

CONSTRUCTION PAR DUALITÉ DES ALGÈBRES DE KAC-MOODY SYMÉTRISABLES

GILLES HALBOUT

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur – C.N.R.S.
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France

ABSTRACT. We know that there is a one to one correspondance between Kac-Moody algebras and generalized Cartan matrices. In [Kac], one can find a way to reconstruct such an algebra as a Lie algebra presented by generators and relations. The aim of the present work is to give another way to reconstruct those algebras when the Cartan matrix is symmetrisable. Our method will use a semi-classical version of technics of quantum groups (*cf.* [Lu], [KRT]).

§ 0. Introduction

Considérons une matrice de Cartan $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. On a la proposition suivante :

Proposition 0.1. (*cf.* [Kac]) *Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une matrice de Cartan indécomposable, il existe une réalisation de A c'est-à-dire un triplet $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ où \mathfrak{h} est un espace vectoriel de dimension $2n - \text{rg}(A)$, Π et Π^\vee sont des ensembles d'éléments $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ et $\{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\}$ linéairement indépendants de \mathfrak{h}^* et de \mathfrak{h} respectivement, tels que :*

$$\alpha_j(\alpha_i^\vee) = a_{ij}.$$

Rappelons maintenant la construction d'une algèbre de Kac-Moody à partir d'une matrice de Cartan généralisée. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice de Cartan généralisée et $(\mathfrak{h}, \Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\})$ une réalisation associée. Soit $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ l'algèbre de Lie définie par les générateurs e_i, f_i , avec $1 \leq i, j \leq n$ et \mathfrak{h} et les relations :

$$\begin{aligned} [e_i, f_j] &= \delta_{ij} \alpha_i^\vee, & [h, h'] &= 0, \\ [h, e_i] &= \alpha_i(h) e_i & [h, f_i] &= -\alpha_i(h) f_i \end{aligned}$$

(pour $1 \leq i, j \leq n$ et h, h' dans \mathfrak{h}). L'application naturelle $\mathfrak{h} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}(A)$ est injective. Parmi les idéaux de $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ qui rencontrent trivialement \mathfrak{h} il en existe un maximal. Notons le \mathfrak{r} .

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 17B20, (16W30, 17B01, 17B37)

Définition 0.2. *Avec les notations précédentes, on appelle algèbre de Kac-Moody associée à la matrice de Cartan généralisée A , l'algèbre de Lie :*

$$\mathfrak{g}(A) = \tilde{\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{r}.$$

Dans le cas particulier où la matrice A est symétrisable, nous avons une description plus précise de l'idéal \mathfrak{r} :

Proposition 0.3. *(cf. [GKa]) Si la matrice de cartan A est symétrisable, l'idéal \mathfrak{r} intervenant dans la construction de l'algèbre de Kac-Moody associée à A est engendré par les éléments :*

$$(\text{ad } e_i)^{1-a_{ij}} e_j \text{ et } (\text{ad } f_i)^{1-a_{ij}} f_j \text{ (pour } 1 \leq i \neq j \leq n).$$

Ces relations sont appelées relations de Serre.

Remarque 0.4. *Dans le cas particulier où la matrice de Cartan A est de type fini (ce qui implique qu'elle est symétrisable) et indécomposable, l'algèbre de Kac-Moody associée à A est une algèbre de Lie simple (cf. [Bou3]).*

Dans ce travail, nous proposons une nouvelle construction de l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$ associée à une matrice de Cartan symétrisable A en utilisant des versions semi-classiques de techniques des groupes quantiques (cf. [BD1], [BD2], [BD3], [Dr1], [Dr2]). Nous commencerons par faire quelques rappels sur les notions de bigèbre de Lie et de double de Manin. Après avoir fait l'étude sur l'exemple simple de $\mathfrak{sl}_2(k)$, nous considérerons le cas général : à partir des coefficients de la matrice de Cartan, on peut construire deux algèbres de Lie, qui seront l'analogie des sous-algèbres de Borel correspondant aux poids positifs et négatifs. En mettant convenablement ces deux algèbres en dualité, on obtient une bigèbre de Lie. Cette bigèbre contient deux copies de l'algèbre de Lie \mathfrak{h} (analogie de la sous-algèbre de Cartan) qui est l'intersection des deux sous-algèbres de Borel. On obtient alors l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$. Cette méthode permet, entre autre, de s'affranchir partiellement des relations de Serre, qui sont difficiles à manipuler dans les autres constructions.

REMERCIEMENTS

Je voudrais remercier P. Cartier et M. Rosso pour leurs précieux conseils et pour l'attention qu'ils ont bien voulu porter à mon travail.

§ 1. Bigèbres en dualité, doubles de Manin

Dans cette partie, nous allons rappeler les définitions des structures introduites par Drinfeld ([Dr]). Notons, tout d'abord, que l'on peut donner une définition d'une algèbre de Lie à l'aide de la dérivation de Lie.

Proposition 1.1. *Une algèbre de Lie \mathfrak{g} est un espace vectoriel \mathfrak{g} , muni d'une application linéaire de degré -1, $\delta^{Lie} : \wedge \mathfrak{g} \rightarrow \wedge \mathfrak{g}$ vérifiant pour tous X, X_1, \dots, X_n dans \mathfrak{g} :*

- $\delta^{Lie}(X) = 0,$

- $\delta^{Lie}(X_1 \wedge \cdots \wedge X_n) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} \delta^{Lie}(X_i \wedge X_j) \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge \hat{X}_i \wedge \cdots \wedge \hat{X}_j \wedge \cdots \wedge X_n$,
- $\delta^{Lie} \circ \delta^{Lie} = 0$.

Le crochet de Lie est alors défini par : $[X, Y] = \delta^{Lie}(X \wedge Y)$.

De manière duale, on peut définir une **cogèbre de Lie** :

Définition 1.2. Une cogèbre de Lie est un espace vectoriel \mathfrak{g} , muni d'une application linéaire de degré 1, appelée cocrochet, $\delta_{Lie}^* : \wedge \mathfrak{g} \rightarrow \wedge \mathfrak{g}$ vérifiant :

- $\delta_{Lie}^* \circ \delta_{Lie}^* = 0$,
- δ_{Lie}^* est une dérivation, c'est-à-dire qu'elle vérifie, pour tous u, v dans $\wedge \mathfrak{g}$, avec u homogène : $\delta_{Lie}^*(u \wedge v) = \delta_{Lie}^* u \wedge v + (-1)^{\deg u} u \wedge \delta_{Lie}^* v$.

Le dual linéaire d'une cogèbre de Lie est une algèbre de Lie. La réciproque n'est vraie qu'en dimension finie. Donnons enfin la définition d'une **bigèbre de Lie** :

Définition 1.3. Une bigèbre de Lie est un espace vectoriel \mathfrak{g} muni à la fois d'une structure d'algèbre de Lie (de crochet noté δ^{Lie}) et d'une structure de cogèbre de Lie (de cocrochet noté δ_{Lie}^*), ces deux structures étant compatibles, c'est-à-dire que pour tous X, Y dans \mathfrak{g} :

$$(\delta_{Lie}^* \circ \delta^{Lie})(X \wedge Y) = -(\delta^{Lie} \circ \delta_{Lie}^*)(X \wedge Y) + (\delta^{Lie} \circ \delta_{Lie}^*(X)) \wedge Y + X \wedge (\delta^{Lie} \circ \delta_{Lie}^*(Y)).$$

Cette dernière relation est équivalente à $\delta_{Lie}^*([X, Y]) = [X, \delta_{Lie}^* Y] + [\delta_{Lie}^* X, Y]$, pour tous X, Y dans \mathfrak{g} , où $[X, \cdot]$ est l'action adjointe de X sur $\wedge \mathfrak{g}$.

