \otimes H$ se restreint en un automorphisme de $H' \otimes H'$. La paire $\Big(H', \, \mathrm{Ad}(R)\big|_{H' \otimes H'} \Big)$ est donc une algèbre de Hopf tressée dans la catégorie $\mathcal{A}$.* $\square$

La preuve de ce théorème sera donnée dans le paragraphe 3. Mais nous pouvons déjà en tirer comme conséquence le résultat principal annoncé par le titre et dans l'introduction, qui nous donne une interprétation géometrique de la r–matrice classique:

Théorème 2.2. *Soit $\mathfrak{g}$ une bigèbre de Lie quasitriangulaire. Alors l'algèbre de Hopf Poisson topologique $F[[\mathfrak{g}^*]]$ est tressée. En outre, il existe une quantification de $F[[\mathfrak{g}^*]]$ qui est une algèbre de Hopf tressée dont l'opérateur de tressage se spécialise en celui de $F[[\mathfrak{g}^*]]$.*

Preuve. Soit r la r–matrice de $\mathfrak{g}$. D'après le Théorème 1.4, il existe une QUEA quasitriangulaire $\big(U_h(\mathfrak{g}), R_h \big)$ dont la limite semi-classique est exactement $\big(U(\mathfrak{g}), \, r \big)$ à savoir, $U_h(\mathfrak{g}) \big/ h \, U_h(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g})$ et $(R-1)\big/h \equiv r \mod h \, U_h(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$. Par le Théorème 1.6, la limite semi-classique de $U_h(\mathfrak{g})'$ est $F[[\mathfrak{g}^*]]$. Soit $\mathfrak{R}_h := \mathrm{Ad}(R_h)$; le Théorème 2.1 nous assure que $\Big(U_h(\mathfrak{g})' , \, \mathfrak{R}_h\big|_{U_h(\mathfrak{g})' \otimes U_h(\mathfrak{g})'} \Big)$ est une algèbre de Hopf tressée, donc sa limite semi-classique $\bigg(F[[\mathfrak{g}^*]], \, \Big(\mathfrak{R}_h\big|_{U_h(\mathfrak{g})' \otimes U_h(\mathfrak{g})'} \Big) \Big|_{h=0} \bigg)$ est tressée aussi. De plus, comme $\mathfrak{R}_h$ est un automorphisme d'algèbre et le crochet de Poisson de $F[[\mathfrak{g}^*]]$ est donné par $\{a,b\} = \big([\alpha,\beta]/h\big)\big|_{h=0}$ pour tout $a,\, b \in F[[\mathfrak{g}^*]]$ et $\alpha,\, \beta \in {U_h(\mathfrak{g})}'$ tels que $\alpha|_{h=0} = a$, $\beta|_{h=0} = b$, nous avons que $\Big(\mathfrak{R}_h\big|_{U_h(\mathfrak{g})' \otimes U_h(\mathfrak{g})'}\Big)\Big|_{h=0}$ est aussi un automorphisme d'algèbre de Poisson. $\square$

Le théorème ci-dessus donne donc une interprétation géométrique de la r–matrice d'une bigèbre de Lie quasitriangulaire. Ce même résultat avait été démontré pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,k)$ par Reshetikhin (cf. [Re]), et généralisé par le premier auteur au cas où $\mathfrak{g}$ est de Kac-Moody de type fini (cf. [G1], où une analyse plus précise est effectuée) ou de type affine (cf. [G2]).

Le Théorème 2.2 a aussi une conséquence importante. Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ comme ci-dessus, soit $\mathfrak{R}$ le tressage de $F[[\mathfrak{g}^*]]$, et soit $\mathfrak{e}$ l'idéal maximal (unique) de $F[[\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*]] = F[[\mathfrak{g}^*]] \otimes F[[\mathfrak{g}^*]]$ (produit tensoriel topologique, selon [Di], Ch. 1). Puisque $\mathfrak{R}$ est un automorphisme d'algèbre, $\mathfrak{R}(\mathfrak{e}) = \mathfrak{e}$ et $\mathfrak{R}$ induit un automorphisme d'éspace vectoriel $\overline{\mathfrak{R}}$: $\mathfrak{e}/\mathfrak{e}^2 \to \mathfrak{e}/\mathfrak{e}^2$; or $\mathfrak{e}/\mathfrak{e}^2 \cong \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$, donc puisque $\mathfrak{R}$ est aussi un automorphisme d'algèbre de Poisson, la restriction $\overline{\mathfrak{R}}$ est un automorphisme d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} = \mathfrak{e}/\mathfrak{e}^2$; l'automorphisme $\overline{\mathfrak{R}}$ hérite aussi des autres propiétés du tressage $\mathfrak{R}$. Enfin, le dual $\overline{\mathfrak{R}}^*$: $\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*$ est un automorphisme de cogèbre de Lie de $\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*$, doté lui aussi de plusieurs autres proprietés duales de celles de $\overline{\mathfrak{R}}$. En particulier, $\mathfrak{R}$, $\overline{\mathfrak{R}}$ et $\overline{\mathfrak{R}}^*$ sont solutions de la QYBE. Il existe donc une action du groupe des tresses $\mathcal{B}_n$ sur $F[[\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*]]^{\otimes n}$, sur $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g})^{\otimes n}$, et sur $(\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*)^{\otimes n}$ $(n \in \mathbb{N})$, dont on peut tirer des invariants de noeuds (selon [CP], §15.12).

