

# FORMULE D'HOMOTOPIE ENTRE LES COMPLEXES DE HOCHSCHILD ET DE DE RHAM

GILLES HALBOUT

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur – C.N.R.S.  
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France

ABSTRACT. Let  $k$  be the field  $\mathbb{C}$  or  $\mathbb{R}$ , let  $M$  be the space  $k^n$  and let  $A$  be the algebra of polynomials over  $M$ . We know from [HKR] that the Hochschild homology  $H_*(A, A)$  is isomorphic to the de Rham differential forms over  $M$  : this means that the complexes  $(C_*(A, A), b)$  and  $(\Omega^*(M), 0)$  are quasi-isomorphic. In this work, I produce a general explicit homotopy formula between those two complexes. This formula can be generalized when  $M$  is an open set in a complex manifold and  $A$  is the space of holomorphic functions over  $M$ . Then, by taking the dual maps, I find a new homotopy formula for the Hochschild cohomology of the algebra of smooth functions over  $M$  (when  $M$  is either a complex or a real manifold) different from the one given in [DWL]. I will finally show how this formula can be used to construct an homotopy for the cyclic homology.

## § 0. Introduction

Le but de ce travail est d'écrire une formule d'homotopie explicite pour le quasi-isomorphisme de complexes donné par le théorème de Hochschild, Kostant et Rosenberg ([HKR]). Soit  $A$  une algèbre commutative affine régulière et unitaire sur un corps  $k = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $\mathcal{M}$  un  $A$ -bimodule. L'homologie de Hochschild de l'algèbre  $A$  à coefficients dans  $\mathcal{M}$  (notée  $H_*(A, \mathcal{M})$ ) est, par définition,  $\text{Tor}^{A^e}(A, \mathcal{M})$ , avec  $A^e = A \otimes A^{op}$  où  $A^{op}$  est  $A$  muni de la multiplication opposée :  $A^{op} \times A^{op} \rightarrow A^{op}$ ,  $(a, b) \mapsto ba$ . Le théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg ([HKR, p.395]) affirme que l'application naturelle :

$$H_1 = H_1(A, A) \rightarrow H_*(A, A)$$

entre groupes d'homologie de Hochschild induit un isomorphisme de  $A$ -algèbres :

$$\wedge_A(H_1) \rightarrow H_*(A, A)$$

où  $\Omega_A = \wedge_A(H_1)$  est la  $A$ -algèbre extérieure sur  $H_1$ . Le groupe  $H_1(A, A)$  est isomorphe au  $A$ -module des différentielles de Kähler.

---

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 16E40, (16S80, 17B65, 18G60, 5)

Dans le cas particulier où  $A$  est une algèbre de polynômes ( $A = k[x_1, \dots, x_n]$ ), ceci est une conséquence de l'existence de la résolution de Koszul (cf. [Kos], [Ho], [May]). Ainsi les complexes  $(C(k[x_1, \dots, x_n]), b)$  et  $(\Omega_A, 0)$  sont quasi-isomorphes. Notre but est de donner une formule d'homotopie explicite entre ces deux complexes. Ceci est bien connu dans le cas  $n = 1$  (cf. [LS] Ex. 2.7.3, [LQ] et [Ka1]). En dimension supérieure, on dispose d'une approche théorique en utilisant le théorème d'Eilenberg-Zilber puisque  $k[x_1, \dots, x_n] \simeq k[x]^{\otimes n}$  (cf. [LS] Ex. 2.7.1). Il existe aussi une approche en géométrie différentielle donnée par Connes (cf. [Co]). Cependant, il est utile de disposer de formules explicites, par exemple en théorie des déformations ou en homologie entière.

Dans la première partie, nous explicitons une telle formule d'homotopie. Pour cela nous définissons un opérateur  $\Delta$ , correspondant à un "coproduit"  $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ , que l'on étend en des fonctions  $\Delta^l : A^{\otimes l} \rightarrow A^{\otimes 2}$ . Nous donnerons quelques propriétés remarquables de ces opérateurs dans la deuxième partie. La preuve de théorème principal de la première partie est donnée dans la troisième partie.

Dans la quatrième partie, nous verrons sous quelles conditions la formule d'homotopie peut s'étendre à des "algèbres plus générales" et comment elle peut se généraliser au cas où  $M$  est un ouvert contractile d'une variété complexe lisse et  $A$  est l'algèbre des fonctions holomorphes sur  $M$ .

Dans la cinquième partie, nous montrerons comment cette formule nous permet de retrouver une expression analogue en cohomologie. En explicitant la nouvelle formule obtenue, nous constaterons que celle-ci est différente de celle donnée par De Wilde et Lecomte ([DWL]).

Enfin, dans la dernière partie, nous donnerons une application d'une telle homotopie : en utilisant les techniques de perturbation des rétractions par déformation (cf. [Ka2]), nous obtenons une nouvelle formule d'homotopie explicite entre l'homologie (ou la cohomologie) cyclique périodique et celle de de Rham.

## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Marc Rosso pour ses encouragements et ses conseils toujours judicieux. J'ai aussi bénéficié à l'Université de Liège d'un accueil exceptionnel de la part de Marc De Wilde et Pierre Lecomte qui n'ont pas ménagé leur temps pour répondre à mes questions.

### § 1. Formule d'homotopie pour les polynômes

Dans cette partie nous allons donner une formule d'homotopie entre les complexes de Hochschild et de de Rham, pour l'algèbre des polynômes. Commençons par préciser ce que nous entendons par homotopie entre deux complexes  $(C, d)$  et  $(C', d')$  :

**Définition 1.1.** (cf. [ML]) Soient  $(C, d)$  et  $(C', d')$  deux complexes.

- Un morphisme de complexes  $\phi : C \rightarrow C'$  est un **quasi-isomorphisme** si l'application induite sur l'homologie est un isomorphisme.
- Deux morphismes  $\phi$  et  $\phi' : C \rightarrow C'$  sont dits **homotopes** s'il existe une application appelée homotopie  $h : C \rightarrow C'_{+1}$  telle que  $\phi - \phi' = d' \circ h + h \circ d$ .

- Si  $I$  est un quasi-isomorphisme entre les complexes  $(C., d)$  et  $(C'., d')$ , et si  $J : C'. \rightarrow C.$  est un morphisme de complexes tel que  $J \circ I = \text{Id}$  sur  $C.$  nous dirons que  $s$  est une **homotopie** pour  $(I, J)$  si  $s$  est une homotopie entre  $I \circ J$  et  $\text{Id}$  sur  $C'.,$  c'est-à-dire :

$$I \circ J = \text{Id} + d' \circ s + s \circ d'.$$

Considérons l'algèbre  $A = k[x_1, \dots, x_n]$  ; le groupe d'homologie  $H_1(A, A)$  est isomorphe au  $A$ -module des différentielles de Kähler et donc l'espace  $\wedge_A^l(H_1(A, A))$  est isomorphe à l'espace vectoriel engendré par les éléments de type  $a dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_l}$  avec  $a$  dans  $A$ .

Le théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg dit que les complexes de Hochschild :  $C.(A, A) \xrightarrow{b} C._{-1}(A, A)$  et de de Rham  $\wedge_A(H_1(A, A)) \xrightarrow{0} \wedge_A^{-1}(H_1(A, A))$  sont quasi-isomorphes. Comme on a supposé que l'algèbre  $A$  est unitaire, nous pouvons réduire le complexe de Hochschild au complexe  $\bar{C}.(A, A) \xrightarrow{b} \bar{C}._{-1}(A, A)$  avec  $\bar{C}_l(A, A) = A \otimes \bar{A}^{\otimes l}$  où  $\bar{A} = A/k$  ( $k$  est identifié à  $k \cdot 1$  dans  $A$ ). En effet, il est bien connu (cf. [Lo]) que la projection :  $C_l(A, A) \rightarrow \bar{C}_l(A, A)$  est un quasi-isomorphisme de complexes.

Il est alors naturel de chercher deux quasi-isomorphismes  $I$  et  $J$  entre les complexes  $\bar{C}.(A, A)$  et  $\wedge_A(H_1(A, A))$  puis de construire une homotopie correspondante. Pour plus de commodité, nous écrirons désormais  $\wedge_A$  pour  $\wedge_A(H_1(A, A))$ , espace que nous pouvons identifier à l'espace des formes différentielles sur  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ .

Un candidat naturel pour le morphisme  $J : \bar{C}_l(A, A) \rightarrow \wedge_A^l$  est l'application :

$$P_0 \otimes P_1 \otimes \dots \otimes P_l \mapsto P_0 dP_1 \wedge \dots \wedge dP_l.$$

On vérifie immédiatement que  $J \circ b = 0$  si bien que  $J$  est un morphisme de complexes. Pour la suite de notre travail, nous introduisons la notation  $B_u^v$  qui désignera l'ensemble des applications de  $[1, \dots, u]$  dans  $[1, \dots, v]$ . Pour tout élément  $\sigma$  dans  $B_u^v$  et  $i$  dans  $[1, \dots, u]$ , l'expression  $\sigma \cdot i$  désignera l'image de  $i$  par l'application  $\sigma$ . De plus, si  $\Sigma$  est une partie finie de  $\mathbb{N}$ , on notera  $P(\Sigma)$  l'ensemble des permutations de  $\Sigma$ . Enfin, la notation  $x_1 \wedge \dots \wedge x_l$  désignera l'élément  $\sum_{\sigma \in P([1, \dots, l])} (-1)^{\ell(\sigma)} \frac{1}{l!} x_{\sigma \cdot 1} \otimes \dots \otimes x_{\sigma \cdot l}$  de  $A^{\otimes l}$  ( $\ell(\sigma)$  est la longueur de Bruhat de  $\sigma$  :  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}$ ). Nous pouvons ainsi réécrire  $J : A \otimes \bar{A}^{\otimes l} \rightarrow \wedge_A^l$  :

$$P_0 \otimes \dots \otimes P_l \mapsto \sum_{\sigma \in B_l^n} P_0 \frac{\partial P_1}{\partial x_{\sigma \cdot 1}} \dots \frac{\partial P_l}{\partial x_{\sigma \cdot l}} \otimes dx_{\sigma \cdot 1} \wedge \dots \wedge dx_{\sigma \cdot l}.$$

Nous devons maintenant choisir un morphisme  $I : \wedge_A^l \rightarrow \bar{C}_l(A, A)$ . Prenons, par exemple, l'injection canonique :

$$I : a dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_l} \mapsto a \otimes x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_l}.$$

On vérifie que cette application est bien définie, qu'elle est injective et que c'est un morphisme de complexes car  $b \circ I = 0$ .