Dans la suite de ce travail, nous noterons plus simplement $\delta = \delta^{Lie}$ et $\delta^* = \delta_{Lie}^*$. Si $(\mathfrak{g}, \delta_1, \delta_1^*)$ est une bigèbre de Lie de dimension finie, le dual linéaire \mathfrak{g}^* peut aussi être muni d'une structure de bigèbre de Lie en prenant les applications transposées de δ_1 et δ_1^* que nous noterons respectivement δ_2^* et δ_2 . Nous désignerons les éléments de \mathfrak{g} par des lettres latines et ceux de \mathfrak{g}^* par des lettres grecques. On peut munir l'espace vectoriel $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$, d'une structure d'algèbre de Lie qui prolonge celles données sur \mathfrak{g} et \mathfrak{g}^* ainsi que d'une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée et ad-invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ qui prolonge la dualité entre \mathfrak{g} et \mathfrak{g}^* . En d'autres termes, on construit un double de Manin. Nous voulons maintenant étendre cette construction au cas plus général de deux bigèbres de Lie accouplées.

Définition 1.4. Un accouplement entre deux bigèbres de Lie $(\mathfrak{g}_1, \delta_1, \delta_1^*)$ et $(\mathfrak{g}_2, \delta_2, \delta_2^*)$ est une forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2) \times (\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2)$ nulle sur les produits $\mathfrak{g}_i \times \mathfrak{g}_i$ et compatible avec les produits et coproduits donnés, c'est-à-dire, pour tous X_1, Y_1 dans \mathfrak{g}_1 et X_2, Y_2 dans \mathfrak{g}_2 :

$$\begin{aligned} \langle \delta_1(X_1 \wedge Y_1), X_2 \rangle &= \langle X_1 \wedge Y_1, \delta_2^* X_2 \rangle \\ \langle X_1, \delta_2(X_2 \wedge Y_2) \rangle &= \langle \delta_1^* X_1, X_2 \wedge Y_2 \rangle. \end{aligned}$$

Cette nouvelle structure est une généralisation de la situation des paires de Manin mais ici on n'impose pas que la forme bilinéaire soit non dégénérée. On peut cependant retrouver un analogue du théorème de Drinfeld :

Théorème 1.5. Si les bigèbres de Lie $(\mathfrak{g}_1, \delta_1, \delta_1^*)$ et $(\mathfrak{g}_2, \delta_2, \delta_2^*)$ sont accouplées au moyen de la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on peut munir $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ d'une structure d'algèbre de Lie telle que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ soit ad-invariante.

Démonstration. Explicitons les expressions obtenues quand la forme bilinéaire était non dégénérée. Pour tous X_1 dans \mathfrak{g}_1 et X_2 dans \mathfrak{g}_2 , notons $\delta_1^* X_1 = \sum_i X_{1,i}^1 \wedge X_{1,i}^2$ et $\delta_2^* X_2 =$

$\sum_i X_{2,i}^1 \wedge X_{2,i}^2$, on a alors

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= \sum_i (\langle X_2, X_{1,i}^1 \rangle X_{1,i}^2 - \langle X_2, X_{1,i}^2 \rangle X_{1,i}^1) \\ &\quad - \sum_i (\langle X_{2,i}^1, X_1 \rangle X_{2,i}^2 - \langle X_{2,i}^2, X_1 \rangle X_{2,i}^1). \end{aligned}$$

On vérifie ensuite que ce crochet est compatible avec la forme bilinéaire (la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est ad-invariante) et que c'est un crochet de Lie. \square

§ 2. Résultats intermédiaires

Dans cette partie nous allons démontrer quelques résultats clés qui nous seront utiles pour les constructions des parties suivantes. On se reportera à [Bou1, ch.II §2] pour la définition des algèbres de Lie libres. Si X est un ensemble, l'algèbre de Lie libre $L(X)$, engendrée par X peut être munie d'une **graduation totale** telle que $\deg x = 1$:

$$L(X) = \bigoplus_{n \geq 1} L^n(X) \text{ et } [L^n(X), L^m(X)] \subset L^{n+m}(X)$$

où $L^n(X)$ désigne l'espace des éléments de $L(X)$ de degré n . Nous allons démontrer les résultats suivants :

Lemme 2.1. *Soit $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ une algèbre de Lie, munie d'une dérivation $\delta^* : \wedge^1 \mathfrak{g} \rightarrow \wedge^{+1} \mathfrak{g}$ compatible avec le crochet $[\cdot, \cdot]$. On a alors, pour tous X, Y dans \mathfrak{g} :*

$$\delta^* \circ \delta^*[X, Y] = [\delta^* \circ \delta^* X, Y] + [X, \delta^* \circ \delta^* Y].$$

Démonstration. Soient X, Y deux éléments de \mathfrak{g} ; écrivons $\delta^* X = \sum_i X_i \wedge X'_i$ et $\delta^* Y = \sum_j Y_j \wedge Y'_j$ et notons δ^{*2} pour $\delta^* \circ \delta^*$. On a alors :

$$\begin{aligned} \delta^{*2}[X, Y] &= \delta^*([\delta^* X, Y] + [X, \delta^* Y]) = \delta^*([\sum_i X_i \wedge X'_i, Y] + [X, \sum_j Y_j \wedge Y'_j]) \\ &= \sum_i \delta^*[X_i, Y] \wedge X'_i - \sum_i [X_i, Y] \wedge \delta^* X'_i - \sum_i \delta^*[X'_i, Y] \wedge X_i + \sum_i [X'_i, Y] \wedge \delta^* X_i \\ &\quad + \sum_j \delta^*[X, Y_j] \wedge Y'_j - \sum_j [X, Y_j] \wedge \delta^* Y'_j - \sum_j \delta^*[X, Y'_j] \wedge Y_j + \sum_j [X, Y'_j] \wedge \delta^* Y_j. \end{aligned}$$

On voit alors, en développant et en simplifiant, que l'expression $\delta^{*2}[X, Y]$ est égale à : $\sum_i [\delta^* X_i \wedge X'_i, Y] - \sum_i [X_i \wedge \delta^* X'_i, Y] + \sum_j [X, \delta^* Y_j \wedge Y'_j] - \sum_j [X, Y_j \wedge \delta^* Y'_j]$, c'est à dire :

$$\delta^{*2}[X, Y] = [\delta^{*2} X, Y] + [X, \delta^{*2} Y]. \quad \square$$

Proposition 2.2. *Soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie libre engendrée par X_1, \dots, X_n . Pour tous u_1, \dots, u_n dans $\wedge^2 \mathfrak{g}$, il existe une unique application $\delta^* : \mathfrak{g} \rightarrow \wedge^2 \mathfrak{g}$ vérifiant :*

$$\forall 1 \leq i \leq n, \delta^* X_i = u_i,$$

que l'on peut étendre en une dérivation de degré 1 sur $\wedge \mathfrak{g}$. Si, de plus, pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $\delta^* \circ \delta^* X_i = 0$, alors pour tout X dans \mathfrak{g} , $\delta^* \circ \delta^* X = 0$. Sous ces conditions, $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \delta^*)$ est une bigèbre de Lie.