De tels automorphismes de $\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*$ et de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ ont étés introduits dans [WX], §9; leur construction est liée à la "R–matrice globale", qui donne aussi une interprétation géométrique de la r–matrice classique. Il conviendrait alors de comparer nos résultats et ceux de [WX] et d'étudier parallèlement les proprietés de fonctorialité de notre construction: tout cela fera l'objet d'un article à suivre.

§ 3. Démonstration du théorème 2.1

Dans cette section (H,R) sera une algèbre de Hopf quasitriangulaire comme dans l'énoncé du Théorème 2.1. Nous voulons étudier l'action adjointe de R sur $H \otimes H$, où cette dernière est munie de sa structure naturelle d'algèbre de Hopf; nous noterons par $\tilde{\Delta}$ son coproduit, défini par $\tilde{\Delta} := \sigma_{23} \circ (\Delta \otimes \mathrm{Id}_H \otimes \mathrm{Id}_H) \circ (\mathrm{Id}_H \otimes \Delta)$ où σ_{23} désigne la volte dans les positions 2 et 3. Nous noterons aussi $I := 1 \otimes 1$ l'unité dans $H \otimes H$. Selon notre définition du produit tensoriel en $\mathcal{A}$, on a $(H \otimes H)' = H' \otimes H'$. Notre but est de montrer que, bien que R n'appartienne pas forcément à $(H \otimes H)'$, son action adjointe $a \mapsto R \cdot a \cdot R^{-1}$ laisse stable $(H \otimes H)' = H' \otimes H'$.

Posons tout d'abord, pour $\Sigma = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, toujours avec $i_1 < \cdots < i_k$:

$$R_\Sigma := R_{2i_1-1,2i_k} R_{2i_1-1,2i_{k-1}} \cdots R_{2i_1-1,2i_1} R_{2i_2-1,2i_k} \cdots R_{2i_{k-1}-1,2i_k} R_{2i_k-1,2i_1} \cdots R_{2i_k-1,2i_1}$$

(produit de k^2 termes) où $R_{r,s} := j_{\{r,s\}}(R)$, en définissant $j_{\{r,s\}}$: $H \otimes H \longrightarrow H^{\otimes 2n}$ comme précédemment. Nous noterons toujours $|\Sigma|$ pour le cardinal de Σ (ici $|\Sigma| = k$).

Lemme 3.1. *Dans $(H \otimes H)^{\otimes n}$, pour tout $\Sigma \subseteq \{1, \dots, n\}$, on a: $\tilde{\Delta}_\Sigma(R) = R_\Sigma$.*

Preuve. Sans perdre de généralité, nous démontrerons le résultat pour $\Sigma = \{1, \dots, n\}$, i.e.

$$\tilde{\Delta}_{\{1,\dots,n\}}(R) = R_{\{1,\dots,n\}} = R_{1,2n} \cdot R_{1,2n-2} \cdots R_{1,2} \cdot R_{3,2n} \cdots R_{2n-3,2} \cdot R_{2n-1,2n} \cdots R_{2n-1,2}\,.$$

Le résultat est évident au rang $n = 1$. Supposons le acquis au rang n, et montrons le au rang $n+1$; par définition de $\tilde{\Delta}$ et par les propriétés de la R–matrice on a

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_{\{1,\dots,n+1\}}(R) &= \Big(\tilde{\Delta} \otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H}{}^{\otimes n-1}\Big)\big(\tilde{\Delta}_{\{1,\dots,n\}}(R)\big) = \Big(\tilde{\Delta} \otimes \mathrm{Id}_{H\otimes H}{}^{\otimes n-1}\Big)\big(R_{\{1,\dots,n\}}\big) \\
&= \sigma_{23}\big(\Delta \otimes \mathrm{Id}_H^{\otimes 2n}\big)\Big(\mathrm{Id}_H \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id}_H^{\otimes 2(n-1)}\Big)\big(R_{1,2n} \cdots R_{1,2} \cdots R_{3,2} \cdots R_{2n-1,2}\big) \\
&= \sigma_{23}\big(\Delta \otimes \mathrm{Id}_H^{\otimes 2n}\big)\left(R_{1,2n+1} \cdots R_{1,3}R_{1,2} \cdots R_{4,3}R_{4,2} \cdots R_{2n,3}R_{2n,2}\right) \\
&= \sigma_{23}\big(R_{1,2n+2}R_{2,2n+2} \cdots R_{1,4}R_{2,4}R_{1,3}R_{2,3} \cdots R_{5,4}R_{5,3} \cdots R_{2n+1,4}R_{2n+1,3}\big) \\
&= R_{1,2n+2}R_{3,2n+2} \cdots R_{1,4}R_{3,4} \cdot R_{1,2}R_{3,2} \cdots R_{5,4} \cdot R_{5,2} \cdots R_{2n+1,4}R_{2n+1,2} \\
&= R_{1,2n+2} \cdots R_{1,4}R_{1,2}R_{3,2n+2} \cdots R_{3,4}R_{3,2} \cdots R_{5,4}R_{5,2} \cdots R_{2n+1,4}R_{2n+1,2} \\
&= R_{\{1,\dots,n+1\}}\,, \quad \text{q.e.d.} \quad \square
\end{aligned}$$

Dorénavant pour tout, $a,\, b \in \mathbb{N}$, nous utiliserons la notation C_b^a pour désigner l'entier $\binom{b}{a} := \frac{b!}{a!(b-a)!} \in \mathbb{N}$.