On démontre aisément que les applications  $I$  et  $J$  vérifient :  $I \circ J = \text{Id}$ . Nous voulons maintenant trouver une application  $s : A \otimes \bar{A}^{\otimes l} \rightarrow A \otimes \bar{A}^{\otimes l+1}$  telle que  $I \circ J = \text{Id} + s \circ b + b \circ s$ . Pour cela, nous allons d'abord définir une application  $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$  que nous étendrons en des applications  $\Delta^l : A^{\otimes l} \rightarrow A^{\otimes 2}$ . Pour plus de commodité dans la suite de ce travail, nous noterons souvent  $(\dots, \dots, \dots)$  au lieu de  $\dots \otimes \dots \otimes \dots$ .

**Définition 1.2.** *L'application  $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ , est définie, pour tout polynôme  $P$  homogène de degré  $m$ , par :*

$$\Delta(P) = \frac{1}{m+1} 1 \otimes P + \cdots + \frac{1}{(m+1) \cdots (m-l+1)} \sum_{\sigma \in B_l^n} x_{\sigma \cdot 1} \cdots x_{\sigma \cdot l} \otimes \frac{\partial^l P}{\partial x_{\sigma \cdot 1} \cdots \partial x_{\sigma \cdot l}} + \cdots + \frac{1}{m+1} P \otimes 1.$$

Calculons par exemple  $\Delta(x_1 x_2^2)$  :

$$\Delta(x_1 x_2^2) = \frac{1}{4} 1 \otimes x_1 x_2^2 + \frac{1}{12} x_1 \otimes x_2^2 + \frac{1}{6} x_2 \otimes x_1 x_2 + \frac{1}{12} x_2^2 \otimes x_1 + \frac{1}{6} x_1 x_2 \otimes x_2 + \frac{1}{4} x_1 x_2^2 \otimes 1.$$

Nous pouvons ensuite définir les applications  $\Delta^l$  par récurrence pour  $l \geq 1$ .

**Définition 1.3.** *Soit  $\tilde{\Delta} : A \otimes A \rightarrow A \otimes A$  définie par :*

$$\tilde{\Delta}(P, Q) = (P \otimes 1) \cdot \Delta(Q).$$

On définit ensuite  $\Delta^l : A^{\otimes l} \rightarrow A^{\otimes 2}$  pour  $P_1, \dots, P_l$  dans  $A$  par :

$$\Delta^l(P_1, \dots, P_l) = l \tilde{\Delta}[(1 \otimes t^{l-1} P_1) \Delta^{l-1}(P_2, \dots, P_l)]_{(0,1)}$$

où  $t$  est une variable supplémentaire introduite pour la commodité des calculs (on passe de  $A$  à  $k[t, x_1, \dots, x_n]$ ) et où la notation  $[\cdot \otimes \cdot]_{(0,1)}$  signifie que l'on a spécialisé  $t$  en 0 dans le premier facteur du produit tensoriel et en 1 dans le second.

Calculons par exemple  $\Delta^2(x, x^2)$  :  $\Delta^2(x, x^2) = \frac{2}{15} 1 \otimes x^3 + \frac{4}{15} x \otimes x^2 + \frac{2}{5} x^2 \otimes x + \frac{1}{5} x^3 \otimes 1$ .

Nous donnerons dans la quatrième partie une définition plus intrinsèque de ces applications, ce qui nous permettra de les appliquer à des espaces de fonctions plus grands. Cette définition est néanmoins suffisante pour le travail que nous voulons faire ici et les théorèmes des parties 1, 2 et 3 se généraliseront sans problème. Nous avons maintenant tous les outils nécessaires à la construction de notre homotopie :

**Définition 1.4.** *Soit  $s : A^{\otimes l+1} \rightarrow A^{\otimes l+2}$  définie pour  $P_0, \dots, P_l$  dans  $A$  par :*

$$s(P_0 \otimes \cdots \otimes P_l) = \sum_{j=1}^l (-1)^{l-j} (P_0 \otimes \cdots \otimes P_{l-j} \otimes 1) \sum_{\sigma \in B_j^n} \bar{\Delta}^j \left( \frac{\partial P_{l-j+1}}{\partial x_{\sigma \cdot 1}}, \dots, \frac{\partial P_l}{\partial x_{\sigma \cdot j}} \right) \otimes x_{\sigma \cdot 1} \wedge \cdots \wedge x_{\sigma \cdot j},$$

$\bar{\Delta}^j$  étant l'image de  $\Delta^j$  par l'injection :  $A \otimes A \rightarrow A^{\otimes l-j+2}$ ,  $(a \otimes a') \mapsto a \otimes 1^{\otimes(l-j)} \otimes a'$ .

Notre résultat principal est le suivant :

**Théorème 1.5.** *Soit  $A$  l'algèbre des polynômes. L'application  $s$  est une homotopie entre les complexes de Hochschild et de de Rham de  $A$ , c'est-à-dire :*

$$I \circ J = \text{Id} + b \circ s + s \circ b.$$

La preuve de ce théorème sera faite dans la troisième partie et résultera des propriétés des applications  $\Delta^l$  que nous allons énoncer maintenant.

## § 2. Quelques propriétés de l'opérateur $\Delta$

Commençons par expliquer pourquoi  $\Delta$  peut être vu comme un coproduit sur  $A$ , espace des fonctions sur  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ .

**Théorème 2.1.** Soit  $m^\circ$  la multiplication (commutative et associative) :  $A \otimes A \rightarrow A$  que l'on étend (grâce à l'associativité) en une application, toujours notée  $m^\circ : A^{\otimes l} \rightarrow A$  ( $l \in \mathbb{N}$ ). Pour tout  $l$  dans  $\mathbb{N}$ , l'application  $m^\circ \circ \Delta^l : A^{\otimes l} \rightarrow A$  vérifie alors la propriété suivante :

$$m^\circ \circ \Delta^l = m^\circ.$$

*Démonstration.* La démonstration se fait par récurrence sur  $l$ .

- Si  $l = 1$ , la propriété est évidente : vu la définition de  $\Delta$  (cf. définition 1.2), c'est une conséquence de l'identité d'Euler.
- Supposons le résultat acquis au rang  $l - 1$ . Considérons  $P_1, \dots, P_l$  dans  $A$ . Ecrivons  $\Delta^{l-1}(P_2, \dots, P_l) = \sum_i \pi_i \otimes \pi'_i$ . On a alors  $\Delta^l(P_1, \dots, P_l) = l \sum_i (\pi_i \otimes 1) [\Delta(t^{l-1} P_1 \pi'_i)]_{(0,1)}$

et donc :

$$m^\circ \circ \Delta^l(P_1, \dots, P_l) = l \sum_i \pi_i \cdot m^\circ \circ [\Delta(t^{l-1} P_1 \pi'_i)]_{(0,1)}.$$

Il suffit de démontrer que  $m^\circ \circ [\Delta(t^{l-1} \pi)]_{(0,1)} = \frac{1}{l} \pi$  pour tout  $\pi$  dans  $A$ , car alors  $m^\circ \circ \Delta^l = l \cdot \frac{1}{l} \sum_i \pi_i P_1 \pi'_i = P_1 \cdots P_l$  par hypothèse de récurrence. Pour ce faire, on peut supposer sans perte de généralité que  $\pi = x^m$ . On a alors :

$$[\Delta(t^{l-1} x^m)]_{(0,1)} = \sum_{i=0}^m \frac{1}{(m+l) \cdots (k+i)} x^{m-i} \otimes x^i = \sum_{i=0}^m \frac{(l-1+i) \cdots (1+i)}{(m+l) \cdots (m+1)} x^{m-i} \otimes x^i.$$

$$\text{Donc } m^\circ \circ [\Delta(t^{l-1} x^m)]_{(0,1)} = \frac{1}{(m+l) \cdots (m+1)} \sum_{i=0}^m (1+i) \cdots (l-1+i) \cdot x^m = \frac{1}{m} x^m.$$

C'est le résultat souhaité.  $\square$

Nous allons maintenant énoncer un deuxième résultat donnant un analogue de l'identité d'Euler pour les polynômes homogènes. Dans toute la suite de notre travail, nous poserons, pour  $1 \leq i \leq n$ ,

$$f_i = (1 \otimes x_i) - (x_i \otimes 1) \text{ (élément de } A \otimes A).$$

**Théorème 2.2.** Pour tout  $P$  dans  $A$ , nous avons :

$$\sum_{i=1}^n f_i \Delta \frac{\partial P}{\partial x_i} = 1 \otimes P - P \otimes 1.$$