Démonstration. Soit \mathfrak{a} l'espace vectoriel $\mathfrak{g} \oplus \wedge \mathfrak{g}$. L'espace \mathfrak{a} est alors canoniquement muni d'une structure d'algèbre de Lie : pour X, Y dans \mathfrak{g} , u, v dans $\wedge \mathfrak{g}$ et $U = X + u, V = Y + v$, on pose :

$$[U, V] = [X, Y] + X.v - Y.u = [X, Y] + [X, v] + [u, Y].$$

Puisque \mathfrak{g} est une algèbre de Lie libre engendrée par un nombre fini d'éléments, la propriété universelle fournit un unique morphisme d'algèbre de Lie $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{a}$ qui associe $X_i + u_i$ à X_i pour tout $1 \leq i \leq n$. Si l'on appelle δ^* la composée de f et de la projection $\mathfrak{g} \oplus \wedge \mathfrak{g} \rightarrow \wedge \mathfrak{g}$, on vérifie immédiatement que pour tous X, Y dans \mathfrak{g} , $\delta^*[X, Y] = [X, \delta^*Y] + [\delta^*X, Y]$. Ceci prouve la première partie de la proposition.

Si l'on suppose de plus, que $\delta^{*2} X_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$, alors on a $\delta^{*2} X = 0$ pour tout X dans \mathfrak{g} . Ceci est immédiat d'après le lemme 2.1 en faisant une récurrence sur le degré de X dans \mathfrak{g} .

Enfin, dans ces conditions, l'espace vectoriel \mathfrak{g} est une algèbre de Lie munie d'un crochet δ^* vérifiant $\delta^{*2} = 0$ et la condition de compatibilité suivante : pour tous X, Y dans \mathfrak{g} , on a $\delta^*[X, Y] = [X, \delta^*Y] + [\delta^*X, Y]$. Donc \mathfrak{g} est une bigèbre de Lie. \square

On obtient alors une version semi-classique d'un résultat de Van Daele dans le cas quantique (cf. [VD] et aussi [Ka]) :

Proposition 2.3. *Soient \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' deux bigèbres de Lie munies des cocrochets δ^* et δ'^* . On suppose que l'algèbre de Lie \mathfrak{g} (respectivement \mathfrak{g}') est l'algèbre de Lie libre engendrée par X_1, \dots, X_n (respectivement X'_1, \dots, X'_n). On suppose que pour tout $1 \leq i \leq n$, $\delta^* X_i$ est dans $\wedge^2 \text{Vect}(X_1, \dots, X_n)$ et $\delta'^* X'_i$ est dans $\wedge^2 \text{Vect}(X'_1, \dots, X'_n)$. Alors, pour toute matrice $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, il existe un unique accouplement $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entre les bigèbres \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' tel que pour tous $1 \leq i, j \leq n$, on ait $\langle X_i, X'_j \rangle = a_{ij}$.*

Démonstration. Soit une matrice $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ quelconque. La restriction de δ'^* à l'espace $\text{Vect}(X'_1, \dots, X'_n)$ en fait une cogèbre de Lie \mathfrak{a}' . Son dual linéaire, que nous notons \mathfrak{a}'^* , est une algèbre de Lie. Pour tout $1 \leq l \leq n$, définissons Y'_l dans \mathfrak{a}'^* par : $Y'_l(X'_i) = a_{li}$ pour tout $1 \leq i \leq n$. D'après la propriété universelle, il existe un unique morphisme d'algèbre de Lie,

$$f' : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{a}'^*, X_l \mapsto Y'_l \quad \forall 1 \leq l \leq n.$$

Posons $\langle X, X' \rangle = f'(X)(X')$ pour tous X dans \mathfrak{g} et X' dans \mathfrak{a}' et étendons la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\wedge \mathfrak{g} \times \wedge \mathfrak{a}'$ de manière canonique. Par définition du crochet sur \mathfrak{a}'^* , on a pour tous X, Y dans \mathfrak{g} et X' dans \mathfrak{a}'^* :

$$\langle [X, Y], X' \rangle = [f'(X), f'(Y)](X') = \langle f'(X) \wedge f'(Y), \delta'^* X' \rangle = \langle X \wedge Y, \delta'^* X' \rangle. \quad (1)$$

Le dual linéaire de \mathfrak{g} , que nous notons \mathfrak{g}^* est une algèbre de Lie. Définissons, pour $1 \leq l \leq n$, l'élément Y_l de \mathfrak{g}^* par $Y_l(X) = \langle X, X'_l \rangle$. En utilisant à nouveau la propriété universelle, on construit un unique morphisme d'algèbres de Lie,

$$f : \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}^*, X'_l \mapsto Y_l \quad \forall 1 \leq l \leq n.$$

Posons pour tous X dans \mathfrak{g} et X' dans \mathfrak{g}' : $\langle X, X' \rangle = f(X')(X)$ et étendons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ à $\wedge \mathfrak{g} \times \wedge \mathfrak{g}'$ de manière canonique. Par définition du crochet sur \mathfrak{g}^* , on a pour tous X', Y' dans \mathfrak{g}' et X dans \mathfrak{g} :

$$\langle X, [X', Y'] \rangle = [f(X'), f(Y')](X) = \langle \delta^* X, f(X') \wedge f(Y') \rangle = \langle \delta^* X, X' \wedge Y' \rangle. \quad (2)$$

La forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit alors un accouplement entre les deux bigèbres de Lie \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' . En effet, d'une part, l'égalité (2) nous assure que pour tous X dans \mathfrak{g} , X', Y' dans \mathfrak{g}' on a $\langle X, [X', Y'] \rangle = \langle \delta^* X, X' \wedge Y' \rangle$. Démontrons que pour tous X, Y dans \mathfrak{g} et X' dans \mathfrak{g}' on a $\langle [X, Y], X' \rangle = \langle X \wedge Y, \delta'^* X' \rangle$, en faisant une récurrence sur le degré de X' : on a déjà vu le résultat pour $\deg X' = 1$ (c'est l'égalité (1)). Si on suppose le résultat vrai pour $\deg X' \leq m$, alors pour $X' = [X'_1, X'_2]$ dans \mathfrak{g}' avec $1 \leq \deg X'_1, \deg X'_2 \leq m$ et pour tous X, Y dans \mathfrak{g} , on a :

$$\begin{aligned} \langle [X, Y], X' \rangle &= \langle [X, Y], [X'_1, X'_2] \rangle = \langle \delta^* [X, Y], X'_1 \wedge X'_2 \rangle \\ &= \langle -\delta \circ \delta^* (X \wedge Y) + \delta \circ \delta^* X \wedge Y - \delta \circ \delta^* Y \wedge X, X'_1 \wedge X'_2 \rangle \\ &= \langle -\delta^* (X \wedge Y), \delta'^* (X'_1 \wedge X'_2) \rangle \\ &\quad + \langle \delta^* X, \delta'^* X'_1 \rangle \cdot \langle Y, X'_2 \rangle - \langle \delta^* X, \delta'^* X'_2 \rangle \cdot \langle Y, X'_1 \rangle \\ &\quad - \langle \delta^* Y, \delta'^* X'_1 \rangle \cdot \langle X, X'_2 \rangle + \langle \delta^* Y, \delta'^* X'_2 \rangle \cdot \langle X, X'_1 \rangle \\ &= \langle X \wedge Y, -\delta' \circ \delta'^* (X'_1 \wedge X'_2) + \delta' \circ \delta'^* X'_1 \wedge X'_2 - \delta' \circ \delta'^* X'_2 \wedge X'_1 \rangle \\ &= \langle X \wedge Y, \delta'^* [X'_1, X'_2] \rangle, \end{aligned}$$

où δ et δ' sont les extensions des crochets sur $\wedge \mathfrak{g}$ et sur $\wedge \mathfrak{g}'$. C'est le résultat cherché au rang $m + 1$.

