COMPARAISON DES DÉFORMATIONS SELON DE WILDE-LECOMTE ET FÉDOSOV

Gilles Halbout

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur – C.N.R.S.
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France

Abstract. Let M be a symplectic manifold over $\mathbb{R}$. In [DWL], M. De Wilde and P. Lecomte proved the existence of a star-product over M. Later, in [Fe1], B. Fedosov proposed another way to construct such star products. P. Deligne, in [De], compared those two constructions, considering the problem from the point of view of algebraic geometry. Our aim here is to show explicitely, using the recent work of M. De Wilde, how the constructions and the classifications of De Wilde-Lecomte and Fedosov are related.

§ 0. Introduction

Le but de ce travail est de comparer les constructions de star-produits sur une variété symplectique dues à De Wilde-Lecomte d'une part et à Fédosov d'autre part. Soit M une variété sur un corps $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Nous noterons $\mathbb{A}$ l'algèbre associative et commutative $C^\infty(M)[[\hbar]]$. Rappelons la définition d'un star-produit (ou déformation de $\mathbb{A}$) introduite dans [BFFLS] :

Définition 0.1. *Une* **déformation** *de $\mathbb{A}$ (ou star-produit) est une application $\star : \mathbb{A}\times\mathbb{A} \to \mathbb{A}$, $\mathbb{R}[[\hbar]]$-bilinéaire, associative et vérifiant, pour f et g dans $C^\infty(M)[[\hbar]]$:*

$$f \star g = fg + \hbar P_1(f,g) + \hbar^2 P_2(f,g) + \cdots$$

où les $P_i : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ sont des applications bilinéaires, bidifférentielles et nulles sur les applications constantes. Nous notons $\mathbb{A}_\star$ l'algèbre déformée.

Deux déformations $\star$ et $\star'$ sont **isomorphes** *(ou* **équivalentes***) s'il existe un isomorphisme $T = 1 + \hbar T_1 + \hbar^2 T_2 + \cdots$ (où les T_i sont des opérateurs différentiels) tel que :*

$$T(f \star g) = T(f) \star' T(g).$$

1991 *Mathematics Subject Classification:* Primary 58F05, (58F06,58H15)

Enfin, si $\mathbb{A}$ est munie d'une structure de Poisson $\{.,.\}$, on dit que $\star$ est une déformation de $(\mathbb{A}, \{.,.\})$ si c'est une déformation de $\mathbb{A}$ vérifiant : $\frac{1}{2}(P_1(f,g) - P_1(g,f)) = \{f,g\}$. *Par la suite, on supposera, sans perte de généralité que $P_1 = \{.,.\}$.*

Si (M,ω) une variété symplectique, la 2-forme non dégénérée ω définit un isomorphisme $i_\omega : T^*M \to TM$. Soit $\pi_\omega \in \wedge^2 TM$ l'image de ω par cet isomorphisme. On peut alors munir la variété M d'un crochet de Poisson $\{f,g\}_\omega :=< \pi_\omega, df \wedge dg >$ pour $f, g \in C^\infty(M)$. L'identité de Jacobi vérifiée par le crochet $\{.,.\}_\omega$ est une conséquence de $d\omega = 0$ et la structure de Poisson ainsi définie est régulière de rang maximum. Dans ce cas, on dit que $\star$ est une déformation de (M,ω) si c'est une déformation de $(\mathbb{A}, \{.,.\}_\omega)$.