*Démonstration.* Reprenons ici la définition de l'application  $\Delta$ . Nous pouvons réécrire la formule de deux manières différentes : pour  $P$  homogène dans  $A$  de degré  $m$ , on a :

$$\begin{aligned} \Delta(P) &= \sum_{l=0}^m \sum_{\sigma \in B_l^n} \frac{1}{(m+1)m \cdots (m-l+1)} x_{\sigma,1} \cdots x_{\sigma,l} \otimes \frac{\partial^l P}{\partial x_{\sigma,1} \cdots \partial x_{\sigma,l}} \\ &= \sum_{l=0}^m \sum_{\sigma \in B_l^n} \frac{1}{(m+1)m \cdots (m-l+1)} \frac{\partial^l P}{\partial x_{\sigma,1} \cdots \partial x_{\sigma,l}} \otimes x_{\sigma,1} \cdots x_{\sigma,l} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n f_i \Delta \frac{\partial P}{\partial x_i} &= \sum_{i=1}^n \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{\sigma \in B_l^n} \frac{1}{m(m-1)\cdots(m-l)} x_{\sigma.1} \cdots x_{\sigma.l} \otimes x_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^l P}{\partial x_{\sigma.1} \cdots \partial x_{\sigma.l}} \right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{\sigma \in B_l^n} \frac{1}{m(m-1)\cdots(m-l)} x_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^l P}{\partial x_{\sigma.1} \cdots \partial x_{\sigma.l}} \right) \otimes x_{\sigma.1} \cdots x_{\sigma.l} \\
&= \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{\sigma \in B_l^n} \frac{1}{m(m-1)\cdots(m-l)} x_{\sigma.1} \cdots x_{\sigma.l} \otimes (m-l) \frac{\partial^l P}{\partial x_{\sigma.1} \cdots \partial x_{\sigma.l}} \\
&\quad - \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{\sigma \in B_l^n} \frac{1}{m(m-1)\cdots(m-l)} (m-l) \frac{\partial^l P}{\partial x_{\sigma.1} \cdots \partial x_{\sigma.l}} \otimes x_{\sigma.1} \cdots x_{\sigma.l} \\
&= 1 \otimes P - P \otimes 1 \quad (\text{après simplification}).
\end{aligned}$$

□

En fait nous avons des formules plus générales :

**Théorème 2.3.** *Pour tout  $r > 1$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $P_1, \dots, P_r$  dans  $A$  et  $1 < i < r$  :*

- (1)  $\sum_{l=1}^n f_l \frac{\Delta^r}{r} (P_1, \dots, \frac{\partial P_r}{\partial x_l}) = \Delta^{r-1}(P_1, \dots, P_{r-1} P_r) - (P_r \otimes 1) \Delta^{r-1}(P_1, \dots, P_{r-1})$
- (2)  $\sum_{l=1}^n f_l \frac{\Delta^r}{r} (P_1, \dots, \frac{\partial P_i}{\partial x_l}, \dots, P_r) = \Delta^{r-1}(P_1, \dots, P_{i-1} P_i, \dots, P_r) - \Delta^{r-1}(P_1, \dots, P_i P_{i+1}, \dots, P_r)$
- (3)  $\sum_{l=1}^n f_l \frac{\Delta^r}{r} (\frac{\partial P_1}{\partial x_l}, P_2, \dots, P_r) = (1 \otimes P_1) \Delta^{r-1}(P_2, \dots, P_r) - \Delta^{r-1}(P_1 P_2, \dots, P_r)$ .

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant :

**Lemme 2.4.** *Pour tous polynômes  $P$  et  $Q$  dans  $A$ , pour tout  $1 \leq l \leq n$ , nous avons :*

$$\begin{aligned}
(a) \quad \sum_l f_l \left[ \Delta \left( 1 \otimes t \frac{\partial P}{\partial x_l} \right) \Delta Q \right]_{(0,1)} &= (1 \otimes P) \Delta(Q) - \Delta(PQ), \\
(b) \quad f_l \cdot [\Delta(tP)]_{(0,1)} &= [\Delta(f_l \cdot tP)]_{(0,1)}.
\end{aligned}$$

*Démonstration.* La seconde égalité du lemme est équivalente à :

$$(b)' \quad \Delta(x_l P) = (x_l \otimes 1) \Delta P + (1 \otimes x_l) [\Delta(tP)]_{(0,1)} - (x_l \otimes 1) [\Delta(tP)]_{(0,1)}.$$

Supposons que  $P$  est un monôme homogène de degré  $m$ . Nous allons maintenant utiliser une astuce de comptage : écrivons  $P = x_1 \cdots x_m$  et supposons que, formellement, tous ces  $x_i$  sont différents entre eux et sont différents de  $x_l$ . Ceci n'enlève rien à la généralité du résultat car il suffira de spécialiser en les variables voulues par la suite. Pour  $Y \subset [1, \dots, m]$  (on note  $|Y|$  le cardinal de  $Y$ ), regardons le coefficient apparaissant devant  $x_l \prod_{i \in Y} x_i \otimes \prod_{j \notin Y} x_j$  : pour le terme de gauche de (b)', il vaut  $\frac{1}{m+2} \frac{1}{C_{m+1}^{|Y|+1}}$  et pour celui de droite :

$\frac{1}{m+1} \frac{1}{C_m^{|Y|}} - \frac{1}{m+2} \frac{1}{C_{m+2}^{|Y|}} = \frac{1}{m+2} \frac{1}{C_{m+1}^{|Y|+1}}$ . Quant aux termes du type  $\prod_{i \in Y} x_i \otimes x_l \prod_{j \notin Y} x_j$ , il est clair que des deux cotés apparaît :  $\frac{1}{m+2} \frac{1}{C_{m+1}^{|Y|+1}}$ .

La démonstration de la première égalité se fait de la même manière. Les polynômes  $P$  et  $Q$  sont supposés homogènes de degrés respectivement  $p$  et  $q$  et produits de monômes de degrés 1 (notés  $x_i$  pour  $P$  et  $y_i$  pour  $Q$ ) tous indépendant et différents de  $x_l$ . Par un comptage similaire, on vérifie que le coefficient apparaissant devant  $x_{i_1} \cdots x_{i_i} y_{j_1} \cdots y_{j_m} \otimes \cdots$  est le même dans chacun des termes de l'égalité (a). Ceci prouve le lemme.  $\square$

*Démonstration (du théorème 2.3).* Pour prouver l'égalité (3), supposons  $r > 1$  et choisissons  $P_1, \dots, P_r$  dans  $A$ . Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \sum_l f_l \frac{\Delta^r}{r} \left( \frac{\partial P_1}{\partial x_l}, P_2, \dots, P_r \right) &= \sum_l f_l \left[ \Delta \left\{ \left( 1 \otimes t^{r-1} \frac{\partial P_1}{\partial x_l} \right) \Delta^{r-1}(P_2, \dots, P_r) \right\} \right]_{(0,1)} \\
 &= \sum_l f_l \left[ \Delta \left\{ \left( 1 \otimes t \frac{\partial P_1}{\partial x_l} \right) \times \Delta^{r-1}(P_2, \dots, P_r) \cdot (1 \otimes t^{r-2}) \right\} \right]_{(0,1)}
 \end{aligned}$$

et, aux coefficients  $t^i \otimes \cdots$  (avec  $i > 0$ ) près, nous obtenons :

$$\Delta^{r-1}(P_2, \dots, P_r) \cdot (1 \otimes t^{r-2}) = (r-1) \Delta \left[ (1 \otimes t^{r-2} P_2) \Delta^{r-2}(P_3, \dots, P_r) \right].$$

Donc, en posant  $Q = (r-1)(1 \otimes t^{r-2} P_2) \Delta^{r-2}(P_3, \dots, P_r)$  :

$$\begin{aligned}
 \sum_l f_l \frac{\Delta^r}{r} \left( \frac{\partial P_1}{\partial x_l}, P_2, \dots, P_r \right) &= \sum_l f_l \left[ \Delta \left\{ \left( 1 \otimes t \frac{\partial P_1}{\partial x_l} \right) \Delta(Q) \right\} \right]_{(0,1)} \\
 &= (1 \otimes P_1) \Delta(Q) - \Delta(P_1 Q) \text{ (lemme 2.4)} \\
 &= (1 \otimes P_1) \Delta \left\{ (r-1)(1 \otimes t^{r-2} P_2) \Delta^{r-2}(P_3, \dots, P_r) \right\} \\
 &\quad - \Delta \left\{ (1 \otimes P_1)(r-1)(1 \otimes t^{r-2} P_2) \Delta^{r-2}(P_3, \dots, P_r) \right\} \\
 &= (1 \otimes P_1) \Delta^{r-1}(P_2, \dots, P_r) - \Delta^{r-1}(P_1 \cdot P_2, \dots, P_r).
 \end{aligned}$$

Pour prouver la deuxième égalité, nous allons procéder par récurrence sur  $r$ . La récurrence s'initialise en  $r = 3$ . Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned}
 \sum_l f_l \frac{\Delta^3}{3} \left( P_1, \frac{\partial P_2}{\partial x_l}, P_3 \right) &= \sum_l f_l \left[ \Delta \left\{ \left( 1 \otimes t^2 P_1 \right) \Delta^2 \left( \frac{\partial P_2}{\partial x_l}, P_3 \right) \right\} \right]_{(0,1)} \\
 &= \sum_l \left[ \Delta \left\{ f_l (1 \otimes t P_1) \Delta^2 \left( \frac{\partial P_2}{\partial x_l}, P_3 \right) \right\} \right]_{(0,1)} \text{ (lemme 2.4)} \\
 &= \left[ \Delta \left\{ (1 \otimes t P_1) \times 2 \left\{ (1 \otimes P_2) \Delta(P_3) - \Delta(P_2 P_3) \right\} \right\} \right]_{(0,1)} \\
 &\quad \text{(d'après l'égalité (3))} \\
 &= \Delta^2(P_1 \cdot P_2, P_3) - \Delta^2(P_1 \cdot P_2, P_3).
 \end{aligned}$$

C'est le résultat pour  $r = 3$ . Supposons ensuite  $r > 3$  et le résultat acquis au rang  $r - 1$  ; soit  $2 < i \leq r$ , nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\sum_l f_l \frac{\Delta^r}{r} (P_1, \dots, \frac{\partial P_i}{\partial x_l}, \dots, P_r) &= \\
&= \sum_l f_l \cdot [\Delta \{ (1 \otimes t^{r-1} P_1) \Delta^{r-1} (P_2, \dots, \frac{\partial P_i}{\partial x_l}, \dots, P_r) \}]_{(0,1)} \\
&= \sum_l [\Delta \{ f_l (1 \otimes t^{r-2} P_1) \Delta^{r-1} (P_2, \dots, \frac{\partial P_i}{\partial x_l}, \dots, P_r) \}]_{(0,1)} \quad (\text{lemme 2.4}) \\
&= [\Delta \{ (1 \otimes t^{r-2} P_1) \times (r-1) \Delta^{r-2} (P_2, \dots, P_{i-1} \cdot P_i, \dots, P_r) \}]_{(0,1)} \\
&\quad - [\Delta \{ (1 \otimes t^{r-2} P_1) \times (r-1) \Delta^{r-2} (P_2, \dots, P_i \cdot P_{i+1}, \dots, P_r) \}]_{(0,1)} \quad (\text{par récurrence}) \\
&= \Delta^{r-1} (P_1, \dots, P_{i-1} \cdot P_i, \dots, P_r) - \Delta^{r-1} (P_1, \dots, P_i \cdot P_{i+1}, \dots, P_r).
\end{aligned}$$

C'est le résultat souhaité. Pour  $i = 2$  on fait comme dans le cas  $r = 3$  : on utilise l'égalité (3) au lieu de l'hypothèse de récurrence.