D'autre part, la propriété universelle d'une algèbre de Lie libre engendrée par un nombre fini d'éléments nous assure que la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie de manière unique. \square

Pour terminer cette partie, nous allons définir, par dualité avec la notion d'idéal, la notion de **coïdéal** d'une cogèbre de Lie :

Définition 2.4. Soit \mathfrak{g} une cogèbre de Lie de cocrochet δ^* . On dit que \mathfrak{i} est un coïdéal de \mathfrak{g} si $\delta^* X$ est dans $\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{i}$ pour tout X dans \mathfrak{g} .

Proposition 2.5. Soient (\mathfrak{g}, δ^*) et $(\mathfrak{g}', \delta'^*)$ deux bigèbres de Lie accouplées par la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et engendrées, comme algèbres de Lie, par un nombre fini d'éléments. On suppose qu'il existe des éléments $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(V_j^i)_{1 \leq i, j \leq n}$ dans \mathfrak{g} tels que, pour tout $1 \leq i \leq n$, $\delta^* U_i$ est dans $\text{Vect}(U_j \wedge V_j^i)_{1 \leq j \leq n}$. Si pour tout $1 \leq i \leq n$, U_i est orthogonal aux générateurs de \mathfrak{g}' , alors l'idéal engendré par les éléments $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ est orthogonal à \mathfrak{g}' et c'est un coïdéal.

Démonstration. Soient \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' deux bigèbres de Lie accouplées. Soit $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'éléments de \mathfrak{g} vérifiant les conditions de la proposition. Soit \mathfrak{i} l'idéal engendré par les $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$. Montrons par récurrence sur $\deg X'$, $X' \in \mathfrak{g}'$ que U_i est orthogonal à X' pour tout $1 \leq i \leq n$. L'hypothèse nous donne le résultat au rang 1. Supposons le résultat acquis pour $\deg X' \leq m$. Soit X' dans \mathfrak{g}' , $X' = [X'_1, X'_2]$ avec $1 \leq \deg X'_1, \deg X'_2 \leq m$. On a

$$\forall 1 \leq i \leq n, \langle U_i, [X'_1, X'_2] \rangle = \langle \delta^* U_i, X'_1 \wedge X'_2 \rangle = \left\langle \sum_j u_{ij} U_j \wedge V_j^i, X'_1 \wedge X'_2 \right\rangle = 0.$$

C'est le résultat cherché au rang $m + 1$. Considérons maintenant un élément X dans l'idéal \mathfrak{i} qui ne soit pas dans $(\text{Vect}(U_i))_{1 \leq i \leq n}$; on peut écrire $X = \sum_i x_i [X_i, U_i]$ et alors pour tout X' dans \mathfrak{g}' , on a

$$\langle X, X' \rangle = \langle \sum_i x_i [X_i, U_i], X' \rangle = \sum_i x_i \langle X_i \wedge U_i, \delta'^* X' \rangle = 0.$$

On a ainsi démontré que \mathfrak{i} est orthogonal à \mathfrak{g}' . Soit de nouveau X dans \mathfrak{i} , on peut écrire $X = \sum_i x_i [X_i, U_i]$. Alors $\delta^* X = \sum_i x_i \delta^* [X_i, U_i] = \sum_i x_i [\delta^* X_i, U_i] + \sum_i x_i [X_i, \sum_j u_{ij} U_j \wedge V_j^i]$ et donc l'élément $\delta^* X$ est dans $\mathfrak{i} \wedge \mathfrak{g}$. L'espace \mathfrak{i} est bien un coïdéal. \square

Ces résultats vont nous permettre de reconstruire une algèbre de Lie simple par dualité. Nous commencerons par étudier le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(k)$.

§ 3. Exemple de construction : $\mathfrak{sl}_2(k)$

Commençons par quelques rappels. L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(k)$ est l'espace vectoriel engendré par les éléments α^\vee, E, F et le crochet de Lie est donné par :

$$[\alpha^\vee, E] = 2E, [\alpha^\vee, F] = -2F, [E, F] = \alpha^\vee.$$

Considérons les sous-algèbres : $\mathfrak{b}_+ = kH^+ \oplus kE$ et $\mathfrak{b}_- = kH^- \oplus kE$, où $H^+ = H^- = \alpha^\vee$. Nous allons construire un accouplement entre les algèbres \mathfrak{b}_+ et \mathfrak{b}_- . Pour cela, utilisons la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle = K(\cdot, \cdot)/4$, où K est la forme de Killing. La forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est ad-invariante, non dégénérée, nulle sur $\mathfrak{b}_+ \otimes \mathfrak{b}_+$ et $\mathfrak{b}_- \otimes \mathfrak{b}_-$ et elle vérifie

$$\langle H^+, H^- \rangle = 2, \langle H^+, F \rangle = 0, \langle E, H^- \rangle = 0, \langle E, F \rangle = 1.$$

Par dualité, on définit sur \mathfrak{b}_+ et sur \mathfrak{b}_- une structure de cogèbre de Lie en les munissant des cocrochets δ_+^* et δ_-^* tels que :

$$\begin{aligned} \delta_+^* H^+ &= 0, \delta_+^* E = -H^+ \wedge E \\ \delta_-^* H^- &= 0, \delta_-^* F = H^- \wedge F. \end{aligned}$$

On vérifie ensuite que \mathfrak{b}_+ et \mathfrak{b}_- sont en fait des bigèbres de Lie, ce qui permet de munir $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_+ \oplus \mathfrak{b}_- = \mathfrak{sl}_2(k) \oplus kH$ d'une structure d'algèbre de Lie faisant de $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_+, \mathfrak{b}_-)$ un double de Manin. La projection $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{sl}_2(k)$ a pour noyau $k(H^+ - H^-)$, qui est le centre de \mathfrak{a} si bien que $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(k)$ est l'algèbre dérivée de \mathfrak{a} . Ces constatations vont nous permettre de retrouver $\mathfrak{sl}_2(k)$ de manière implicite.

Soit \mathfrak{a}_+ (respectivement \mathfrak{a}_-) l'algèbre de Lie libre engendrée par H^+ et E (respectivement par H^- et F). D'après la proposition 2.2, on peut munir les algèbres \mathfrak{a}_+ et \mathfrak{a}_- d'une structure de bigèbre de Lie en définissant les cocrochets $\delta_-^* : \mathfrak{a}_- \rightarrow \wedge^2 \mathfrak{a}_-$ et $\delta_+^* : \mathfrak{a}_+ \rightarrow \wedge^2 \mathfrak{a}_+$ sur les générateurs par

$$\begin{aligned} \delta_-^* H^- &= 0, \delta_-^* F = H^- \wedge F, \\ \delta_+^* H^+ &= 0, \delta_+^* E = -H^+ \wedge E. \end{aligned}$$

On vérifie que l'on a bien $\delta_-^* H^- = 0$, $\delta_-^* F = 0$, $\delta_+^* H^+ = 0$ et $\delta_+^* E = 0$. En utilisant la proposition 2.3, on peut alors construire un accouplement entre les algèbres \mathfrak{a}_+ et \mathfrak{a}_- au moyen de la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur les générateurs de \mathfrak{a}_+ et \mathfrak{a}_- par

$$\langle H^+, H^- \rangle = 2, \quad \langle H^+, F \rangle = 0, \quad \langle E, H^- \rangle = 0, \quad \langle E, F \rangle = \frac{1}{2}.$$

Nous voulons maintenant étudier l'orthogonal de \mathfrak{a}_+ (respectivement de \mathfrak{a}_-).