Dans le cas particulier où $M = \mathbb{R}^{2n}$ et ω est la forme symplectique canonique de Darboux, nous avons le résultat (*cf.* [Ve] et [FLS]) :

Proposition 0.2. *Soit $M = \mathbb{R}^{2n}$ et ω une forme symplectique constante, alors :*
- *Il existe une déformation de (M,ω).*
- *Deux déformations de (M,ω) sont toujours équivalentes.*
- *Soit $\star$ un star-produit, les dérivations de $(\mathbb{A}_\star, \star)$ sont de la forme $\frac{1}{\hbar}[f,.]$ avec f dans $\mathbb{A}$.*
- *Le centre de l'algèbre $(\mathbb{A}_\star, \star)$ est $k[[\hbar]]$.*

En 1983, De Wilde et Lecomte ont prouvé l'existence d'une déformation d'une variété symplectique (*cf.* [DWL]) à la suite des travaux de Neroslavsky et Vlassov où l'on supposait le troisième groupe de cohomologie de de Rham nul (*cf.* [NV] et aussi [Ve]). De Wilde et Lecomte construisent par récurrence les coefficients intervenant dans le développement du star-produit en série de $\hbar$ et montrent que les classes d'équivalence des produits sont en bijection avec les séries formelles $H^2(M)[[\hbar]]$. Nous résumerons cette construction dans la première partie.

En 1994, Fédosov a donné une nouvelle construction. Dans la deuxième partie, nous formaliserons sa méthode. Après avoir choisi une connexion symplectique et sans torsion ∇_0, Fédosov construit une connexion ∇ sur le fibré de Weyl, noté $\mathbb{W}$, et il montre que chaque déformation de M est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathbb{W}$, $\mathbb{A}_\nabla = \{s \in \Gamma(M, \mathbb{W}),\ \nabla s = 0\}$, pour une certaine connexion ∇. Enfin, il prouve que deux déformations $\mathbb{A}_\nabla$ et $\mathbb{A}'_\nabla$ sont équivalentes si et seulement si les courbures de Weyl de ∇ et ∇' donnent la même classe dans $\frac{1}{\hbar}\omega + H^2(M)[[\hbar]]$. On retrouve ainsi une classification analogue à celle de De Wilde et Lecomte.

En nous inspirant des travaux récents de De Wilde (*cf.* [DW]), nous donnerons une méthode pour comparer explicitement les classifications données par De Wilde-Lecomte et Fédosov. Nous montrerons par quelle bijection dans $H^2(M)[[\hbar]]$, la classe de De Wilde-Lecomte s'envoie sur celle de Fédosov pour un star-produit donné.

Dans toute la suite de ce travail (M,ω) désigne une variété symplectique, $\{.,.\} = \{.,.\}_\omega$ le crochet de Poisson et π_ω le champ de tenseurs associés à la forme ω.

REMERCIEMENTS

Grâce à une bourse de l'Ecole Doctorale de Strasbourg, j'ai pu me rendre à Liège pour y étudier auprès de M. De Wilde et P. Lecomte leurs techniques de déformations. Ces derniers m'ont réservé un accueil exceptionnel et je les remercie pour leurs précieuses explications. Merci aussi à M. Rosso qui a porté une attention particulière à ce travail.

§ 1. Déformations selon De Wilde-Lecomte

Dans cette partie nous allons rappeler la construction des star-produits faite par De Wilde et Lecomte (*cf.* [DWL] et aussi [DWL2]). Leur méthode utilise des résultats de cohomologie de Hochschild et des propriétés du crochet de Gerstenhaber que nous allons rappeler.

Définition 1.1. *Soit A un espace vectoriel. Notons $C^d(A,A)$ l'espace des applications d-linéaires de A dans A, appelées encore d-cochaînes. Si D est dans $C^d(A,A)$, on note $|D| = d-1$. On définit des applications $\circ$ et $[.,.]_G : C^d(A,A) \times C^e(A,A) \to C^{d+e-1}(A,A)$ par*

$$(D \circ E)(a_1, \ldots, a_{d+e-1}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^{|E| \cdot i} D(a_1, \ldots, a_i, E(a_{i+1}, \ldots, a_{i+e}), \ldots)$$

$$[D, E]_G = D \circ E - (-1)^{|E||D|} E \circ D$$

Le crochet $[.,.]_G$ est appelé **crochet de Gerstenhaber**.