Pour prouver la première égalité, il suffit d'initialiser la récurrence, le raisonnement se faisant ensuite comme pour la seconde égalité. Or nous avons, pour  $r = 2$  :

$$\begin{aligned}
\sum_l f_l \frac{\Delta^2}{2} (P_1, \frac{\partial P_2}{\partial x_l}) &= \sum_l f_l \cdot [\Delta \{ (1 \otimes t P_1) \Delta (\frac{\partial P_2}{\partial x_l}) \}]_{(0,1)} \\
&= \sum_l \Delta \{ f_l (1 \otimes P_1) \Delta (\frac{\partial P_2}{\partial x_l}) \} \quad (\text{lemme 2.4}) \\
&= \Delta \{ (1 \otimes P_1) (1 \otimes P_2 - P_2 \otimes 1) \} \quad (\text{théorème 2.2}) \\
&= \Delta (P_1 \cdot P_2) - (P_2 \otimes 1) \Delta (P_1).
\end{aligned}$$

C'est le résultat au rang  $r = 2$ . □

Remarquons que si l'on avait démontré d'abord les égalités (1) et (2), l'égalité (3) serait équivalente à l'égalité suivante :

**Théorème 2.5.** *Pour tous  $P_1, \dots, P_r$  dans  $A$  ( $r \geq 0$ ), on a :*

$$v \circ \Delta^r (P_1, \dots, P_r) = \Delta^r (P_r, \dots, P_1),$$

où *vst la volte* :  $A \otimes A \rightarrow A \otimes A$ ,  $P \otimes Q \mapsto Q \otimes P$ .

### § 3. Démonstration du théorème principal

On démontre le théorème 1.5. Pour cela, considérons des polynômes  $P_0, \dots, P_r$  dans  $A$ . L'expression  $b \circ s(P_0, \dots, P_r)$  est alors égale à :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{l=0}^{r-j-1} (-1)^{l+r-j} (\cdots \otimes P_l P_{l+1} \otimes \cdots \otimes 1) \sum_{\sigma \in B_j^n} \bar{\Delta}^j \left( \frac{\partial P_{r-j+1}}{\partial x_{\sigma.1}}, \dots, \frac{\partial P_r}{\partial x_{\sigma.j}} \right) \otimes x_{\sigma.1} \wedge \cdots \wedge x_{\sigma.j} \\
 & + \sum_{j=1}^{r-1} (P_0 \otimes \cdots \otimes P_{r-j}) \sum_{\sigma \in B_j^n} \bar{\Delta}^j \left( \frac{\partial P_{r-j+1}}{\partial x_{\sigma.1}}, \dots, \frac{\partial P_r}{\partial x_{\sigma.j}} \right) \otimes x_{\sigma.1} \wedge \cdots \wedge x_{\sigma.j} \\
 & - \sum_{j=1}^r (P_0 \otimes \cdots \otimes P_{r-j} \otimes 1) \times \\
 & \quad \times \sum_{\substack{\sigma \in B_j^n \\ \tau \in P(\sigma[1, \dots, j])}} (-1)^{\ell(\tau)} (1 \otimes \cdots \otimes x_{\tau\sigma.1}) \bar{\Delta}^j \left( \frac{\partial P_{r-j+1}}{\partial x_{\sigma.1}}, \dots, \frac{\partial P_r}{\partial x_{\sigma.j}} \right) \otimes \frac{x_{\tau\sigma.2} \otimes \cdots \otimes x_{\tau\sigma.j}}{j!} \\
 & + 0 \quad (\text{contribution des produits alternés}) \\
 & + \sum_{j=1}^r (-1)^{1-j} (P_0 \otimes \cdots \otimes P_{r-j} \otimes 1) \times \\
 & \quad \times \sum_{\substack{\sigma \in B_j^n \\ \tau \in P(\sigma[1, \dots, j])}} (-1)^{\ell(\tau)} (x_{\tau\sigma.j} \otimes \cdots \otimes 1) \bar{\Delta}^j \left( \frac{\partial P_{r-j+1}}{\partial x_{\sigma.1}}, \dots, \frac{\partial P_r}{\partial x_{\sigma.j}} \right) \otimes \frac{x_{\tau\sigma.1} \otimes \cdots \otimes x_{\tau\sigma.j-1}}{j!} \\
 & + \sum_{\sigma \in B_r^n} P_0 \cdot m \circ \Delta^r \left( \frac{\partial P_1}{\partial x_{\sigma.1}}, \dots, \frac{\partial P_r}{\partial x_{\sigma.r}} \right) \otimes x_{\sigma.1} \wedge \cdots \wedge x_{\sigma.r}.
 \end{aligned}$$

Nous allons réécrire la somme  $\sum (-1)^{\ell(\tau)} (1 \otimes \cdots \otimes x_{\tau\sigma.1}) \bar{\Delta}^j(\cdots) \otimes \cdots$  en regroupant les  $x_{\tau\sigma.1}$  correspondant au même  $x_l$ . La somme vaut alors :

$$\sum_{l=1}^n \sum_{\substack{\sigma \in B_j^n \\ \sigma.1=l}} (1 \otimes \cdots \otimes x_l) \sum_{l=1}^j (-1)^{l-1} \bar{\Delta}^j \left( \frac{\partial P_{r-j+1}}{\partial x_{\sigma.2}}, \dots, \frac{\partial P_{r-j+l}}{\partial x_l}, \dots, \frac{\partial P_r}{\partial x_{\sigma.j}} \right) \otimes \frac{x_{\sigma.2} \wedge \cdots \wedge x_{\sigma.j}}{j}.$$

En faisant de même avec  $\sum (-1)^{\ell(\tau)} (x_{\tau\sigma.j} \otimes \cdots \otimes 1) \bar{\Delta}^j(\cdots) \otimes \cdots$ , on trouve :

$$\sum_{l=1}^n \sum_{\substack{\sigma \in B_j^n \\ \sigma.j=l}} (x_l \otimes \cdots \otimes 1) \sum_{l=1}^j (-1)^{j-l} \bar{\Delta}^j \left( \frac{\partial P_{r-j+1}}{\partial x_{\sigma.1}}, \dots, \frac{\partial P_{r-j+l}}{\partial x_l}, \dots, \frac{\partial P_r}{\partial x_{\sigma.j-1}} \right) \otimes \frac{x_{\sigma.1} \wedge \cdots \wedge x_{\sigma.j-1}}{j}.$$

Ecrivons, maintenant, l'expression développée de  $s \circ b(P_0, \dots, P_r)$  :

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{j=1}^{r-l-1} (-1)^{l+r-1-j} (\dots P_l \cdot P_{l+1} \dots \otimes P_{r-j} \otimes 1) \sum_{\sigma \in B_j^n} \bar{\Delta}^j \left( \frac{\partial P_{r-j+1}}{\partial x_{\sigma \cdot 1}}, \dots, \frac{\partial P_r}{\partial x_{\sigma \cdot j}} \right) \otimes X_{\sigma \cdot 1, \dots, \sigma \cdot j} \\
& + \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{j=r-l}^{r-1} (-1)^{l+r-1-j} (P_0 \otimes \dots \otimes P_{r-j-1} \otimes 1) \sum_{\sigma \in B_j^n} \bar{\Delta}^j \left( \dots, \frac{\partial (P_l \cdot P_{l+1})}{\partial x_{\sigma \cdot ?}}, \dots \right) \otimes X_{\sigma \cdot 1, \dots, \sigma \cdot j} \\
& + \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^{1+j} (P_r \cdot P_0 \otimes \dots \otimes P_{r-1-j} \otimes 1) \sum_{\sigma \in B_j^n} \bar{\Delta}^j \left( \frac{\partial P_{r-j}}{\partial x_{\sigma \cdot 1}}, \dots, \frac{\partial P_{r-1}}{\partial x_{\sigma \cdot j}} \right) \otimes X_{\sigma \cdot 1, \dots, \sigma \cdot j}.
\end{aligned}$$