Proposition 3.1. *L'idéal engendré par $[H^+, E] - 2E$ (respectivement par $[H^-, F] + 2F$) est orthogonal à \mathfrak{a}_- (respectivement à \mathfrak{a}_+) et c'est un coïdéal.*

Démonstration. Pour prouver le résultat pour $[H^+, E] - 2E$, il suffit de montrer que $[H^+, E] - 2E$ vérifie bien les hypothèses de la proposition 2.5. On a d'abord :

$$\begin{aligned} \langle [H^+, E] - 2E, H^- \rangle &= \langle [H^+, E], H^- \rangle - 2 \langle E, H^- \rangle \\ &= \langle H^+ \wedge E, \delta_-^* H^- \rangle = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle [H^+, E] - 2E, F \rangle &= \langle [H^+, E], F \rangle - 2 \langle E, F \rangle \\ &= \langle H^+ \wedge E, \delta_-^* F \rangle - 1 \\ &= \langle H^+ \wedge E, H^- \wedge F \rangle - 1 = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Enfin on a :

$$\begin{aligned} \delta_+^*([H^+, E] - 2E) &= [H^+, \delta_+^* E] + [\delta_+^* H^+, E] - 2\delta_+^* E \\ &= [H^+, -H^+ \wedge E] + 2H^+ \wedge E \\ &= [H^+, E] \wedge H^+ - 2E \wedge H^+ \\ &= ([H^+, E] - 2E) \wedge H^+. \end{aligned}$$

L'élément $[H^+, E] - 2E$ vérifie donc bien les hypothèses de la proposition 2.5. On procède de même pour $[H^-, F] + 2F$. \square

La proposition 2.5 nous permet de faire le quotient de \mathfrak{a}_+ (respectivement \mathfrak{a}_-) par l'idéal engendré par $[H^+, E] - 2E$ (respectivement $[H^-, F] + 2F$). La forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ passe au quotient et l'on obtient encore des bigèbres accouplées : \mathfrak{b}_+ et \mathfrak{b}_- . Le théorème 1.5 nous assure que l'on peut construire une structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_+ \oplus \mathfrak{b}_-$ telle que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ soit ad-invariante. Les relations de commutation entre \mathfrak{b}_+ et \mathfrak{b}_- ($\mathfrak{b}_+ = kH^+ \oplus kE$ et $\mathfrak{b}_- = kH^- \oplus kF$) sont alors données par :

$$[E, F] = \frac{(H^+ + H^-)}{2}, \quad [H^+, H^-] = 0, \quad [E, H^-] = -2E \text{ et } [H^+, F] = -2F.$$

On retrouve alors $\mathfrak{sl}_2(k)$ en quotientant \mathfrak{b} par son centre : $k(H^+ - H^-)$. Nous allons maintenant généraliser cette technique de construction au cas général où \mathfrak{g} est une algèbre de Kac-Moody symétrisable quelconque.

§ 4. Le cas général

Nous voulons construire l'algèbre de Kac-Moody associée à une matrice de Cartan indécomposable et symétrisable. Pour cela, nous allons copier la construction faite dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(k)$. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice de Cartan indécomposable et symétrisable. Dans toute la suite de cette partie, $(\mathfrak{h}, \Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\})$ désigne une réalisation A . Rappelons que \mathfrak{h} est muni d'une forme bilinéaire symétrique et non dégénérée (\cdot, \cdot) telle que $(h_i, \cdot) = \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i(\cdot)$. Nous noterons $h_i = \alpha_i^\vee$. On peut écrire A au moyen de la forme bilinéaire duale (\cdot, \cdot) définie sur \mathfrak{h}^* par

$$A = (\alpha_j(h_i))_{1 \leq i, j \leq n} = \left(2 \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Définissons \mathfrak{a}_+ (respectivement \mathfrak{a}_-) comme étant l'algèbre de Lie libre engendrée par les éléments $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $h^+ \in \mathfrak{h}$ (respectivement les $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $h^- \in \mathfrak{h}$). Nous utiliserons toujours la notation h^+ lorsque l'élément h de \mathfrak{h} est vu dans \mathfrak{a}_+ et h^- quand il est dans \mathfrak{a}_- . Grâce à la proposition 2.2, on peut munir \mathfrak{a}_+ et \mathfrak{a}_- d'une structure de bigèbre de Lie en définissant les cocrochets δ_+^* et δ_-^* sur les éléments générateurs par

$$\begin{aligned} \delta_+^*(e_i) &= -(\alpha_i, \alpha_i) h_i^+ \wedge e_i & \text{et } \delta_+^*(h^+) &= 0, \\ \delta_-^*(f_i) &= (\alpha_i, \alpha_i) h_i^- \wedge f_i & \text{et } \delta_-^*(h^-) &= 0 \end{aligned}$$

pour tous $1 \leq i \leq n$, h dans \mathfrak{h} . On vérifie que l'on a bien

$$\delta_+^{*2} e_i = 0, \quad \delta_-^{*2} f_i = 0, \quad \delta_+^{*2} h^+ = 0, \quad \text{et } \delta_-^{*2} h^- = 0.$$

Grâce à la proposition 2.3, on peut construire un accouplement entre les bigèbres \mathfrak{a}_- et \mathfrak{a}_+ en définissant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur les générateurs de \mathfrak{a}_- et \mathfrak{a}_+ par

$$\begin{aligned} \langle e_i, f_j \rangle &= \frac{\delta_{i,j}}{2(\alpha_i, \alpha_i)}, & \langle h^+, h'^- \rangle &= \frac{1}{2}(h, h'), \\ \langle h^+, f_i \rangle &= 0, & \langle e_i, h^- \rangle &= 0. \end{aligned}$$

pour tous $1 \leq i, j \leq n$, h, h' dans \mathfrak{h} . Remarquons que, pour tous $1 \leq i, j \leq n$, on a :

$$\langle h_i^+, h_j^- \rangle = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)(\alpha_j, \alpha_j)}.$$

Etudions les espaces orthogonaux à \mathfrak{a}_+ et à \mathfrak{a}_- . En faisant le même travail que dans la partie précédente, on obtient

Proposition 4.1. *L'idéal engendré par les éléments $[h^+, h'^+]$, $h, h' \in \mathfrak{h}$, (respectivement par les h^-, h'^-), $h, h' \in \mathfrak{h}$) est orthogonal à \mathfrak{a}_- (respectivement \mathfrak{a}_+) et c'est un coïdéal.*

Démonstration. Pour prouver le premier résultat, il suffit de montrer que les éléments $[h^+, h'^+]$, $h, h' \in \mathfrak{h}$, vérifient les hypothèses de la proposition 2.5. D'une part, pour tous h, h', h'' dans \mathfrak{h} et $1 \leq i \leq n$, on a

$$\langle [h^+, h'^+], h''^- \rangle = \langle h^+ \wedge h'^+, \delta_-^* h''^- \rangle = 0$$

et

$$\begin{aligned} \langle [h^+, h'^+], f_i \rangle &= \langle h^+ \wedge h'^+, \delta_-^* f_i \rangle \\ &= \langle h^+ \wedge h'^+, (\alpha_i, \alpha_i) h_i^- \wedge f_i \rangle = 0. \end{aligned}$$