Lemme 3.2. *Pour tout $a \in \big(H \otimes H\big)'$, et pour tout ensemble Σ tel que $|\Sigma| > i$, on a*

$$\tilde{\Delta}_\Sigma(a) = \sum_{\Sigma' \subseteq \Sigma,\ |\Sigma'| \leq i} (-1)^{i-|\Sigma'|}\, C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{i-|\Sigma'|}\, \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) + O\big(h^{i+1}\big)\,.$$

Preuve. Il suffit de prouver l'énoncé pour $\Sigma = \{1,\dots,n\}$, avec $n > i$. Grâce à (1.2), on a

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_{\{1,\dots,n\}}(a) &= \sum_{\bar{\Sigma} \subseteq \{1,\dots,n\}} \delta_{\bar{\Sigma}}(a) = \sum_{\bar{\Sigma} \subseteq \{1,\dots,n\},\ |\bar{\Sigma}| \leq i} \delta_{\bar{\Sigma}}(a) + O\big(h^{i+1}\big) \\
&= \sum_{\bar{\Sigma} \subseteq \{1,\dots,n\},\ |\bar{\Sigma}| \leq i}\ \sum_{\Sigma' \subseteq \bar{\Sigma}} (-1)^{|\bar{\Sigma}|-|\Sigma'|}\, \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) + O\big(h^{i+1}\big) \\
&= \sum_{\Sigma' \subseteq \{1,\dots,n\},\ |\Sigma'| \leq i} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) \sum_{\Sigma' \subseteq \bar{\Sigma},\ |\bar{\Sigma}| \leq i} (-1)^{|\bar{\Sigma}|-|\Sigma'|} + O\big(h^{i+1}\big) \\
&= \sum_{\Sigma' \subseteq \{1,\dots,n\},\ |\Sigma'| \leq i} \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a)\, (-1)^{i-|\Sigma'|}\, C_{n-1-|\Sigma'|}^{i-|\Sigma'|} + O\big(h^{i+1}\big)\,, \quad \text{q.e.d.} \quad \square
\end{aligned}$$

Avant de nous attaquer au résultat principal, il nous faut encore un petit rappel technique sur les coefficients du binôme: on peut le prouver facilement en utilisant le développement en série formelle de $(1-X)^{-(r+1)}$, à savoir $(1-X)^{-(r+1)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_{k+r}^{r} X^k$.

Lemme 3.3. *Soient $r,\, s,\, t \in \mathbb{N}$ tels que $r < t$. On a alors les relations suivantes (où l'on pose $C_u^v := 0$ si $v > u$):*

$$(a) \quad \sum_{d=0}^{t} (-1)^d\, C_{d-1}^{r}\, C_t^d = -(-1)^r\,, \qquad (b) \quad \sum_{d=0}^{t} (-1)^d\, C_{d+s}^{r}\, C_t^d = 0\,. \quad \square$$

Voici enfin le résultat principal de cette section:

Proposition 3.4. *Pour tout* $a \in \big(H \otimes H\big)'$ *, nous avons* $R\,a\,R^{-1} \in \big(H \otimes H\big)'$ *.*

Preuve. Comme nous devons montrer que $R\,a\,R^{-1}$ appartient à $\big(H \otimes H\big)'$, nous devons considérer les termes $\delta_n\big(R\,a\,R^{-1}\big)$, $n \in \mathbb{N}$. Pour cela réécrivons $\delta_{\{1,\dots,n\}}\big(R\,a\,R^{-1}\big)$ en utilisant le Lemme 3.1 et le fait que $\tilde{\Delta}$, et plus généralement $\tilde{\Delta}_{\{i_1,\dots,i_k\}}$ (pour $k \leq n$), est un morphisme d'algèbre: $\delta_{\{1,\dots,n\}}\,\big(R\,a\,R^{-1}\big) = \sum\limits_{\Sigma \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{n-|\Sigma|} R_\Sigma\,\tilde{\Delta}_\Sigma(a)\,R_\Sigma^{-1}$.

Nous allons démontrer par récurrence sur i que

$$\delta_{\{1,\dots,n\}}\,\big(R\,a\,R^{-1}\big) = O\big(h^{i+1}\big) \qquad \text{pour tout} \quad 0 \leq i \leq n-1 \,. \tag{$\star$}$$

Autrement dit, on verra que tous les termes du développement limité à l'ordre $n-1$ sont nuls, donc $\delta_n\,\big(R\,a\,R^{-1}\big) = O(h^n)$, d'où notre énoncé.

Pour $i=0$, on a, pour chaque Σ , $\tilde{\Delta}_\Sigma(a) = \epsilon(a) I^{\otimes n} + O(h)$, $R_\Sigma = I^{\otimes n} + O(h)$, et aussi $R_\Sigma^{-1} = I^{\otimes n} + O(h)$, d'où $\delta_{\{1,\dots,n\}}\,\big(R\,a\,R^{-1}\big) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} \epsilon(a)\, I^{\otimes n} + O(h) = O(h)$, donc le résultat $(\star)$ est vrai pour $i=0$.