Remarquons que l'espace $(C^{\cdot}(A,A), [.,.]_G)$ est une algèbre de Lie graduée. De plus, si D est une application bilinéaire sur A, c'est-à-dire $D \in C^2(A,A)$, alors D est une loi associative si et seulement si $[D,D]_G = 0$. Dans ce cas, l'application $[D,.]_G$ est de carré nul. En particulier lorsque A est l'algèbre $(C^\infty(M), m)$, où m est la multiplication des fonctions, l'application $\delta : C^{\cdot}(A,A) \to C^{\cdot+1}(A,A)$, $C \mapsto [m, C]$ est une différentielle : c'est la **différentielle de Hochschild**.

Dans ce travail, nous considérerons toujours des cochaînes locales, c'est-à-dire des opérateurs multidifférentiels. Si f est une fonction de $C^\infty(M)$, nous notons H_f le champ de vecteurs hamiltonien associé à f et μ l'application $f \mapsto H_f$. Cette application permet de définir $\mu^* : \Omega^d(M) \to C^d(C^\infty(M), C^\infty(M))$, où l'image $\mu^*\lambda$ d'une d-forme λ est donnée par

$$\mu^*\lambda(f_1, \ldots, f_d) = < \lambda, H_{f_1} \wedge \ldots \wedge H_{f_d} > .$$

Si C est un élément de $C^d(C^\infty(M), C^\infty(M))$, nous noterons $\tau(C)$ son antisymétrisé. Le théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg dit que C est un cocycle pour la cohomologie de Hochschild si et seulement si

- il existe une forme λ dans $\Omega^d(M)$ telle que $\tau(C) = \mu^*\lambda$ et
- $C - \tau(C)$ est un cobord.

Retenons un dernier résultat : si η est une p-forme, avec $p \geq 2$, $[\mu^*\eta, \{.,.\}]_G$ est un cocycle de Hochschild et $\tau([\mu^*\eta, \{.,.\}]_G) = -\mu^* \, d\eta$. Il existe alors une cochaîne X_η telle que

$$[\mu^*\eta, \{.,.\}]_G + [X_\eta, m]_G = -\mu^* \, d\eta.$$

Si η est une 1-forme, on choisit $X_\eta = 0$ et si η est une 2-forme, on choisit X_η symétrique.

Pour construire un star-produit $m_\star = m + \hbar P_1 + \hbar^2 P_2 + \cdots + \hbar^l P_l + \cdots$ avec $P_1 = \{.,.\}$, nous devons trouver des cochaînes P_l dans $C^2(C^\infty(M), C^\infty(M))$ telles que $[m_\star, m_\star]_G = 0$. Pour De Wilde et Lecomte, la construction ainsi que la classification se fait par récurrence sur l. Pour cela, ils choisissent un recouvrement contractile $(U_\alpha)_{\alpha \in E}$ de M et définissent sur chaque U_α un champ de vecteurs conforme ξ_α ($L_{\xi_\alpha} P_1 = -P_1$). Nous avons alors

Théorème 1.2. *(cf. [DWL1]) Pour tout $l > 1$ dans $\mathbb{N}$, on peut construire :*
1) des cochaînes $P_2, \ldots, P_l$ dans $C^2(C^\infty(M), C^\infty(M))$ telles que le produit

$$m_\star^l = m + \hbar P_1 + \cdots + \hbar^l P_l$$

soit associatif à l'ordre l, c'est-à-dire vérifie

$$[m_\star^l, m_\star^l]_G = O(\hbar^{l+1}),$$

2) sur chaque U_α, des éléments $D_{\alpha,1}, \ldots, D_{\alpha,l-1}$ dans $C^1(C^\infty(U_\alpha), C^\infty(U_\alpha))$ tels que la cochaîne $D_\alpha^{l-1} = L_{\xi_\alpha} + \hbar\frac{\partial}{\partial\hbar} + \hbar D_{\alpha,1} + \cdots + \hbar^{l-1} D_{\alpha,l-1}$ soit une “dérivation” à d'ordre $l-1$, c'est-à-dire vérifie