D'autre part, l'expression $\delta_+^*[h^+, h'^+]$ est nulle pour tous h, h' dans \mathfrak{h} , donc les éléments $[h^+, h'^+]$, $h, h' \in \mathfrak{h}$, vérifient bien les hypothèses de la proposition. Le résultat pour $[h^-, h'^-]$ se démontre de la même manière. \square

Proposition 4.2. *L'idéal engendré par les éléments $([h^+, e_i] - \alpha_i(h)e_i)$ et $([h^+, h'^+])$, $1 \leq i \leq n, h, h' \in \mathfrak{h}$, (respectivement $([h^-, f_i] + \alpha_i(h)f_i)$ et $([h^-, h'^-])$, $1 \leq i \leq n, h, h' \in \mathfrak{h}$) est orthogonal à \mathfrak{a}_- (respectivement à \mathfrak{a}_+) et c'est un coïdéal.*

Démonstration. Nous allons commencer par prouver le résultat pour les éléments suivants : $([h^+, e_i] - \alpha_i(h)e_i)$, $1 \leq i \leq n, h \in \mathfrak{h}$. Pour cela, il suffit de montrer que ces éléments vérifient bien les hypothèses à la proposition 2.5. D'une part, pour tous $1 \leq i, j \leq n$, et h, h' dans \mathfrak{h} , on a

$$\begin{aligned} \langle [h^+, e_i] - \alpha_i(h)e_i, h'^- \rangle &= \langle h^+ \wedge e_i, \delta_-^* h'^- \rangle - \alpha_i(h) \langle e_i, h'^- \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle [h^+, e_i] - \alpha_i(h)e_i, f_j \rangle &= \langle h^+ \wedge e_i, \delta_-^* f_j \rangle - \alpha_i(h) \langle e_i, f_j \rangle \\ &= \langle h^+ \wedge e_i, (\alpha_j, \alpha_j) h_j^- \wedge f_j \rangle - \alpha_i(h) \frac{\delta_{i,j}}{2(\alpha_i, \alpha_i)} \\ &= \frac{1}{2} (\alpha_j, \alpha_j) (h, h_j) \frac{\delta_{i,j}}{2(\alpha_i, \alpha_i)} - \alpha_i(h) \frac{\delta_{i,j}}{2(\alpha_i, \alpha_i)} \\ &= \frac{\delta_{i,j}}{2(\alpha_i, \alpha_i)} \left(\frac{1}{2} (\alpha_i, \alpha_i) (h, h_i) - \alpha_i(h) \right) = 0. \end{aligned}$$

D'autre part, pour tous $1 \leq i \leq n$ et h dans \mathfrak{h} :

$$\begin{aligned} \delta_+^*([h^+, e_i] - \alpha_i(h)e_i) &= [h^+, \delta_+^* e_i] - \alpha_i(h) (-(\alpha_i, \alpha_i) h_i^+ \wedge e_i) \\ &= [h^+, -(\alpha_i, \alpha_i) h_i^+ \wedge e_i] + \alpha_i(h) (\alpha_i, \alpha_i) h_i^+ \wedge e_i \\ &= (\alpha_i, \alpha_i) \{ ([h^+, e_i] - \alpha_i(h)e_i) \wedge h_i^+ - [h^+, h_i^+] \wedge e_i \}. \end{aligned}$$

Les éléments $[h^+, e_i] - \alpha_i(h)e_i$ vérifient bien les hypothèses du lemme. Le résultat se démontre de même pour les éléments $[h^-, f_i] + \alpha_i(h)f_i$. \square

Nous pouvons, grâce aux résultats de la proposition précédente, faire le quotient de \mathfrak{a}_+ (respectivement \mathfrak{a}_-) par l'idéal engendré par les éléments $([h^+, e_i] - \alpha_i(h)e_i)$ et $([h^+, h'^+])$, $1 \leq i \leq n, h, h' \in \mathfrak{h}$, (respectivement $([h^-, f_i] + \alpha_i(h)f_i)$ et $([h^-, h'^-])$, $1 \leq i \leq n, h, h' \in \mathfrak{h}$). Appelons \mathfrak{b}_+ et \mathfrak{b}_- les bigèbres obtenues après passage au quotient. On obtient encore un accouplement entre les bigèbres \mathfrak{b}_+ et \mathfrak{b}_- en faisant passer δ_+^*, δ_-^* et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ au quotient. Nous avons :

Proposition 4.3. *Soient $(e_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq n}$ et $(f_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq n}$ les éléments de \mathfrak{b}_+ et \mathfrak{b}_- respectivement définis par*

$$e_{ij} = (\text{ad } e_i)^{1-\alpha_j(h_i)} e_j \text{ et } f_{ij} = (\text{ad } f_i)^{1-\alpha_j(h_i)} f_j.$$

L'idéal engendré par les $(e_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq n}$ (et respectivement par les $(f_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq n}$) est orthogonal à \mathfrak{b}_- (respectivement \mathfrak{b}_+) et c'est un coïdéal.

Démonstration. Pour prouver le résultat pour les éléments $(e_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq n}$, montrons que les éléments $(e_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq n}$ vérifient les hypothèses de la proposition 2.5. D'une part, pour tous $1 \leq i \neq j, l \leq n$ et h dans \mathfrak{h} , on a

$$\langle e_{ij}, h^- \rangle = \langle e_i \wedge (\operatorname{ad} e_i)^{-\alpha_j(h_i)} e_j, \delta_-^* h^- \rangle = 0$$

et

$$\begin{aligned} \langle e_{ij}, f_l \rangle &= \langle e_i \wedge (\operatorname{ad} e_i)^{-\alpha_j(h_i)} e_j, \delta_-^* f_l \rangle \\ &= \langle e_i \wedge (\operatorname{ad} e_i)^{-\alpha_j(h_i)} e_j, (\alpha_l, \alpha_l) h_l^- \wedge f_l \rangle \\ &= -\frac{\delta_{i,l}}{2(\alpha_l, \alpha_l)} (\alpha_l, \alpha_l) \langle (\operatorname{ad} e_i)^{-\alpha_j(h_i)} e_j, h_l^- \rangle. \end{aligned}$$

Donc $\langle e_{ij}, f_l \rangle = 0$ pour tous $1 \leq i \neq j, l \leq n$. En effet, c'est évident si $\alpha_j(h_i) = 0$, et si $\alpha_j(h_i) < 0$, on a

$$\begin{aligned} \langle (\operatorname{ad} e_i)^{-\alpha_j(h_i)} e_j, h_l^- \rangle &= \langle [e_i, (\operatorname{ad} e_i)^{-\alpha_j(h_i)-1} e_j], h_l^- \rangle \\ &= \langle e_i \wedge (\operatorname{ad} e_i)^{-\alpha_j(h_i)-1} e_j, \delta_-^* h_l^- \rangle = 0. \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons le résultat suivant :

Lemme 4.4. *Avec les notations de la proposition précédente, on a*

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n, \delta_+^* e_{ij} = e_{ij} \wedge \{(1 - \alpha_j(h_i)) h_i^+ + (\alpha_j, \alpha_j) h_j^+\}.$$