Supposons le résultat $(\star)$ acquis pour tout $i' < i$. Écrivons les développements h–adiques de R_Σ et R_Σ^{-1} sous la forme $R_\Sigma = \sum_{\ell=0}^{\infty} R_\Sigma^{(\ell)}\,h^\ell$ et $R_\Sigma^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} R_\Sigma^{(-m)}\,h^m$. Par la proposition précédente, nous avons une approximation de $\tilde{\Delta}_\Sigma(a)$ à l'ordre j:

$$\tilde{\Delta}_\Sigma(a) \;=\; \sum_{\Sigma' \subseteq \Sigma,\; |\Sigma'| \leq j} (-1)^{j-|\Sigma'|}\, C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|}\, \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a) + O\big(h^{j+1}\big) \,.$$

Nous avons alors l'approximation de $\delta_{\{1,\dots,n\}}\,\big(R\,a\,R^{-1}\big)$ suivante:

$$\delta_{\{1,\dots,n\}}\,\big(R\,a\,R^{-1}\big) = \sum_{\Sigma \subseteq \{1,\dots,n\}}\; \sum_{\ell+m \leq i} (-1)^{n-|\Sigma|}\, R_\Sigma^{(\ell)}\, \tilde{\Delta}_\Sigma(a)\, R_\Sigma^{(-m)}\, h^{\ell+m} + O\big(h^{i+1}\big) =$$

$$= \sum_{j=0}^{i} \sum_{\ell+m=i-j} \Bigg(\sum_{\substack{\Sigma \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |\Sigma| > j}}\; \sum_{\substack{\Sigma' \subseteq \Sigma \\ |\Sigma'| \leq j}} (-1)^{n-|\Sigma|}\, (-1)^{j-|\Sigma'|}\, C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|}\, R_\Sigma^{(\ell)}\, \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a)\, R_\Sigma^{(-m)} + \\ + \sum_{\substack{\Sigma \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |\Sigma| \leq j}} (-1)^{n-|\Sigma|}\, R_\Sigma^{(\ell)}\, \tilde{\Delta}_\Sigma(a)\, R_\Sigma^{(-m)} \Bigg)\, h^{\ell+m} + O\big(h^{i+1}\big) =$$

$$= \sum_{j=0}^{i} \sum_{\ell+m+j=i}\; \sum_{\substack{\Sigma' \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |\Sigma'| \leq j}} \Bigg(\sum_{\substack{\Sigma \subseteq \{1,\dots,n\} \\ \Sigma' \subseteq \Sigma,\; |\Sigma| > j}} (-1)^{n-|\Sigma|}\, (-1)^{j-|\Sigma'|}\, C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|}\, R_\Sigma^{(\ell)}\, \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a)\, R_\Sigma^{(-m)} + \\ + (-1)^{n-|\Sigma'|}\, R_{\Sigma'}^{(\ell)}\, \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a)\, R_{\Sigma'}^{(-m)} \Bigg)\, h^{\ell+m} + O\big(h^{i+1}\big) \,.$$

Nous noterons (E) la dernière expression entre parenthèse, et nous montrerons que cette expression est nulle, d'où $\delta_n\,\big(R\,a\,R^{-1}\big) = O\big(h^{i+1}\big)$.

Regardons d'abord les termes correspondant à $\ell + m = 0$, c'est-à-dire $j = i$. On retrouve alors $\delta_{\{1,\dots,n\}}(a)$, qui est dans $O\big(h^{i+1}\big)$ par hypothèse. Dans la suite du calcul nous supposerons désormais $\ell + m > 0$.

Regardons maintenant comment les termes $R_\Sigma^{(\ell)}$ et $R_\Sigma^{(-m)}$ agissent sur $\big(H \otimes H\big)'^{\otimes n}$ (respectivement à gauche et à droite) pour $\ell + m$ fixé (et positif), disons $\ell + m = S$. En faisant le développement limité de chaque $R_{i,j}$ qui apparaît dans R_Σ, on voit que $R_\Sigma^{(\ell)}$ et $R_\Sigma^{(-m)}$ sont sommes de produits d'au plus ℓ et m termes respectivement, chacun agissant sur au plus deux facteurs tensoriels de $\big(H \otimes H\big)'^{\otimes n}$. Nous allons réécrire $\sum_{\ell+m=S} R_\Sigma^{(\ell)}\, \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a)\, R_\Sigma^{(-m)}$ en regroupant les termes de la somme qui agissent sur les mêmes facteurs de $\big(H \otimes H\big)'^{\otimes n}$, facteurs dont nous identifierons les positions par Σ''.