$$[D_\alpha^{l-1}, m_\star^l]_G = O(\hbar^l),$$

3) sur chaque $U_\alpha \cap U_\beta$, des fonctions $f_{\alpha\beta,0}, \ldots, f_{\alpha\beta,l-2}$ dans $C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta)$ telles que la fonction $f_{\alpha\beta}^{l-2} = f_{\alpha\beta,0} + \cdots + \hbar^{l-2} f_{\alpha\beta,l-2}$ de $\mathbb{A}$ vérifie

$$D_\alpha^{l-1} - D_\beta^{l-1} = \frac{1}{\hbar}[f_{\alpha\beta}^{l-2}, m_\star^l]_G + O(\hbar^{l-1}).$$

Nous allons donner l'esquisse de la preuve de ce théorème. On se reportera à [DWL2] pour une démonstration plus complète.

Démonstration. Le résultat se démontre par récurrence sur l.

• Pour $l = 2$, la cochaîne P_2 peut s'écrire comme la somme de $\frac{1}{2}X_\omega$ et de n'importe quel cocycle de Hochschild car alors

$$[m_\star^2, m_\star^2]_G = [m, X_\omega]_G + [P_1, P_1]_G = -[P_1, P_1]_G + [P_1, P_1]_G = 0.$$

On peut poser ensuite $D_{\alpha,1} = 0$. On choisit enfin la fonction $f_{\alpha\beta,0}$ telle que

$$\xi_\alpha - \xi_\beta = H_{f_{\alpha\beta,0}}.$$

• Pour $l = 3$, écrivons P_2 sous la forme la plus générale :

$$P_2 = \frac{1}{2}X_\omega + \mu^*\eta + [C, m]_G,\ \eta \in \Omega^2(M),\ C \in C^1(C^\infty(M), C^\infty(M)).$$

Nous cherchons P_3 pour que $[m, P_3]_G + [P_1, P_2]_G = 0$. Il est clair que la cochaîne $[P_1, P_2]_G$ est un cocycle. Compte tenu des remarques précédentes, pour que ce soit un cobord, il faut et il suffit que sa partie antisymétrique soit nulle. Nous avons $\tau([P_1, P_2]_G) = \mu^*\, d\eta$ car nous avons choisi X_ω symétrique. En choisissant la forme η fermée, on peut alors construire P_3. Cette dernière modification n'a aucune incidence sur les termes $D_{\alpha,i}$ et $f_{\alpha\beta,i}$ déjà construits ($i = 0, 1$).

Construisons maintenant la cochaîne $D_{\alpha,2}$: nous voulons qu'elle vérifie $(L_{\xi_\alpha} + 2)P_2 + [D_{\alpha,2}, m]_G = 0$. La cochaîne $(L_{\xi_\alpha} + 2)P_2$ est un cocycle, pour être un cobord, il faut et il suffit qu'elle vérifie : $\tau((L_{\xi_\alpha} + 2)P_2) = L_{\xi_\alpha}\eta = 0$. Ceci n'est pas toujours vérifié : cette quantité vaut $d i_{\xi_\alpha}\eta$ dans le cas général. Cependant, si l'on suppose maintenant que $D_{\alpha,1} = \mu^* i_{\xi_\alpha}\eta$, on remarque que l'antisymétrisation de $(L_{\xi_\alpha} + 2)P_2 + [\mu^* i_{\xi_\alpha}\eta, P_1]_G$ est nulle. Ce changement, pour la cochaîne $D_{\alpha,1}$ est sans conséquence sur les fonctions $f_{\alpha\beta,0}$ déjà construites. On trouve alors $D_{\alpha,2}$ tel que

$$(L_{\xi_\alpha}+2)P_2+[\mu^* i_{\xi_\alpha}\eta, P_1]_G=-[D_{\alpha,2},m]_G.$$

Construisons enfin $f_{\alpha\beta,1}$. On vérifie que l'expression $D_{\alpha,1}-D_{\beta,1}-[f_{\alpha\beta,0},P_2]_G$ vaut $\mu^*(i_{H_{f_{\alpha\beta,0}}}\eta)-\tau([f_{\alpha\beta,0},\eta]_G)=0$. On peut donc choisir $f_{\alpha\beta,1}=0$.