Démonstration. Montrons par récurrence sur l que si $e_{l,ij} = (\operatorname{ad} e_i)^{1+l} e_j$, on a

$$\begin{aligned} \delta_+^* e_{l,ij} &= e_{l,ij} \wedge \{(\alpha_i, \alpha_i)(1+l) h_i^+ \\ &\quad + (\alpha_j, \alpha_j) h_j^+\} + 4e_i \wedge e_{l-1,ij} \{(\alpha_i, \alpha_i) l(1+l)/2 + (\alpha_j, \alpha_i)(l+1)\}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \delta_+^* e_{0,ij} &= \delta_+^* [e_i, e_j] = [\delta_+^* e_i, e_j] + [e_i, \delta_+^* e_j] \\ &= -(\alpha_i, \alpha_i) [h_i^+ \wedge e_i, e_j] - (\alpha_j, \alpha_j) [e_i, h_j^+ \wedge e_j] \\ &= -(\alpha_i, \alpha_i) \alpha_j(h_i) e_j \wedge e_i + (\alpha_i, \alpha_i) [e_i, e_j] \wedge h_i^+ \\ &\quad + (\alpha_j, \alpha_j) \alpha_i(h_j) e_i \wedge e_j + (\alpha_j, \alpha_j) [e_i, e_j] \wedge h_j^+ \\ &= 4(\alpha_i, \alpha_j) e_i \wedge e_j + [e_i, e_j] \wedge \{(\alpha_i, \alpha_i) h_i^+ + (\alpha_j, \alpha_j) h_j^+\}. \end{aligned}$$

C'est la relation au rang 0. Supposons le résultat établi au rang $l - 1$ avec $l \geq 1$; alors :

$$\begin{aligned}
\delta_+^* e_{l,ij} &= \delta_+^* [e_i, e_{l-1,ij}] = [\delta_+^* e_i, e_{l-1,ij}] + [e_i, \delta_+^* e_{l-1,ij}] \\
&= -(\alpha_i, \alpha_i) [h_i^+ \wedge e_i, e_{l-1,ij}] + [e_i, e_{l-1,ij} \wedge \{(\alpha_i, \alpha_i) l h_i^+ + (\alpha_j, \alpha_j) h_j^+\}] \\
&\quad + [e_i, 4e_i \wedge e_{l-2,ij} \{(\alpha_i, \alpha_i) l(l-1)/2 + (\alpha_j, \alpha_i) l\}] \\
&= -(\alpha_i, \alpha_i) (\alpha_j(h_i) + 2l) e_{l-1,ij} \wedge e_i + (\alpha_i, \alpha_i) e_{l,ij} \wedge h_i^+ \\
&\quad + e_{l,ij} \wedge \{(\alpha_i, \alpha_i) l h_i^+ + (\alpha_j, \alpha_j) h_j^+\} \\
&\quad + \{(\alpha_i, \alpha_i) 2l + (\alpha_j, \alpha_j) \alpha_i(h_j)\} e_i \wedge e_{l-1,ij} \\
&\quad - 4e_{l-1,ij} \{(\alpha_i, \alpha_i) l(l-1)/2 + (\alpha_j, \alpha_i) l\} \wedge e_i \\
&= 4e_i \wedge e_{l-1,ij} \{(\alpha_i, \alpha_i) l(l+1)/2 + (\alpha_j, \alpha_i) (l+1)\} \\
&\quad + e_{l,ij} \wedge \{(1+l) \alpha_i, \alpha_i\} h_i^+ + (\alpha_j, \alpha_j) h_j^+.
\end{aligned}$$

C'est le résultat au rang l .

L'expression $(\alpha_i, \alpha_i)(-\alpha_j(h_i))(1 - \alpha_j(h_i))/2 + (\alpha_j, \alpha_i)(1 - \alpha_j(h_i))$ est nulle car $\alpha_j(h_i) = 2 \frac{(\alpha_j, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$. Donc pour tous $1 \leq i, j \leq n$ tels que $i \neq j$,

$$\delta_+^* e_{ij} = e_{ij} \wedge \{(\alpha_i, \alpha_i)(1 - \alpha_j(h_i)) h_i^+ + (\alpha_j, \alpha_j) h_j^+\}. \quad \square$$

Le lemme prouve que les éléments $(e_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq n}$ vérifient bien les hypothèses de la proposition 2.5. Le résultat se démontre ensuite de la même façon pour les $(f_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq n}$. \square

Nous cherchons le noyau de la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ afin de construire l'algèbre de Kac-Moody associée à la matrice A comme un quotient de $\mathfrak{b}_+ \oplus \mathfrak{b}_-$ par ce noyau. Nous venons de voir que ce noyau contient les éléments $(e_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq n}$ et $(f_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq n}$. Nous allons maintenant prouver que l'idéal engendré par ces éléments est le noyau tout entier.

Faisons le quotient de \mathfrak{b}_+ (respectivement \mathfrak{b}_-) par l'idéal engendré par les $(e_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq n}$ (respectivement les $(f_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq n}$). On obtient encore un accouplement entre les bigèbres de Lie quotients \mathfrak{c}_+ et \mathfrak{c}_- en faisant passer δ_+^* , δ_-^* et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ au quotient. D'après le théorème 1.5, on peut munir $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_+ \oplus \mathfrak{c}_-$ d'une structure d'algèbre de Lie.

Proposition 4.5. *Sur l'algèbre de Lie \mathfrak{c} , pour tous $1 \leq i, j \leq n$ et h, h' dans \mathfrak{h} , on a*

$$\begin{aligned}
[h^+, h'^-] &= 0, & [e_i, f_j] &= \delta_{i,j} (h_i^+ + h_i^-)/2, \\
[h^+, f_i] &= -\alpha_j(h) f_i, & [h^-, e_i] &= \alpha_j(h) e_i.
\end{aligned}$$

Démonstration. Soient $1 \leq i, j \leq n$ et h et h' dans \mathfrak{h} ; puisque les expressions $\delta_+^* h^+$ et $\delta_-^* h'^-$ sont nulles, nous avons $[h^+, h'^-] = 0$.

Rappelons ensuite que $\delta_+^* e_i = -(\alpha_i, \alpha_i) h_i^+ \wedge e_i$ et $\delta_-^* f_j = (\alpha_j, \alpha_j) h_j^- \wedge f_j$. On a donc

$$\begin{aligned}
[e_i, f_j] &= -(\alpha_i, \alpha_i) \langle h_i^+, e_j \rangle e_i + (\alpha_i, \alpha_i) \langle e_i, f_j \rangle h_i^+ \\
&\quad - (\alpha_j, \alpha_j) \langle e_i, h_j^- \rangle f_j + (\alpha_j, \alpha_j) \langle e_i, f_j \rangle h_j^- \\
&= \delta_{i,j} (h - i^+ + h_i^-)/2.
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} [h^+, f_i] &= -(\alpha_i, \alpha_i) \langle h_i^-, h^+ \rangle f_i + (\alpha_i, \alpha_i) \langle f_i, h^+ \rangle h_i^- \\ &= -(\alpha_i, \alpha_i) \frac{1}{(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i(h) f_i = -\alpha_i(h) f_i. \end{aligned}$$

On démontre enfin que l'on a de même $[h^-, e_i] = \alpha_i(h) e_i$. \square

On va maintenant réordonner les éléments $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$, $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$, $(h^+)_{h \in \mathfrak{h}}$, $(h^-)_{h \in \mathfrak{h}}$ qui engendrent l'algèbre \mathfrak{c} . On peut alors écrire :

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_+ \oplus \mathfrak{c}_- = \mathfrak{c}_+^1 \oplus \mathfrak{c}_+^0 \oplus \mathfrak{c}_-^1 \oplus \mathfrak{c}_-^0,$$

où \mathfrak{c}_+^1 (respectivement \mathfrak{c}_-^1 , \mathfrak{c}_+^0 , \mathfrak{c}_-^0) est la sous-algèbre de \mathfrak{c}_+ (respectivement \mathfrak{c}_- , \mathfrak{c}_+ , \mathfrak{c}_-) engendrée par les $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ (respectivement $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$, $(h^+)_{h \in \mathfrak{h}}$, $(h^-)_{h \in \mathfrak{h}}$).