Si i appartient à Σ'', dans l'identification $(H \otimes H)^{\otimes n} = H^{\otimes 2n}$ (telle qu'on l'a choisie pour définir R_Σ) l'indice i correspond à la paire $(2i-1, 2i)$; mais alors R_Σ et R_Σ^{-1}, et donc aussi chaque $R_\Sigma^{(\ell)}$ et chaque $R_\Sigma^{(-m)}$, n'agissent de manière non triviale sur le i–ème facteur de $\tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a)$ que si, dans l'écriture explicite de R_Σ, un terme non trivial apparait aux places $2i-1$ ou $2i$, donc seulement si $i \in \Sigma$: ainsi $\Sigma'' \subseteq \Sigma$. Nous posons alors

$$\sum_{\ell+m=S} R_\Sigma^{(\ell)}\, \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a)\, R_\Sigma^{(-m)} = \sum_{\Sigma'' \subseteq \Sigma} A^{(S)}_{\Sigma',\Sigma,\Sigma''}(a)\,.$$

Maintenant considérons $\bar{\Sigma} \supseteq \Sigma$. D'après la définition on a $R_{\bar{\Sigma}} = R_\Sigma + \mathcal{A}$, où $\mathcal{A}$ est une somme de termes qui contiennent des facteurs $R^{(s)}_{2i-1,2j}$ avec $\{i,j\} \not\subseteq \Sigma$: pour ce voir, il suffit de développer chaque facteur $R_{a,b}$ dans $R_{\bar{\Sigma}}$ comme $R_{a,b} = 1^{\otimes 2n} + O(h)$. De même, on a aussi $R_{\bar{\Sigma}}^{(\ell)} = R_\Sigma^{(\ell)} + \mathcal{A}'$, et pareillement $R_{\bar{\Sigma}}^{(-m)} = R_\Sigma^{(-m)} + \mathcal{A}''$. Cela implique que $A^{(S)}_{\Sigma'',\bar{\Sigma},\Sigma'}(a) = A^{(S)}_{\Sigma'',\Sigma,\Sigma'}(a)$, et donc les $A^{(S)}_{\Sigma'',\Sigma,\Sigma'}(a)$ ne dépendent pas de Σ ; on écrit alors

$$\sum_{\ell+m=S} R_\Sigma^{(\ell)}\, \tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a)\, R_\Sigma^{(-m)} = \sum_{\Sigma'' \subseteq \Sigma} A^{(S)}_{\Sigma',\Sigma''}(a)\,.$$

Nous allons ensuite réécrire (E) à l'aide des $A^{(S)}_{\Sigma',\Sigma''}(a)$. Par commodité dans la suite des calculs, on notera $\delta_{\Sigma''\subseteq\Sigma'}$ la fonction qui vaut 1 si $\Sigma'' \subseteq \Sigma'$ et 0 sinon. Nous obtenons alors une nouvelle expression pour $\delta_{\{1,\dots,n\}}\big(R\, a\, R^{-1}\big)$, à savoir

$$\begin{aligned}
\delta_{\{1,\dots,n\}}\big(R\, a\, R^{-1}\big) = \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{\substack{\Sigma'\subseteq\{1,\dots,n\} \\ |\Sigma'|\leq j}} \Bigg(\sum_{\substack{\Sigma\subseteq\{1,\dots,n\} \\ \Sigma'\subseteq\Sigma,\ |\Sigma|>j}} (-1)^{n-|\Sigma|}\, (-1)^{j-|\Sigma'|}\, C^{j-|\Sigma'|}_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|} \times \\
\times \sum_{\Sigma''\subseteq\Sigma} A^{(i-j)}_{\Sigma',\Sigma''}(a) + (-1)^{n-|\Sigma'|} \sum_{\Sigma''\subseteq\Sigma'} A^{(i-j)}_{\Sigma',\Sigma''}(a) \Bigg)\, h^{i-j} + O\big(h^{i+1}\big) = \\
= \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{\substack{\Sigma'\subseteq\{1,\dots,n\} \\ |\Sigma'|\leq j}} h^{i-j} \sum_{\Sigma''\subseteq\{1,\dots,n\}} A^{(i-j)}_{\Sigma',\Sigma''}(a) \times \\
\times \Bigg(\sum_{\substack{\Sigma\subseteq\{1,\dots,n\} \\ \Sigma'\subseteq\Sigma,\ \Sigma''\subseteq\Sigma,\ |\Sigma|>j}} (-1)^{n-|\Sigma|}\, (-1)^{j-|\Sigma'|}\, C^{j-|\Sigma'|}_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|} + (-1)^{n-|\Sigma'|}\, \delta_{\Sigma''\subseteq\Sigma'} \Bigg) + O\big(h^{i+1}\big)\,.
\end{aligned}$$

Notons $\big(E'\big)_{\Sigma',\Sigma''}$ la nouvelle expression entre parenthèse; autrement dit, pour Σ' et Σ'' fixées, avec $\big|\Sigma'\big| \leq j$, on pose

$$\big(E'\big)_{\Sigma',\Sigma''} := \sum_{\substack{\Sigma\subseteq\{1,\dots,n\} \\ \Sigma'\subseteq\Sigma,\ \Sigma''\subseteq\Sigma,\ |\Sigma|>j}} (-1)^{n-|\Sigma|}\,(-1)^{j-|\Sigma'|}\,C^{j-|\Sigma'|}_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|} + (-1)^{n-|\Sigma'|}\,\delta_{\Sigma''\subseteq\Sigma'}$$

(au passage, remarquons que celle-ci est une expression purement combinatoire); nous allons montrer que cette expression est nulle lorsque Σ' et Σ'' sont telles que $\big|\Sigma'\cup\Sigma''\big| \leq j-i+\big|\Sigma'\big|$ et $\big|\Sigma'\big| \leq j$. En vertu du lemme suivant, ceci suffira pour prouver la proposition.