Les deux premières sommes des expression  $s \circ b(P_0, \dots, P_r)$  et  $b \circ s(P_0, \dots, P_r)$  sont opposées l'une l'autre. On a alors (en utilisant le théorème 2.1) :

$$\begin{aligned}
& (s \circ b + b \circ s)(P_0, \dots, P_r) = \\
& = P_0 \frac{\partial P_1}{\partial x_{\sigma \cdot 1}} \dots \frac{\partial P_r}{\partial x_{\sigma \cdot r}} \otimes X_{\sigma \cdot 1, \dots, \sigma \cdot r} \\
& + \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^j (-1)^l (P_0 \otimes \dots \otimes P_{r-j} \otimes 1) \sum_{\sigma \in B_{j-1}^n} ( \\
& \sum_{l=1}^n [(1 \otimes \dots \otimes x_l) - (x_l \otimes \dots \otimes 1)] \bar{\Delta}^j \left( \frac{\partial P_{r-j+1}}{\partial x_{\sigma \cdot 1}}, \dots, \frac{\partial P_{r-j+l}}{\partial x_l}, \dots, \frac{\partial P_r}{\partial x_{\sigma \cdot j-1}} \right) \otimes \frac{X_{\sigma \cdot 1, \dots, \sigma \cdot j-1}}{j} \\
& + \sum_{j=1}^{r-1} (P_0 \otimes \dots \otimes P_{r-j-1} \otimes P_{r-j}) \sum_{\sigma \in B_j^n} \bar{\Delta}^j \left( \frac{\partial P_{r-j+1}}{\partial x_{\sigma \cdot 1}}, \dots, \frac{\partial P_r}{\partial x_{\sigma \cdot j}} \right) \otimes X_{\sigma \cdot 1, \dots, \sigma \cdot j} \\
& + \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{l=r-j}^{r-1} (-1)^{l+r-1-j} (P_0 \otimes \dots \otimes P_{r-j-1} \otimes 1) \sum_{\sigma \in B_j^n} \bar{\Delta}^j \left( \dots, \frac{\partial (P_l \cdot P_{l+1})}{\partial x_{\sigma \cdot ?}}, \dots \right) \otimes X_{\sigma \cdot 1, \dots, \sigma \cdot j} \\
& + \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^{j+1} (P_0 \cdot P_r \otimes \dots \otimes P_{r-1-j} \otimes 1) \sum_{\sigma \in B_j^n} \bar{\Delta}^j \left( \frac{\partial P_{r-j}}{\partial x_{\sigma \cdot 1}}, \dots, \frac{\partial P_{r-1}}{\partial x_{\sigma \cdot j}} \right) \otimes X_{\sigma \cdot 1, \dots, \sigma \cdot j}.
\end{aligned}$$

Pour terminer la preuve, nous allons donner une écriture développée de  $s \circ b + b \circ s$ . Nous utilisons les théorèmes 2.1, 2.2 et 2.3 pour faire les simplifications adéquates. L'expression  $(s \circ b + b \circ s)(P_0, \dots, P_r)$  vaut alors :

$$\begin{aligned}
 & J \circ I(P_0 \otimes \cdots \otimes P_r) \\
 & - \sum_{j=1}^r (P_0 \otimes \cdots \otimes P_{r-j} \otimes P_{r-j+1}) \sum_{\sigma \in B_{j-1}^n} \bar{\Delta}^{j-1} \left( \frac{\partial P_{r-j+2}}{\partial x_{\sigma \cdot 1}}, \dots, \frac{\partial P_r}{\partial x_{\sigma \cdot j-1}} \right) \otimes X_{\sigma \cdot 1, \dots, \sigma \cdot j-1} \\
 & + \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^{j-1} (-1)^{l+1} (P_0 \otimes \cdots \otimes P_{r-j} \otimes 1) \sum_{\sigma \in B_{j-1}^n} \bar{\Delta}^{j-1} \left( \dots \frac{\partial P_{r-j+l} \cdot P_{r-j+l+1}}{\partial x_{\sigma \cdot ?}} \dots \right) \otimes X_{\sigma \cdot 1, \dots, \sigma \cdot j-1} \\
 & + \sum_{j=1}^r (-1)^{j+1} (P_r \cdot P_0 \otimes \cdots \otimes P_{r-j} \otimes 1) \sum_{\sigma \in B_{j-1}^n} \bar{\Delta}^{j-1} \left( \frac{\partial P_{r-j+1}}{\partial x_{\sigma \cdot 1}}, \dots, \frac{\partial P_{r-1}}{\partial x_{\sigma \cdot j-1}} \right) \otimes X_{\sigma \cdot 1, \dots, \sigma \cdot j-1} \\
 & + \sum_{j=1}^{r-1} (P_0 \otimes \cdots \otimes P_{r-j-1} \otimes P_{r-j}) \sum_{\sigma \in B_j^n} \bar{\Delta}^j \left( \frac{\partial P_{r-j+1}}{\partial x_{\sigma \cdot 1}}, \dots, \frac{\partial P_r}{\partial x_{\sigma \cdot j}} \right) \otimes X_{\sigma \cdot 1, \dots, \sigma \cdot j} \\
 & + \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{l'=r-j}^{r-1} (-1)^{l'+r-1-j} (P_0 \otimes \cdots \otimes P_{r-j-1} \otimes 1) \sum_{\sigma \in B_j^n} \bar{\Delta}^j \left( \dots \frac{\partial P_{l'} \cdot P_{l'+1}}{\partial x_{\sigma \cdot ?}} \dots \right) \otimes X_{\sigma \cdot 1, \dots, \sigma \cdot j} \\
 & + \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^{j+1} (P_r \cdot P_0 \otimes \cdots \otimes P_{r-1-j} \otimes 1) \sum_{\sigma \in B_j^n} \bar{\Delta}^j \left( \frac{\partial P_{r-j}}{\partial x_{\sigma \cdot 1}}, \dots, \frac{\partial P_{r-1}}{\partial x_{\sigma \cdot j}} \right) \otimes X_{\sigma \cdot 1, \dots, \sigma \cdot j}.
 \end{aligned}$$

Après simplifications (en posant  $l' = l + r - j$ ), on obtient finalement :

$$(s \circ b + b \circ s)(P_0, \dots, P_r) = J \circ I(P_0 \otimes \cdots \otimes P_r) - (P_0 \otimes \cdots \otimes P_r) + (P_0 \cdot P_r \otimes \cdots \otimes P_{r-1} \otimes 1),$$

ce qui termine la preuve du théorème (nous travaillons sur  $A/k$ ).

#### § 4. Généralisations

Le but de cette partie est de montrer que l'on peut étendre les résultats de la première partie à des espaces de fonction plus grands : fractions rationnelles, séries entières, fonctions holomorphes sur une variété complexe. L'idée générale est d'approcher les fonctions par des polynômes ou de les développer en séries entières et d'appliquer ensuite la construction donnée dans la partie 1.

Nous allons commencer par étendre  $\Delta$  à l'espace des fractions rationnelles à une variable que nous noterons  $k(x)$ . Nous noterons  $k'(x)$  l'espace des fractions qui sont des dérivées de fractions rationnelles. Sur  $\mathbb{C}$ , nous savons que ce dernier espace est engendré par les polynômes et les fractions du type :  $\frac{1}{(a-x)^l}$  avec  $l > 1$ . Pour évaluer  $\Delta$  sur un des ces derniers termes (on prendra, comme exemple,  $a = 1$ ), écrivons le développement en série entière de  $Q = \frac{1}{(1-x)^l} = \sum_{i \geq 0} C_{i+l-1}^{l-1} x^i$  et appliquons formellement  $\Delta$  à cette série. Nous obtenons une série formelle de produit tensoriel que nous pouvons resommer :

$$\Delta(Q) = \sum_{i \geq 0} C_{i+l-1}^{l-1} \sum_{j=0}^i x^j \otimes x^{i-j} = \sum_{i=1}^{l-1} \frac{1}{l-1} \frac{1}{(1-x)^i} \otimes \frac{1}{(1-x)^{l-i}}.$$

Compte tenu de ces remarques, nous pouvons donner une expression simple de  $\Delta$  sur  $k'(x)$  qui généralise celle de la définition 1.2 :

**Proposition 4.1.** *L'application  $\Delta$  se prolonge en une unique application linéaire :  $k'(x) \rightarrow k'(x) \otimes k'(x)$ , telle que pour  $l > 1$  et  $a$  dans  $\mathbb{C}$  :*

$$\Delta\left(\frac{1}{(a-x)^l}\right) = \frac{1}{l-1} \sum_{\substack{i+j=l \\ i,j \neq 0}} \frac{1}{(a-x)^i} \otimes \frac{1}{(a-x)^j}.$$

Pour étendre l'application d'homotopie à une classe plus importante de fonctions, nous allons donner une nouvelle manière de définir  $\Delta$  équivalente à celle de la définition 1.2 :

**Définition 4.2.** *Soit  $B$  l'algèbre  $B = k[X_1, \dots, X_n]$  et rappelons que  $A = k[x_1, \dots, x_n]$ . On définit  $\Phi : A \rightarrow B$  par :*

$$\Phi(x_{i_1} \cdots x_{i_l}) = \frac{1}{l!} X_{i_1} \cdots X_{i_l}.$$

Cette application est bijective et nous verrons comment lui donner un sens pour des algèbres de fonctions plus générales. L'algèbre  $B$  est en fait une algèbre de Hopf car elle peut être munie d'un coproduit co-commutatif :

**Définition 4.3.** *On définit  $\Delta_0 : B \rightarrow B \otimes B$ , morphisme d'algèbre vérifiant :*

$$\Delta_0(X_i) = 1 \otimes X_i + X_i \otimes 1$$

pour tout générateur  $X_i$  de  $B$ .