On remarque que pour tout h dans \mathfrak{h} , l'élément $h^+ - h^-$ est dans le centre de \mathfrak{c} et que l'on peut écrire : $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_+^1 \oplus \mathfrak{c}_-^1 \oplus \mathfrak{c}_1^0 \oplus \mathfrak{c}_2^0$ où \mathfrak{c}_1^0 (respectivement \mathfrak{c}_2^0) est la sous-algèbre de \mathfrak{c} engendrée par les $(h^+ + h^-)_{h \in \mathfrak{h}}$ (respectivement $(h^+ - h^-)_{h \in \mathfrak{h}}$). On passe alors au quotient par l'idéal engendré par les $(h^+ - h^-)_{1 \leq i \leq n}$ pour obtenir

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0$$

où \mathfrak{g} (respectivement \mathfrak{g}_+ , \mathfrak{g}_- , \mathfrak{g}_0) est l'image de \mathfrak{c} (respectivement de \mathfrak{c}_+^1 , \mathfrak{c}_-^1 , \mathfrak{c}_1^0). En faisant passer au quotient la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on munit \mathfrak{g} d'une forme ad-invariante. On note δ^* le nouveau cocrochet obtenu sur l'algèbre \mathfrak{g} . Posons $\tilde{h} = (h^+ + h^-)/2$ pour h dans \mathfrak{h} , et notons toujours e_i et f_i les images de e_i et f_i dans \mathfrak{g} . On a alors dans \mathfrak{g} , pour tous $1 \leq i, j \leq n$ et h, h' dans \mathfrak{h} :

$$\begin{aligned} [\tilde{h}, \tilde{h}'] &= 0, & [e_i, f_j] &= \delta_{i,j} \tilde{h}_i, \\ [\tilde{h}, e_i] &= \alpha_i(h) e_i, & [\tilde{h}, f_i] &= -\alpha_i(h) f_i, \\ (\text{ad } e_i)^{1-\alpha_j(h_i)} e_j &= 0, & (\text{ad } f_i)^{1-\alpha_j(h_i)} f_j &= 0, \end{aligned}$$

$$\delta^* e_i = -2(\alpha_i \alpha_i) \tilde{h}_i \wedge e_i, \quad \delta^* f_i = 2(\alpha_i \alpha_i) \tilde{h}_i \wedge f_i \quad \text{et} \quad \delta^* \tilde{h} = 0,$$

et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini par :

$$\begin{aligned} \langle e_i, e_j \rangle &= 0, & \langle \tilde{h}, \tilde{h}' \rangle &= \frac{1}{4} \langle h, h' \rangle, \\ \langle e_i, f_j \rangle &= \frac{\delta_{i,j}}{2(\alpha_i, \alpha_j)}, & \langle f_i, f_j \rangle &= 0, \\ \langle \tilde{h}, e_i \rangle &= 0, & \langle \tilde{h}, f_i \rangle &= 0. \end{aligned}$$

L'algèbre de Lie \mathfrak{g} contient une sous-algèbre commutative \mathfrak{g}_0 engendrée par les éléments \tilde{h} avec h dans \mathfrak{h} . Elle est engendrée, comme algèbre de Lie, par les éléments de \mathfrak{g}_0 et les $e_i, f_i, 1 \leq i \leq n$, qui vérifient les relations données plus haut. D'après la proposition 0.5, l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est un quotient de l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$ associée à A . Puisque la sous-algèbre commutative \mathfrak{g}_0 est contenue dans \mathfrak{g} , l'algèbre \mathfrak{g} est le quotient de $\mathfrak{g}(A)$ par un idéal rencontrant \mathfrak{h} trivialement qui ne peut donc être que l'idéal nul. On obtient ainsi le résultat souhaité :

Théorème 4.6. *Pour toute matrice de Cartan indécomposable et symétrisable A , l'algèbre de Lie \mathfrak{g} construite par dualité est l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$ associée à A .*

On peut remarquer que l'application bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, construite précédemment, est proportionnelle à la forme de Killing sur \mathfrak{g} . Cette construction est faite uniquement en définissant convenablement un accouplement entre deux algèbres de Lie. On quotiente ensuite successivement chacune d'elles par un coïdéal, orthogonal à l'autre. Les relations de commutation (notamment celles entre les éléments e_i et f_i) apparaissent *in fine*, et non plus *a priori* comme dans la construction par générateurs et relations.

REFERENCES

- [BD1] A.A. Belavin and V. Drinfeld, *Solutions of the classical Yang-Baxter equation for simple Lie algebras. (Russian)*, Funktsional. Anal. i Prilozhen **16** (1982), no.3,1–29, 96.
- [BD2] A.A. Belavin and V. Drinfeld, *The classical Yang-Baxter equation for simple Lie algebras*, Funktsional. Anal. i Prilozhen **17** (1983), no. 3, 69–70.
- [BD3] A.A. Belavin and V. Drinfeld, *Triangle equations and simple Lie algebras. Translated from the Russian*, Soviet Sci. Rev. Sect. C: Math. Phys. Rev. **4** (1984), 93–165.
- [Bou1] N. Bourbaki, *Eléments de mathématiques, Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 2 et 3*, Masson, Paris (1972), 290 pp..
- [Bou2] N. Bourbaki, *Eléments de mathématiques, Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 4, 5 et 6*, Masson, Paris (1981), 290 pp..
- [Bou3] N. Bourbaki, *Eléments de mathématiques, Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 7 et 8*, Masson, Paris (1975), 271 pp..
- [Dr1] V. Drinfeld, *Quantum groups*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Amer. Math. Soc., Providence, RI **1, 2** (1987), 798–820.
- [Dr2] V. Drinfeld, *Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of classical Yang-Baxter equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **268** (1983), no. 2, 285–287.
- [GKa] O. Gabber, V. Kac, *On defining relations of certain infinite-dimensional Lie algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **5** (1981), no. 2, 185–189.
- [Ho] G. Hochschild, *The structure of Lie groups*, Holden-Day, S. Francisco-London-Amsterdam (1965), ix+230 pp.
- [Ka] C. Kassel, *Quantum groups*, Graduate Texts in Mathematics, 155, Springer-Verlag, New York (1995), xii+531 pp..
- [Kac] V. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras. Third edition*, Cambridge University Press, Cambridge (1990), xxii+400 pp..
- [KRT] C. Kassel, M. Rosso, V. Turaev, *Quantum groups and knot invariants. Panoramas et Synthèses*, Société Mathématiques de France, Paris (1997), vi+115 pp..
- [Lu] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, Progress in Mathematics, **110**. (1993), xii+341 pp.
- [VD] A. Van Daele, *Dual pairs of Hopf *-algebras*, Bull. London Math. Soc., **25**. (1993), no. 3, 209–230.

GILLES HALBOUT

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE, UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR – C.N.R.S.
 7, RUE RENÉ DESCARTES — F-67084 STRASBOURG CEDEX — FRANCE
 E-MAIL: HALBOUT@MATH.U-STRASBG.FR