Lemme 3.5.
(a) On a $j < i$ *et* $i \leq n-1$ *, donc* $j \leq n-2$ *.*
(b) Pour tout $S > 0$ *, dans l'expression* $\sum\limits_{\ell+m=S} R^{(\ell)}_\Sigma\,\tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a)\,R^{(-m)}_\Sigma = \sum\limits_{\Sigma''\subseteq\Sigma} A^{(S)}_{\Sigma',\Sigma''}(a)$ *on a* $A^{(S)}_{\Sigma',\Sigma''}(a) = 0$ *pour tout* Σ', Σ'' *tels que* $\big|\Sigma'\cup\Sigma''\big| > S+\big|\Sigma'\big|$.

Preuve. La première assertion est évidente; pour montrer la deuxième nous étudions l'action adjointe de R_Σ sur $\big(H\otimes H\big)^{\otimes n}$.

Premièrement, sur $k\cdot I^{\otimes n}$ l'action de ces éléments donne un terme nul car on retrouve le terme à l'ordre S du développement h–adique de $R_\Sigma\cdot R_\Sigma^{-1}=1$ (pour $S>0$).

Deuxièmement, considérons $\Sigma\subseteq\{1,\dots,n\}$, et étudions l'action sur $\big(H\otimes H\big)_{\Sigma'} := j_{\Sigma'}\Big(\big(H\otimes H\big)^{\otimes|\Sigma|}\Big)$ $\big(\subseteq \big(H\otimes H\big)^{\otimes n}\big)$. On sait que R_Σ est un produit de $|\Sigma|^2$ termes du type $R_{a,b}$, avec $a,b\in\big\{\,2i-1,2j\,\big|\,i,j\in\Sigma\,\big\}$; analysons donc ce qui se passe lorsqu'on fait le produit $P := R_\Sigma\cdot x\cdot R_\Sigma^{-1}$ si $x\in\big(H\otimes H\big)_\Sigma$.

Considérons le facteur $R_{a,b}$ qui apparaît le plus à droite: si $a,b\notin\big\{\,2j-1,2j\,\big|\,j\in\Sigma'\,\big\}$, alors en calculant P on trouve $P := R_\Sigma\,x\,R_\Sigma^{-1} = R_\star\,R_{a,b}\,x\,R_{a,b}^{-1}\,R_\star^{-1} = R_\star\,x\,R_\star^{-1}$ (où $R_\star := R_\Sigma\,R_{a,b}^{-1}$). De même, en avançant de droite à gauche le long de R_Σ on peut écarter tous les facteurs $R_{c,d}$ de ce type, à savoir tels que $c,d\notin\big\{\,2j-1,2j\,\big|\,j\in\Sigma'\,\big\}$. Ainsi le premier facteur dont l'action adjointe est non triviale sera nécessairement du type $R_{\bar a,\bar b}$ avec l'un des deux indices appartenant à $\big\{\,2j-1,2j\,\big|\,j\in\Sigma'\,\big\}$, soit par exemple $\bar a$. Notons que le nouvel indice $\bar a$ $(\in\{1,2,\dots,2n-1,2n\})$, qui agit sur un facteur tensoriel dans $H^{\otimes 2n}$, correspond à un nouvel indice $j_{\bar a}$ $(\in\{1,\dots,n\})$, agissant sur un facteur tensoriel de $\big(H\otimes H\big)^{\otimes n}$. Ainsi pour les facteurs successifs — i.e. à gauche de $R_{\bar a,\bar b}$ — il faut répéter la même analyse, mais avec l'ensemble $\big\{\,2j-1,2j\,\big|\,j\in\Sigma'\cup\{j_{\bar a}\}\,\big\}$ à la place de $\big\{\,2j-1,2j\,\big|\,j\in\Sigma'\,\big\}$; donc, comme $R_{\bar a,\bar b}$ pouvait agir de manière non triviale sur au plus $\big|\Sigma'\big|$ facteurs de $\big(H\otimes H\big)^{\otimes n}$, de même le facteur plus proche à sa gauche ne peut agir de manière non triviale que sur au plus $\big|\Sigma'\big|+1$ facteurs. La conclusion est que l'action adjointe de R_Σ est non triviale sur au plus $\big|\Sigma'\big|+\big|\Sigma\big|$ facteurs de $\big(H\otimes H\big)^{\otimes n}$.