• Supposons le résultat acquis au rang $l\geq 3$ et démontrons le au rang $l+1$. Nous appellerons respectivement J et K_α les expressions $[m^l_\star, m^l_\star]_G$ et $[D^{l-1}_\alpha, m^l_\star]_G$ et nous noterons J_i, $K_{\alpha,i}$ et plus généralement $(C)_i$ le coefficient en $\hbar^i$ d'une cochaîne C dans $C^{\cdot}(\mathbb{A},\mathbb{A})$. Les relations de Jacobi graduées montrent alors que :

$$[J_{l+1},m]_G=0, \qquad [J_{l+1},P]_G+[J_{l+2},m]_G=0,$$
$$[K_{\alpha,l},m]_G=0, \qquad [K_{\alpha,l},P]_G+[K_{\alpha,l+1},m]_G=\frac{1}{2}([D^{l-1}_\alpha,J]_G)_{l+1}.$$

Les égalités de gauche assurent l'existence de formes π_3 dans $\Omega^3(M)$ et $\pi_{\alpha,2}$ dans $\omega^2(U_\alpha)$ et de cochaînes locales C_2 dans $C^2(\mathbb{A},\mathbb{A})$ et $C_{\alpha,1}$ dans $C^1(\mathbb{A},\mathbb{A})$ telles que :

$$J_{l+1}=2\mu^*\pi_3-2[m,C_2]_G$$
$$K_{\alpha,l}=\mu^*\pi_{\alpha,2}-[C_{\alpha,1},m]_G.$$

On déduit des égalités de droites que $d\pi_3=0$, $(L_{\xi_\alpha}+l-2)\pi_3=d\pi_{\alpha,2}$ et $\pi_{\alpha,2}-\pi_{\beta,2}=i_{\xi_\alpha-\xi_\beta}\pi_3$. Nous pouvons construire :

$$\varpi_2=\frac{1}{l-2}(\pi_{\alpha,2}-i_{\xi_\alpha}\pi_3) \text{ et } \varpi_{\alpha,1}=\frac{1}{l-2}i_{\xi_\alpha}(\pi_{\alpha,2}).$$

Ces formes différentielles vérifient alors : $\pi_3=d\pi_2$, $\varpi_{\alpha,2}=(L_{\xi_\alpha}+l-2)\varpi_2-d\varpi_{\alpha,1}$ et $\varpi_{\alpha,1}-\varpi_{\beta,1}=i_{\xi_\alpha-\xi_\beta}\varpi_2$. Remplaçons P_l par $P_l+\mu^*\varpi_2$ et $D_{\alpha,l-1}$ par $D_{\alpha,l-1}+\mu^*\varpi_{\alpha,1}$. Ces transformations ne modifient pas les termes déjà construits. On peut enfin poser :

$$P_{l+1}=C_2+X_{\varpi_2},\ D_{\alpha,l}=C_{\alpha,1},\ f_{\alpha\beta,l-1}=0.$$

Les cochaînes P_{l+1}, $D_{\alpha,l}$ et $f_{\alpha\beta,l-1}$ satisfont les trois conditions du théorème. C'est le résultat au rang $l+1$. □

Remarque 1.3. *Le théorème 1.2 admet quelques raffinements :*
1) *Si les $(P_i)_{0\leq i\leq l}$ sont donnés a priori et vérifient la première condition du théorème 1.2, on peut construire des cochaînes $(D_{\alpha,i})_{0\leq i\leq l-1}$ et $(f_{\alpha\beta,i})_{0\leq i\leq l-2}$ vérifiant les deux autres conditions.*
2) *Si les $(P_i)_{0\leq i\leq l}$ et les $(D_{\alpha,i})_{0\leq i\leq l-1}$ sont donnés a priori et vérifient les deux premières conditions, on peut construire les fonctions $(f_{\alpha\beta,i})_{0\leq i\leq l-2}$ pour qu'elles vérifient la troisième.*
3) *Pour tous $(P_i)_{0\leq i\leq l}$ vérifiant la première condition, les fonctions $(f_{\alpha\beta,i})_{0\leq i\leq l-2}$ qui satisfont la troisième vérifient toujours*

$$f_{\alpha\beta,i}+f_{\beta\gamma,i}+f_{\gamma\alpha,i}=\text{cste},$$

et ceci quelle que soit la construction choisie.