Là encore, nous verrons plus tard à quoi correspond ce morphisme sur un espace de fonction général. Remarquons, enfin, que la transformation :  $P \mapsto \frac{1}{\deg P + 1} P$ , pour tout polynôme homogène  $P$ , correspond à une intégration, que nous noterons  $\text{Int}$  par la suite :

$$\text{Int} : A \rightarrow A, P \mapsto \int_0^1 P(tx) dt.$$

Une vérification immédiate nous permet de redéfinir  $\Delta$  :

**Proposition 4.4.** *Pour tout  $P$  dans  $A$  nous avons :*

$$\Delta(P) = (\Phi^{-1} \otimes \Phi^{-1}) \Delta_0(\Phi(\text{Int}(P))).$$

Cette nouvelle définition va nous permettre d'étendre notre formule. Revenons sur l'exemple des fonctions rationnelles. Considérons la fonction  $\frac{1}{(1-x)^2}$  ; il est clair que  $\text{Int}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) = \frac{1}{(1-x)}$  et que  $\Phi\left(\frac{1}{(1-x)}\right) = \exp(x)$ . Il est aussi évident que  $\Delta_0(\exp) = \exp \otimes \exp$ . Nous retrouvons bien :  $(\Phi^{-1} \otimes \Phi^{-1}) \Delta_0\left(\Phi\left(\text{Int}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)\right)\right) = \frac{1}{(1-x)} \otimes \frac{1}{(1-x)} = \Delta\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)$ . Nous aurions pu faire de même avec les fonctions  $\frac{1}{(1-x)^l}$ ,  $l > 1$ . Nous voyons à travers cet exemple, que pour prolonger  $\Delta$ , il suffit de prolonger  $\Phi$  et  $\Delta_0$ . Si  $U$  est un voisinage de 0 dans  $\mathbb{C}^n$ , nous noterons  $\mathcal{O}(U)$  l'espace des fonctions analytiques sur  $U$ .

- Nous pouvons prolonger l'application  $\Phi$  en utilisant l'isomorphisme de Borel-Laplace (cf. [MR]). Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}^n$  contenant 0 et  $f$  une fonction dans  $\mathcal{O}(U)$  telle que  $f(z) = O(z)$  à l'origine. Choisissons un lacet  $\gamma$ , autour de l'origine tel que  $\gamma \subset U$  ; la transformée de Borel est définie par :

$$\mathcal{B}f(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(x) \left( e^{\xi/x} \frac{dx}{x^2} \right).$$

L'image par  $\mathcal{B}$  de l'ensemble des fonctions holomorphes au voisinage de 0 telles que  $f(z) = O(z)$  à l'origine est l'ensemble des fonctions holomorphes sur  $\mathbb{C}$  qui sont de croissance au plus exponentielle à l'infini. Pour  $P$  dans  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  et  $a_1, \dots, a_n$  dans  $\mathbb{C}$ , notons  $\bar{P}_{a_1, \dots, a_n}$  le polynôme :  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\bar{P}_{a_1, \dots, a_n}(z) = z \cdot P(z \cdot a_1, \dots, z \cdot a_n)$ . Il est alors clair que  $\Phi(P)(a_1, \dots, a_n) = \mathcal{B}(\bar{P}_{a_1, \dots, a_n})(1)$ . La définition de  $\mathcal{B}$  nous montre alors que  $\Phi$  se prolonge en une application  $\tilde{\Phi}$  définie sur l'ensemble des fonctions à  $n$  variables, holomorphes en 0. L'image de  $\tilde{\Phi}$  est l'ensemble des fonctions à  $n$  variables, holomorphes en 0 à croissance au plus exponentielle à l'infini.

- L'application  $\Delta_0$  est un cas particulier, sur les polynômes, du coproduit classique sur les fonctions. Pour cela nous remplacerons le produit tensoriel algébrique par le produit tensoriel projectif complété  $\hat{\otimes}_{\pi}$  (cf. [Co], [Gr] pour le cas général et [Do] pour le cas complexe). Nous garderons les mêmes notations que dans le cas algébrique pour désigner les groupes de cohomologie correspondant. Le produit tensoriel est construit de telle sorte que  $\mathcal{O}(U \times V) = \mathcal{O}(U) \hat{\otimes}_{\pi} \mathcal{O}(V)$ . Dans notre cas  $\Delta_0$  correspond à l'application :  $\mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(U) \hat{\otimes}_{\pi} \mathcal{O}(U)$ ,  $f \mapsto \Delta_0(f)$  telle que  $\Delta_0(f)(u, v) = f(u + v)$ . On retrouve bien le fait que  $\Delta_0(\exp) = \exp \otimes \exp$  puisque  $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ . Il est alors clair que  $\Delta_0$  conserve la propriété de croissance au plus exponentielle à l'infini.

Ceci nous permet maintenant de définir  $\Delta : A \rightarrow A \hat{\otimes}_{\pi} A$  (où  $A = \mathcal{O}(U)$ ) par :

$$(D) \quad \Delta(f) = (\tilde{\Phi}^{-1} \otimes \tilde{\Phi}^{-1}) \Delta_0(\tilde{\Phi}(\text{Int}(f))).$$

Les propriétés des parties précédentes sont conservées par continuité des application  $\tilde{\Phi}$ ,  $\Delta_0$  et  $\tilde{\Phi}^{-1}$ . Nous avons ainsi une généralisation de théorème 1.5 :

**Théorème 4.5.** *Soit  $A$  l'algèbre de fonctions holomorphes au voisinage de 0. Soit  $s$  l'application construite à partir des formules de la première partie mais en utilisant la définition (D) de  $\Delta$  ; cette application  $s : A^{\hat{\otimes} r} \rightarrow A^{\hat{\otimes} r+1}$  prolonge l'application définie sur les polynômes et est une homotopie entre le complexe de Hochschild et le complexe de de Rham.*

**Remarque 4.6.** *Soit  $M$  est une variété réelle ; si, sur tout ouvert contractile  $U$ , on pouvait étendre la formule d'homotopie à l'espace des fonction de classe  $C^{\infty}$  sur  $U$ , on pourrait obtenir une formule d'homotopie globale sur  $M$ . En choisissant une partition de l'unité  $(\varphi_U)$  subordonnée à un recouvrement par des ouverts contractiles  $U$ , on pourrait construire une homotopie  $s_U$  sur chaque ouvert  $U$ . Définissons la fonction  $\varphi_U s_U : A^{\otimes l} \rightarrow A^{\otimes l+1}$  où  $\varphi_U$  agit par multiplication sur le premier terme du produit tensoriel. L'application  $\sum_U \varphi_U s_U$  serait alors une homotopie pour l'homologie de Hochschild sur  $M$ .*

**Remarque 4.7.** *On peut appliquer le Théorème 4.5 à des algèbres de fonctions plus grandes où la transformée de Borel est encore définie : par exemple, au cas où  $A$  est*

*l'algèbre des fonctions définies sur des disques de Borel (disques ouverts dont le bord contient 0), ou aussi l'algèbre des fonctions asymptote Gevrey.*

### § 5. Une formule d'homotopie en cohomologie

Ce paragraphe, comme le suivant, donne une application de notre formule. Nous allons montrer comment celle-ci permet de construire une formule d'homotopie pour la cohomologie de Hochschild sur une variété  $M$ . Nous retrouverons ainsi que la cohomologie de Hochschild peut être canoniquement identifiée aux multidérivations antisymétriques (ce résultat est dû à Hochschild, Kostant et Rosenberg). La formule que nous trouvons est différente de celle donnée par De Wilde et Lecomte ([DWL]) mais elle pourra être utilisée de la même manière pour la théorie des déformations.

Dans notre étude, comme dans [DWL], nous nous restreindrons aux cochaînes locales, c'est-à-dire aux opérateurs multidifférentiels. Cette restriction est justifiée par le fait que l'inclusion de ce dernier complexe dans le complexe de Hochschild total induit un isomorphisme en cohomologie. Nous pouvons aussi réduire notre étude au cas où  $M$  est un ouvert contractile : si l'on choisit une partition de l'unité  $\varphi_U$ , et si  $s_U$  est une homotopie sur  $U$ , l'application  $s = \sum_U \varphi_U s_U$  sera une homotopie sur  $M$ . Dans ce cas, nous pouvons considérer que  $M = \mathbb{R}^n$  et restreindre  $A = C^\infty(M)$  aux fonctions à support compact. Notons  $C^m(A, A)$  l'espace des  $m$ -cochaînes à valeur dans  $A$ . La cohomologie de Hochschild est celle du complexe,  $\delta : C^m(A, A) \rightarrow C^{m+1}(A, A)$

$$\begin{aligned} (\delta D)(f_1, \dots, f_{m+1}) &= (-1)^{m-1} f_1 D(f_2, \dots, f_{m+1}) \\ &+ \sum_{i=1}^m (-1)^{m+i-1} D(f_1, \dots, f_i f_{i+1}, \dots, f_{m+1}) \\ &+ D(f_1, \dots, f_m) f_{m+1} \end{aligned}$$

Comme nous l'avons dit plus haut, nous nous restreindrons aux cochaînes locales, c'est-à-dire celle qui s'écrivent sous la forme :

$$D(f_1, \dots, f_m) = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in (\mathbb{N}^n)^m} c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} D^{\alpha_1} f_1 \cdots D^{\alpha_m} f_m$$

où  $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}$  est dans  $C^\infty(M)$  et, si  $\alpha = (a^1, \dots, a^n)$  est dans  $\mathbb{N}^n$  et si  $D_i$  est la dérivé partielle par rapport à la coordonnée  $x_i$ ,  $D^\alpha = D_1^{a^1} \cdots D_n^{a^n}$ . Nous notons  $|\alpha| = a^1 + \cdots + a^n$ .