Maintenant, considérons les différents termes $R^{(\ell)}_\Sigma$ et $R^{(-m)}_\Sigma$, avec $\ell+m=S$, et étudions les produits $R^{(\ell)}_\Sigma\cdot x\cdot R^{(-m)}_\Sigma$, avec $x\in\big(H\otimes H\big)_\Sigma$. On sait déjà que $R^{(\ell)}_\Sigma$ et $R^{(-m)}_\Sigma$ sont sommes de produits, notés P_+ et P_- , d'au plus ℓ et m termes respectivement, du type $R^{(\pm k)}_{i,j}$; les termes $A^{(S)}_{\Sigma',\Sigma''}(a)$ ne sont alors que des sommes de termes du type $P_+\,\tilde{\Delta}_{\Sigma'}(a)\,P_-$, où de plus les “indices” intervenant dans P_+ et P_- sont dans Σ''. Or, comme chaque P_+ et chaque P_- est un produit d'au plus ℓ et m facteurs $R_{i,j}^{(\pm k)}$, on peut raffiner l'argument précédent. Considérons seulement le terme à l'ordre S du développement h–adique de $P := R_\Sigma \, x \, R_\Sigma^{-1} = R_\star \, R_{a,b} \, x \, R_{a,b}^{-1} \, R_\star^{-1} = R_\star \, x \, R_\star^{-1}$: lorsque il y a des facteurs du type $R_{a,b}^{(k)}$ ou $R_{a,b}^{(t)}$, pour a, b fixés — n'appartenant pas à $\big\{ 2j-1, 2j \,\big|\, j \in \Sigma' \big\}$ — qui apparaîssent dans $R_\Sigma^{(\ell)}$ ou $R_\Sigma^{(-m)}$, pour certains ℓ ou m, la contribution totale de tous ces termes dans la somme $\sum\limits_{\ell+m=S} R_\Sigma^{(\ell)} \, x \, R_\Sigma^{(-m)}$ sera nulle (cela vient du fait que $R_\star \, R_{a,b} \, x \, R_{a,b}^{-1} \, R_\star^{-1} = R_\star \, x \, R_\star^{-1}$). De plus, comme maintenant on ne considère que S facteurs au total, on conclut que $A_{\Sigma',\Sigma''}^{(S)}(a) = 0$ si $\big|\Sigma' \cup \Sigma''\big| > S + \big|\Sigma'\big|$. $\square$

Calculons maintenant $\big(E'\big)_{\Sigma',\Sigma''}$. Grâce à la remarque précédente, nous pouvons nous limiter aux paires $\big(\Sigma',\Sigma''\big)$ telles que $\big|\Sigma' \cup \Sigma''\big| \leq i - j + m + \big|\Sigma'\big| \leq i - j + j = i \leq n-1$. On pourra alors toujours trouver au moins deux $\Sigma \subseteq \{1,\dots,n\}$ tels que $|\Sigma| > j$ et $\Sigma' \cup \Sigma'' \subseteq \Sigma$, ce qui nous assure qu'il y'aura toujours au moins deux termes dans le comptage qui va suivre (condition qui assurera la nullité de l'expression $\big(E'\big)_{\Sigma',\Sigma''}$). Nous allons distinguer trois cas:

(I) Si $\Sigma'' \subseteq \Sigma'$, alors l'expression $\big(E'\big)_{\Sigma',\Sigma''}$ devient

$$\big(E' : 1\big)_{\Sigma',\Sigma''} = \sum_{\substack{\Sigma \subseteq \{1,\dots,n\} \\ \Sigma' \subseteq \Sigma, \, |\Sigma| > j}} (-1)^{n-|\Sigma|} \, (-1)^{j-|\Sigma'|} \, C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|} + (-1)^{n-|\Sigma'|} \, .$$

En regroupant les Σ qui ont le même cardinal d, un simple comptage nous donne

$$\big(E' : 1\big)_{\Sigma',\Sigma''} = \sum_{d=j+1}^{n} (-1)^{n-d} \, (-1)^{j-|\Sigma'|} \, C_{d-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|} \, C_{n-|\Sigma'|}^{d-|\Sigma'|} + (-1)^{n-|\Sigma'|} \, .$$

Or, cette dernière expression est nulle d'après le Lemme 3.3, car elle correspond à une somme du type $\sum\limits_{k=r+1}^{t} (-1)^{t+r-k} \, C_{k-1}^{r} \, C_t^k + (-1)^t = \sum\limits_{k=0}^{t} (-1)^{t+r-k} \, C_{k-1}^{r} \, C_t^k + (-1)^t$ (où $C_u^v := 0$ si $v > u$) avec r, $t \in \mathbb{N}_+$ et $r < t$: dans notre cas on a posé $t = n - \big|\Sigma'\big|$, $r = j - \big|\Sigma'\big|$ et $k = d - \big|\Sigma'\big|$; on vérifie que l'on a $j - \big|\Sigma'\big| < n - \big|\Sigma'\big|$ parce que $j < n$.

(II) Si $\Sigma'' \not\subseteq \Sigma'$ et $\big|\Sigma' \cup \Sigma''\big| > j$, alors l'expression $\big(E'\big)_{\Sigma',\Sigma''}$ devient

$$\big(E' : 2\big)_{\Sigma',\Sigma''} = \sum_{\substack{\Sigma \subseteq \{1,\dots,n\} \\ \Sigma' \cup \Sigma'' \subseteq \Sigma}} (-1)^{n-|\Sigma|} \, (-1)^{j-|\Sigma'|} \, C_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|} \, .$$

En regroupant les Σ qui ont le même cardinal d, un simple comptage nous donne

$$\big(E' : 2\big)_{\Sigma',\Sigma''} = \sum_{d=|\Sigma' \cup \Sigma''|}^{n} (-1)^{n-d} \, (-1)^{j-|\Sigma'|} \, C_{d-1-|\Sigma'|}^{j-|\Sigma'|} \, C_{n-|\Sigma' \cup \Sigma''|}^{d-|\Sigma' \cup \Sigma''|} \, .$$