Ces trois propriétés (*cf.* [DW] et [DWL2]) sont principalement les conséquences de la proposition 0.2.

Remarque 1.4. *Considérons un produit* $\sum_{i=0}^{l} P_i\hbar^i$ *associé aux cochaînes* $(D_{\alpha,i})_{0\leq i\leq l-1}$ *et* $(f_{\alpha\beta,i})_{0\leq i\leq l-2}$. *D'après le troisième point de la remarque 1.3, on peut construire une 2-forme fermée* $\sum_i \omega_i\hbar^i$ *dans* $\Omega^2(M)[[\hbar]]$ *telle que*

$$\omega_i/_{U_\alpha} = d\lambda_{\alpha,i} \text{ et } (\lambda_{\beta,i}-\lambda_{\alpha,i})/_{U_\alpha\cap U_\beta} = df_{\alpha\beta,i-1}.$$

On vérifie immédiatement que $\omega_1 = \omega$ *et* $\omega_2 = 0$.

Cette dernière remarque nous permet de définir la classe d'un star produit :

Définition 1.5. *Soit* $F = \sum F_i\hbar^i$ *la 2-forme fermée dans* $\Omega^2(M)[[\hbar]]$ *définie par*

$$F_i = \frac{1}{i-2}\omega_i \text{ pour } i > 2,\ F_1 = \omega \text{ et } \mu^*F_2 = \tau P_2.$$

La **classe du star-produit** $\star$ *est la classe de cette 2-forme dans* $H^2(M)[[\hbar]]$.

Proposition 1.6. *(cf.[DWL2])*
- *La classe de la 2-forme* F *dans* $H^2(M)[[\hbar]]$ *ne dépend pas des cochaînes* $(D_{\alpha,i})_{0\leq i\leq l-1}$ *et* $(f_{\alpha\beta,i})_{0\leq i\leq l-2}$ *associées au produit et ne dépend que de la classe d'équivalence du star produit considéré.*
- *Deux star-produits sont équivalents si et seulement si ils ont même classe.*
- *Pour tout* $[F] = \sum_i [F]_i\hbar^i$ *dans* $H^2(M)[[\hbar]]$, *il existe un star-produit* $\star$ *dont la classe est* $\hbar[\omega] + \hbar^2[F]$.

Nous avons démontré ce résultat pour $[F]_0$ dans la démonstration du cas $l = 3$ du théorème 1.2. Dans cette preuve nous avons ensuite construit un star-produit tel que $[F]_i = 0$ pour tout $i > 0$. Si l'on veut que $[\star]_l = [F]_l$, il faut, lors de la construction du terme P_{l+1}, remplacer la cochaîne P_l par $P_l + \mu^*F_l$ et $D_{\alpha,l-1}$ par $D_{\alpha,l-1} + \mu^*(L_{\xi_\alpha} + l - 2)F_{\alpha,l-1}$ (où $F_l = dF_{\alpha,l-1}$ sur U_α).

Ces remarques permettent de démontrer le théorème suivant (*cf.* [DW]) :

Théorème 1.7. *Si* (M,ω) *est une variété symplectique, les classes d'équivalence de star-produit sont en bijection avec les classes de cohomologie de de Rham :* $\hbar[\omega]+\hbar^2H^2(M)[[\hbar]]$.