Lorsque  $A$  est l'espace des fonctions de classe  $L^2$ , nous avons une méthode générale qui transporte des propriétés valables en homologie en des propriétés valables en cohomologie. Cette méthode nous permet, à partir d'une formule d'homotopie en homologie, d'écrire une formule en cohomologie qui restera valable même quand l'espace  $A$  est l'algèbre des fonctions de classe  $C^\infty$ . Rappelons tout d'abord que le dual de l'homologie de Hochschild est la cohomologie à valeur dans le module  $A^*$ , dual topologique, c'est-à-dire celle du complexe :  $\tilde{\delta}, C^m(A, A^*) \rightarrow C^{m+1}(A, A^*)$

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} D'(f_0, \dots, f_{m+1}) &= \sum_{i=0}^m (-1)^i D'(f_0, \dots, f_i f_{i+1}, \dots, f_{m+1}) \\ &+ (-1)^{m+1} D'(f_{m+1} f_0, f_1, \dots, f_m). \end{aligned}$$

Si  $A = L^2(M)$ ,  $A^*$  est un  $A$ -module à droite :  $\psi \cdot a = \psi(a \cdot)$  et l'application  $\mu : A \rightarrow A^*$ ,  $f \mapsto (g \mapsto \int_M fg)$  est un isomorphisme de  $A$ -modules entre  $A$  et  $A^*$ . Nous disposons ainsi d'un morphisme de complexe entre  $C^\cdot(A, A^*)$  et  $C^\cdot(A, A) : D \mapsto \tilde{D}$  tel que :

$$\tilde{D}(f_0, \dots, f_m) = \mu(D(f_1, \dots, f_m))(f_0).$$

Notre formule d'homotopie donne, par dualité, une formule d'homotopie pour la cohomologie à valeur dans le dual (nous noterons  $\tilde{s}$  l'homotopie ainsi trouvée :  $\tilde{s} = s^*$ ). Grâce à l'isomorphisme  $\mu$ , nous construisons enfin une formule d'homotopie pour la cohomologie de Hochschild à valeur dans l'algèbre (homotopie que nous noterons encore  $s$  quand il n'y a pas de confusion possible). Nous allons expliciter cette dernière formule pour la comparer avec celle de De Wilde et Lecomte. L'application  $\tilde{s}$  est l'application duale de l'homotopie  $s : A^{\otimes m+2} \rightarrow A^{\otimes m+1}$ . Elle est donc définie par  $\tilde{s} : C^{m+1}(A, A^*) \rightarrow C^m(A, A^*)$

$$\tilde{s}(D')(f_0, \dots, f_m) = D'(s(f_0 \otimes \dots \otimes f_m)).$$

Ceci nous permet de construire  $s : C^{m+1}(A, A) \rightarrow C^m(A, A)$  dans le cas général. Soit  $D$  dans  $C^{m+1}(A, A)$  et  $\tilde{D} = \mu(D)$  ; l'application  $s$  doit vérifier  $\mu(s(D)) = (-1)^m \tilde{s}(\mu(D))$ .

**Proposition 5.1.** *Soit  $A = C^\infty(M)$ . L'application  $s : C^{m+1}(A, A) \rightarrow C^m(A, A)$ ,*

$$D \mapsto s(D) \text{ telle que } s(D)(f_1, \dots, f_m) = (-1)^m m^o \circ (\text{Id} \otimes D)s(1 \otimes f_1 \otimes \dots \otimes f_m)$$

*pour  $m \geq 1$  et nulle si  $m = 0$ , est une homotopie entre les complexes de Hochschild et de de Rham (dans la formule, on a pu remplacé les fonctions par leurs développements limités car les cochaînes sont locales).*

*Démonstration.* D'après la définition de  $s$  en homologie, il est clair que  $s(f_0 \otimes \dots \otimes f_m) = (f_0 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1).s(1 \otimes \dots \otimes f_m)$  donc lorsque  $A = L^2(M)$ ,

$$\tilde{s}(\mu(D))(f_0, \dots, f_m) = \int_M f_0 s_0 D(s_1 \otimes \dots \otimes s_{m+1}) = (-1)^m \mu(s(D)).$$

On vérifie ensuite que la formule convient aussi lorsque  $A = C^\infty(M)$ . □

Nous allons terminer cette partie en explicitant l'application  $s$  de la proposition 5.1 pour la comparer avec l'homotopie donnée par De Wilde et Lecomte. Commençons par étudier  $s$  sur  $C^2(A, A)$ . Un élément de  $C^2(A, A)$  s'écrit comme somme de termes de la forme  $cD^{\alpha_1}D^{\alpha_2}$ . Pour  $f$  dans  $A$ , écrivons  $\Delta(\frac{\partial f}{\partial x_i}) = \sum \Delta_{1,i}(f) \otimes \Delta_{2,i}(f)$  ; alors les définitions de la première partie nous donnent :  $s(D)(f) = \sum c \Delta_{1,i}(f) D^{\alpha_1}(\Delta_{2,i}(f)) D^{\alpha_2}(x_i)$ . L'identité d'Euler (*cf.* démonstration du théorème 2.1) nous permet d'écrire :

$$s(D)(f) = \sum_i \frac{c}{|\alpha_2| + 1} D^{\alpha_1}(\frac{\partial f}{\partial x_i}) D^{\alpha_2}(x_i).$$

Il est facile de montrer, par une démonstration directe, que cette formule est valable pour n'importe quelle fonction de  $A$  (et pas seulement les polynômes). Pour cela, nous avons besoin de quelques définitions :

**Définition 5.2.** Si  $D$  est une cochaîne locale de  $C^m(A, A)$ , nous adoptons toujours la notation  $D = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} D^{\alpha_1} \dots D^{\alpha_m}$ .

- Pour  $l \geq 1$ , nous définissons  $q_{i,j} : C^m(A, A) \rightarrow C^m(A, A)$  par :

$$q_{i,j}(D) = \sum c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} \frac{1}{i + |\alpha_j|} D^{\alpha_1} \dots D^{\alpha_m}.$$

- On définit, pour  $1 \leq i \leq m$ ,  $\Delta_i : C^m(A, A) \rightarrow C^{m+1}(A, A)$  par :

$$\Delta_i D(f_1, \dots, f_{m+1}) = D(f_1, \dots, f_i f_{i+1}, \dots, f_{m+1}).$$

- Enfin, si  $m \geq 2$ , on définit, pour  $m-1 \geq l \geq 1$ , la cochaîne  $D^{(l)}$  dans  $C^{m+l}(A, A)$  par :

$$D^{(l)} = q_{1, m-1} \circ \Delta_{m-2} \circ \dots \circ \Delta_{m-l} \circ q_{l, m-l}(D).$$

Nous pouvons alors donner une expression plus explicite de notre homotopie  $s$  :

**Théorème 5.3.** L'application  $s : C^{m+1}(A, A) \rightarrow C^m(A, A)$  définie précédemment peut aussi s'écrire :  $s(D)(f_1, \dots, f_m) =$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{\substack{\sigma \in B_j^n \\ \tau \in P(\sigma([1, \dots, n])}} \frac{(-1)^{j+\ell(\sigma)}}{j!} D^{(j)}(f_1, \dots, \frac{\partial f_{m-j+1}}{\partial x_{\sigma \cdot 1}}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_{\sigma \cdot j}}, x_{\tau \sigma \cdot 1}, \dots, x_{\tau \sigma \cdot j}).$$

*Démonstration.* Ce théorème est une conséquence immédiate des travaux de la première partie et des définitions précédentes. On peut aussi vérifier que l'application  $s$  est bien une homotopie en démontrant, par un calcul direct, que :

$$D(f_1, \dots, f_m) = \sum_{\sigma \in B_m^n} \frac{(-1)^{\ell(\sigma)}}{m!} \frac{\partial f_1}{\partial x_{\sigma \cdot 1}} \dots \frac{\partial f_m}{\partial x_{\sigma \cdot m}} D(x_{\sigma \cdot 1}, \dots, x_{\sigma \cdot m}) + (b \circ s + s \circ b)(f_1, \dots, f_m).$$

□

En reprenant les travaux de De Wilde et Lecomte, nous constatons que notre formule est différente de la leur. Elle donne cependant les mêmes possibilités d'application aux constructions de star-produit.

## § 6. Une formule d'homotopie en (co-)homologie cyclique

Nous allons voir, dans cette partie, comment, en perturbant notre formule, on obtient une homotopie entre le complexe cyclique et le complexe de de Rham. Pour cela, nous allons faire quelques rappels sur la notion de perturbation et de rétraction par déformation (cf. [La] et [Ka2]) :

**Définition 6.1.** Une rétraction par déformation  $((C', d'), (C., d), I, J, s)$  est la donnée de deux complexes  $C'$  et  $C.$ , de morphismes de complexes  $: C' \xrightarrow{J} C. \xrightarrow{I} C'$  et d'une homotopie  $s$  sur  $C'$ . tels que :

$$J \circ I = \text{Id} \text{ et } I \circ J = \text{Id} + d' \circ s + s \circ d'.$$

On notera  $RD$  pour rétraction par déformation.

On remarque immédiatement que les travaux des parties précédentes nous permettent d'affirmer que  $((C.(A, A), b), (\Omega'(M), 0), I, J, s)$  est une rétraction par déformation.

**Définition 6.2.** On dit qu'une  $RD ((C', d'), (C., d), I, J, s)$  est **filtrée** s'il existe sur  $C'$  et  $C.$  des filtrations croissantes, bornées inférieurement et préservées par  $I, J$  et  $s$ . La  $RD$  est dite **spéciale**, si de plus :

$$s \circ I = J \circ s = s \circ s = 0.$$

**Remarque 6.3.** A partir d'une  $RD ((C', d'), (C., d), I, J, s)$ , on obtient une  $RD$  spéciale par les procédés suivant :

- Remplacer  $s$  par  $s \circ (b' \circ s + s \circ b')$  permet d'obtenir une homotopie vérifiant  $s \circ I = 0$ .
- Remplacer  $s$  par  $(b' \circ s + s \circ b') \circ s$  permet d'obtenir une homotopie vérifiant  $J \circ s = 0$ .
- Remplacer  $s$  par  $s \circ b' \circ s$  permet d'obtenir une homotopie vérifiant  $s \circ s = 0$ .

Nous avons alors le résultat suivant :

**Proposition 6.4.** La  $RD ((C.(A, A), b), (\Omega'(M), 0), I, J, s)$  est spéciale

*Démonstration.* Il est facile de voir, vu les définitions de la première partie, que  $s \circ I = 0$ .