À nouveau, cette dernière expression est nulle grâce au Lemme 3.3, car elle correspond à une somme du type $\sum\limits_{k=0}^{t} (-1)^{t+r-k} \, C_{k+s}^{r} \, C_t^k$ avec r, t, $s \in \mathbb{N}_+$ et $r < t$: dans notre cas on a posé $t = n - \left|\Sigma' \cup \Sigma''\right|$, $r = j - \left|\Sigma'\right|$, $s = \left|\Sigma' \cup \Sigma''\right| - \left|\Sigma'\right| - 1$ et $k = d - \left|\Sigma' \cup \Sigma''\right|$; on vérifie que l'on a $j - \left|\Sigma'\right| < n - \left|\Sigma'\right|$ car $j < n$ et $\left|\Sigma' \cup \Sigma''\right| - \left|\Sigma'\right| - 1 \geq 0$ car $\Sigma'' \not\subseteq \Sigma'$.

(III) Si $\Sigma'' \not\subseteq \Sigma'$ et $\left|\Sigma' \cup \Sigma''\right| \leq j$, alors l'expression $\big(E'\big)_{\Sigma',\Sigma''}$ devient

$$\big(E' : 3\big)_{\Sigma',\Sigma''} = \sum_{\substack{\Sigma \subseteq \{1,\dots,n\} \\ \Sigma' \cup \Sigma'' \subseteq \Sigma,\ |\Sigma| > j}} (-1)^{n-|\Sigma|} (-1)^{j-|\Sigma'|} C^{j-|\Sigma'|}_{|\Sigma|-1-|\Sigma'|} .$$

Si l'on regroupe les Σ qui ont le même cardinal d, un simple comptage nous donne

$$\big(E' : 3\big)_{\Sigma',\Sigma''} = \sum_{d=j+1}^{n} (-1)^{n-d} (-1)^{j-|\Sigma'|} C^{j-|\Sigma'|}_{d-1-|\Sigma'|} C^{d-|\Sigma' \cup \Sigma''|}_{n-|\Sigma' \cup \Sigma''|} .$$

Mais encore la dernière expression est nulle d'après le Lemme 3.3, car elle correspond à une somme du type $\sum\limits_{k=j+1-|\Sigma' \cup \Sigma''|}^{t} (-1)^{t+r-k} C^{r}_{k+s} C^{k}_{t} = \sum\limits_{k=0}^{t} (-1)^{t+r-k} C^{r}_{k+s} C^{k}_{t}$ (où $C^{v}_{u} := 0$ si $v > u$) avec $r, t, s \in \mathbb{N}_+$ et $r < t$: ici on a encore posé $t = n - \left|\Sigma' \cup \Sigma''\right|$, $r = j - \left|\Sigma'\right|$, $s = \left|\Sigma' \cup \Sigma''\right| - \left|\Sigma'\right| - 1$ et $k = d - \left|\Sigma' \cup \Sigma''\right|$; on a, toujours pour les mêmes raisons, $j - \left|\Sigma'\right| < n - \left|\Sigma'\right|$ et $\left|\Sigma' \cup \Sigma''\right| - \left|\Sigma'\right| - 1 \geq 0$).

En conclusion, on a toujours $\big(E'\big)_{\Sigma',\Sigma''} = 0$, d'où $(E) = 0$, ce qui termine la preuve. □

References

[CP] V. Chari, A. Pressley, *A guide to Quantum Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Di] J. Dixmier, *Introduction to the theory of formal groups*, Pure and Applied Mathematics **20** (1973).

[Dr] V. G. Drinfel'd, *Quantum groups*, Proc. Intern. Congress of Math. (Berkeley, 1986), 1987, pp. 798–820.

[EK] P. Etingof, D. Kazhdan, *Quantization of Lie bialgebras, I*, Selecta Math. (New Series) **2** (1996), 1–41.

[G1] F. Gavarini, *Geometrical Meaning of R–matrix action for Quantum groups at Roots of 1*, Commun. Math. Phys. **184** (1997), 95–117.

[G2] F. Gavarini, *The R–matrix action of untwisted affine quantum groups at roots of 1* (to appear in Jour. Pure Appl. Algebra).

[G3] F. Gavarini, *The quantum duality principle*, Preprint.

[On] A. L. Onishchik (Ed.), *Lie Groups and Lie Algebras I*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **20** (1993).

[Re] N. Reshetikhin, *Quasitriangularity of quantum groups at roots of 1*, Commun. Math. Phys. **170** (1995), 79–99.

[WX] A. Weinstein, P. Xu, *Classical Solutions of the Quantum Yang-Baxter Equation*, Commun. Math. Phys. **148** (1992), 309–343.

† Università degli Studi di Roma "Tor Vergata" — Dipartimento di Matematica
Via della Ricerca Scientifica, 1 — I-00133 Roma, ITALY — e-mail: gavarini@mat.uniroma2.it

‡ Institut de Recherche Mathématique Avancée — e-mail: halbout@math.u-strasbg.fr
7, rue René Descartes — 67084 STRASBOURG Cedex, FRANCE