Remarque 1.8. *La démonstration du théorème 1.2 repose essentiellement sur la construction des formes* ϖ_2 *et* $\varpi_{\alpha,1}$. *Cette construction est une conséquence immédiate de l'existence d'une cohomologie triviale liée à la cohomologie de de Rham ([DW]) : Soit* $(U_\alpha)_{\alpha\in E}$ *un recouvrement ouvert de* M *; pour tout* α *choisissons un champ de vecteurs* ξ_α *sur* U_α *et définissons l'espace :*

$$\mathcal{E}_p = \{(\pi,(\pi_\alpha)) \in \Omega^p(M) \times \prod_\alpha \Omega^{p-1}(U_\alpha),\ \text{tels que } \pi_\alpha - \pi_\beta = i_{(\xi_\alpha-\xi_\beta)}\pi \text{ pour } U_\alpha\cap U_\beta \neq \emptyset\},$$

ainsi que la différentielle $\mathrm{d}_m : \mathcal{E}_p \to \mathcal{E}_{p+1},\ (\pi,\pi_\alpha) \mapsto (d\pi, (L_{\xi_\alpha}+m)\pi - d\pi_\alpha)$. *Il est clair que* $\mathrm{d}_m^2 = 0$ *et que si* m *est non nul, la cohomologie de* $(\mathcal{E}.,\mathrm{d}_m)$ *est triviale.*

Nous allons maintenant étudier la construction de Fédosov (*cf.* [Fe1] et [Fe2]).

§ 2. Déformations selon Fédosov

La construction d'un star-produit se simplifie considérablement si l'on se restreint à un voisinage assez petit d'un point de la variété. En effet, le théorème de Darboux nous dit que, localement, une telle variété est isomorphe à la variété symplectique plate canonique $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ où ω est la 2-forme $\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dx_{i+n}$. Dans ce cas le crochet de Poisson associé s'écrit, pour f et g dans $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_{i+n}} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_{i+n}}).$$

Ainsi, nous voyons que localement, dans une bonne base de coordonnées locales, les coefficients du crochet $\{.,.\}$ sont constants.

Soit V un espace vectoriel de dimension $2n$; soit $(.,.)$ une forme bilinéaire antisymétrique sur V^*. Elle permet de définir un crochet de Poisson $\{.,.\} : C^\infty(V) \times C^\infty(V) \to C^\infty(V)$, $f \times g \mapsto \{f, g\} = (df, dg)$. Soit $\Delta^* : C^\infty(V \times V) \to C^\infty(V)$ la restriction diagonale ; on définit l'application $\Pi : C^\infty(V \times V) \to C^\infty(V \times V)$ par

$$\Pi f(x, y) = \sum_{i,j=1}^{2n} (x_i, y_j) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} f(x, y).$$

L'application Π vérifie $\{f, g\} = \Delta^* \Pi(f \times g)$ pour tous f et g dans $C^\infty(V)$. On obtient :

Définition 2.1. *En conservant les notations précédentes, on peut définir le* **produit de Moyal** $\star$ *:* $C^\infty(V) \times C^\infty(V) \to C^\infty(V)[[\hbar]]$ *par :*

$$f \star g = \Delta^* \exp\left(\frac{\hbar}{2}\Pi\right)(f \times g).$$

Ce produit s'écrit, de manière explicite : $f \star g = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(f, g)\hbar^i$ *avec :*

$$P_j(a, b)(x) = \frac{1}{j!}\left(\frac{1}{2}\sum_{r \neq s} \pi_{r,s} \frac{\partial}{\partial y_r} \frac{\partial}{\partial z_s}\right)^j (a(y)b(z))_{/y=z=x}.$$

Proposition 2.2. *Le produit de Moyal est une déformation sur* $(V, \{.,.\})$.