On suppose la filtration constante. Etudions  $s \circ s$ . L'expression  $s^2(P_0 \otimes P_1 \otimes \dots \otimes P_r)$  fait apparaître des termes du type :

$$\begin{aligned} & (P_0 \Delta_1^{l-m} \left( \frac{\partial P_{r+m+1-l}}{\partial x_{i_{p+1}}}, \dots, \frac{\partial P_r}{\partial x_{i_l}} \right) \otimes \dots \otimes P_{r+1-l} \otimes 1) \times \\ & \times \bar{\Delta}^l \left( \frac{\partial P_{r+2-l}}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial P_{r+m-l}}{\partial x_{i_{m-1}}}, \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \Delta_2^{l-m} \left( \frac{\partial P_{r+m+1-l}}{\partial x_{i_{p+1}}}, \dots, \frac{\partial P_r}{\partial x_{i_l}} \right), 1, \dots, 1 \right) \otimes x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_l}, \end{aligned}$$

où la notation  $\Delta_i^l$  désigne ici la  $i^{\text{ème}}$  composante du produit tensoriel de l'expression  $\Delta^l$ . Or une vérification immédiate, à partir de la définition 1.2, nous permet d'affirmer que, pour tous  $1 \leq l, m \leq n$  et tout polynôme  $Q$ , on a :

$$(1) \quad \Delta_1 \left( \frac{\partial Q}{\partial x_m} \right) \otimes \frac{\partial}{\partial x_l} \Delta_2 \left( \frac{\partial Q}{\partial x_m} \right) = \Delta_1 \left( \frac{\partial Q}{\partial x_l} \right) \otimes \frac{\partial}{\partial x_m} \Delta_2 \left( \frac{\partial Q}{\partial x_l} \right).$$

Ainsi, les termes  $(P_0 \Delta_1^{l-m} \left( \frac{\partial P_{r+m+1-l}}{\partial x_{i_{p+1}}}, \dots \right) \otimes \dots) \Delta^l (\dots \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \Delta_2^{l-m} \left( \frac{\partial P_{r+m+1-l}}{\partial x_{i_{p+1}}}, \dots \right) \dots) \otimes \dots \otimes x_{i_p} \wedge x_{i_{p+1}} \dots$  et  $(P_0 \Delta_1^{l-m} \left( \frac{\partial P_{r+m+1-l}}{\partial x_{i_p}}, \dots \right) \otimes \dots) \Delta^l (\dots \frac{\partial}{\partial x_{i_{p+1}}} \Delta_2^{l-m} \left( \frac{\partial P_{r+m+1-l}}{\partial x_{i_p}}, \dots \right) \dots) \otimes \dots \otimes x_{i_{p+1}} \wedge x_{i_p} \dots$  s'annuleront deux à deux. Ceci nous permet de conclure que  $s \circ s = 0$ .

L'égalité (1) nous permet, de la même façon, de conclure que  $J \circ s = 0$ .  $\square$

Nous allons maintenant énoncer le lemme de perturbation de [Br] (cf. [Ka2]) :

**Lemme 6.5.** *Soit  $((C', d'), (C., d), I, J, s)$  une RD spéciale. Soit  $D'$  une application de degré  $-1$  sur  $C'$ . telle que  $(d' + D')^2 = 0$ . On pose  $D'_l = (D' \circ s)^{l-1} \circ D'$  si  $j \geq 1$  et pour tout  $l \geq 2$  :*

$$\begin{aligned} D_l &= d + J \circ (D'_1 + \cdots + D'_{l-1}) \circ I, \\ I_l &= I + s \circ (D'_1 + \cdots + D'_{l-1}) \circ I, \\ J_l &= J + J \circ (D'_1 + \cdots + D'_{l-1}) \circ s, \\ s_l &= s + s \circ (D'_1 + \cdots + D'_{l-1}) \circ s. \end{aligned}$$

*Si la RD est filtrée et si  $D$  diminue le degré de la filtration, les applications précédentes ont un sens pour  $l = \infty$  et  $((C', d' + D'), (C., D_\infty), I_\infty, J_\infty, s_\infty)$  est une RD spéciale filtrée.*

Nous voulons appliquer ce théorème à la RD spéciale :  $((C.(A, A), b), (\Omega(M), 0), I, J, s)$  et à la différentielle de Connes  $B : C.(A, A) \rightarrow C_{+1}(A, A)$  définie par :

$$B(a_0 \otimes \cdots \otimes a_l) = \sum_{i=0}^l (-1)^{l \cdot i} a_i \otimes \cdots \otimes a_l \otimes \cdots \otimes a_{i-1}.$$

L'application  $B$  vérifie  $(b + B)^2 = 0$  (cf. [Co]) ainsi que les hypothèses liées à la graduation. Nous pouvons ensuite utiliser le lemme 6.5. Nous obtenons alors :

**Théorème 6.6.** *La donnée  $((C.(A, A), b + B), (\Omega(M), d), I_\infty, J, s_\infty)$  est une RD.*

*Démonstration.* On peut regarder le complexe  $(C.(A, A), b + B)$  comme un bicomplexe  $(C_{p,q}(A, A), b, B)$  où  $C_{p,q} = C_{p-q}$ , l'application  $b$  est la différentielle horizontale et  $B$  est la différentielle verticale. On munit ce bicomplexe d'une filtration suivant les lignes. Pour appliquer lemme 6.5, il suffit ensuite de montrer que  $J \circ B \circ s = 0$ . Ceci découle d'un raisonnement semblable à la preuve de la proposition 6.4 en utilisant encore l'égalité (1).  $\square$

Nous avons ainsi retrouvé un résultat classique dû à Connes : le complexe cyclique périodique et le complexe de de Rham sont quasi-isomorphes. De plus, nous avons produit une homotopie explicite. Ce résultat, établi pour les polynômes peut s'étendre sous les conditions décrites dans la partie 4. Enfin, en prenant le dual linéaire des application définies précédemment, nous obtenons un résultat similaire en cohomologie. Lorsque l'algèbre  $A$  désigne l'espace des polynômes sur  $k^n$  ( $A = k[x_1, \dots, x_n]$ ) ou l'espace des fonctions holomorphes sur une variété complexe, nous retrouvons un résultat bien connu : le groupe de cohomologie de Hochschild  $H^l(A, A^*)$  est isomorphe à l'espace des courants de de Rham de dimension  $l$  sur  $M$  (noté  $Z_l(M)$ ). Le morphisme canonique est  $J^* : Z_l(M) \rightarrow H^l(A, A^*)$  :

$$J^*(C)(f_0, \dots, f_l) = \langle C, f_0 d f_1 \wedge \cdots \wedge d f_l \rangle.$$

De même, la cohomologie cyclique périodique  $H_\lambda^l(A, A^*)$  est isomorphe à l'homologie de de Rham  $H_l(M)$ .

## REFERENCES

- [Br] R. Brown, *The twisted Eilenberg-Zilber theorem*, Edizioni Oderisi, Gubbio, Simposio di Topologia 1965 (Messina, 1964), 33–37.
- [Co] A. Connes, *Géométrie non commutative*, Interédition, Paris (1990), Publ. Math. IHES **62** (1985), 41-144.
- [DWL] M. De Wilde, P. Lecomte, *An homotopy formula for the Hochschild cohomology*, Compositio Math. **96** (1995), no.1, 99–109.
- [Do] R. Douady, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. (French) Quelques problèmes de modules (Sém. Géom. Anal. École Norm. Sup., Paris, 1971-1972)*, Asterisque, No. 16, Soc. Math. France, Paris (1974), pp. 7–32.
- [Gr] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques*, Memoirs Am. Math. Soc. **16** (1955), 140 pp..
- [Ho] G. Hochschild, *Relative homological algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **82** (1956), 246-269.
- [HKR] G. Hochschild, B. Kostant et A. Rosenberg, *Differential forms on regular affine algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **102** (1962), 383-408.
- [Ka1] C. Kassel, *L'homologie cyclique des algèbres enveloppantes*, Invent. Math. **91** (1988), no. 2, 221–251.
- [Ka2] C. Kassel, *Homologie cyclique, caractère de Chern et lemme de perturbation*, Angew. Math. **408** (1990), 159–180.
- [Kos] J. Koszul, *Homologie and cohomologie des algèbres des Lie*, Bull. Soc. Math. France **78** (1950), 487-518.
- [La] L. A. Lambe, *Homological perturbation theory, Hochschild homology, and formal groups. Deformation theory and quantum groups with applications to mathematical physics (Amherst, MA, 1990)*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, Contemp. Math. **134** (1992), 183–218.
- [LS] L. A. Lambe, J. D. Stasheff, *Applications of perturbation theory to iterated fibrations*, Manuscripta Math. **58** (1987), no. 3, 363–376.
- [Lo] J.-L. Loday, *Cyclic Homology*, Springer Verlag, Berlin, Die Grundlehren der Math. Wissenschaften, **301** (1992), xvii + 454 pp..
- [LQ] J.-L. Loday, D. Quillen, *Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices*, Comment. Math. Helv. **59** (1984), no. 4, 569–591.
- [ML] S. MacLane, *Homology*, Springer Verlag, NY, Die Grundlehren der Math. Wissenschaften, **Band 114** (1967), xii+462 pp..
- [MR] J. Martinet et J.P. Ramis, *Théorie de Galois différentielle et resommation - Computer algebra and differential equations*, Academic Press, London New-York, Comput. Math. Appl. (1990), 117-214.
- [May] J. Peter May, *The cohomology of restricted Lie algebras and Hopf algebras*, J. Alg. **3** (1966), 123-146.
- [Ve] J.-L. Verdier, *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, Astérisque **239** (1996), xii + 253 pp..

GILLES HALBOUT

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE, UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR – C.N.R.S.  
 7, RUE RENÉ DESCARTES — F-67084 STRASBOURG CEDEX — FRANCE  
 E-MAIL: HALBOUT@MATH.U-STRASBG.FR