Si M est une variété symplectique, il existe donc toujours une déformation locale. Le problème est alors de recoller ces déformations pour obtenir un star-produit global. Dans le cas où la variété est plate, on se ramène au cas $M = \mathbb{R}^{2n}$ au moyen d'une connexion de courbure nulle. Avant d'étudier le cas général, donnons quelques définitions :

Définition 2.3. *Soit* π_ω *le 2-champ de tenseurs associé à* ω. *Soit* m *dans* M *; définissons l'* **algèbre de Weyl** W_m *comme étant l'algèbre symétrique, engendrée par* $\hbar$ *et les éléments de* T_m^*M, *et munie du produit de Moyal. Sur tout ouvert de Darboux* U_α *où la forme* ω *est constante,* W *est de manière évidente un fibré au dessus de* U_α. *On définit alors le* **fibré de Weyl** $\mathbb{W}$ *sur* M *: une section (globale)* S *est donnée par la famille* (S_α) *de sections locales*

$$\{S_\alpha \in C^\infty(U_\alpha, W) \text{ telles que } S_\alpha = g_{\alpha\beta}^T S_\beta\}$$

où les $g^T_{\alpha\beta}\ :\ U_\alpha \cap U_\beta \to Sp(2n)$ *sont les fonctions de transition de* TM. *On peut définir de même* $\Omega^k(M,\mathbb{W})$, *le* **fibré des k-formes à valeurs dans $\mathbb{W}$**.

Nous pouvons munir $\mathbb{W}$ *d'une graduation en posant* $\deg \hbar = 2$ *et* $\deg v^* = 1$ *si* v^* *est dans* T^*M *; nous écrivons alors* $\mathbb{W} = \prod_{i\geq 0} \mathbb{W}_i$.

L'idée de Fédosov est d'utiliser ce fibré de Weyl pour construire une déformation sur la variété M. Le fibré $\mathbb{W}$ est muni d'un star-produit, fibre à fibre que nous noterons $\star$. Fédosov construit une injection $\phi : M \to \mathbb{W}$, dont l'image dans $\mathbb{W}$ est stable par $\star$. On pourra alors définir $\star : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ par

$$f \star g = \phi^{-1}(\phi(f)\star\phi(g)).$$

Pour construire l'application ϕ, Fédosov utilise une connexion plate généralisée. Soit ∇_0 une connexion symplectique (c'est-à-dire vérifiant $\nabla_0\omega = 0$) et sans torsion.

Définition 2.4.
Une **connexion de Fédosov** *est un opérateur* $\nabla\ :\ \Omega^0(M,\mathbb{W}) \xrightarrow{\nabla} \Omega^1(M,\mathbb{W})$ *tel que*
1) $\nabla(a\star b) = \nabla(a)\star b + a \star \nabla(b)$,
2) $\nabla = \nabla_0 + N_{-1} + N_0 + N_1 + \cdots$ *où* ∇_0 *est étendu à* $\mathbb{W}$ *et* N_i *est dans* $\Omega^1(M,\mathbb{W}_i)$ *et agit par action adjointe. On impose de plus que*

$$N_{-1}\ (\in \Omega^1(M, \frac{1}{\hbar}T^*M) \simeq \Omega^1(M, \frac{1}{\hbar}TM) \simeq \frac{1}{\hbar}T^*M \otimes TM)$$

soit la forme canonique correspondant à $-\frac{1}{\hbar}\,\mathrm{Id}$ *dans* $T^*M \otimes TM$,
3) $\nabla \circ \nabla = 0$.

Puisque $\nabla\circ\nabla = 0$, le produit $\nabla\cdot\nabla$, dans $\Omega^{\cdot}(M,\mathbb{W})$, est une 2-forme et il est facile de vérifier qu'elle est fermée. Cette 2-forme est appelée la courbure de Weyl de ∇. Nous allons résumer les principaux résultats de Fédosov sur l'existence et la classification des déformations des variétés symplectiques :

Théorème 2.5. *([Fe1],[Fe2])*
1) Pour chaque $\theta \in -\frac{1}{\hbar}\omega + \Omega^2(M)[[\hbar]]$ *tel que* $d\theta = 0$, *il existe une connexion de Fédosov* ∇ *telle que* $\nabla^2 = \theta$ *(produit dans* $\Omega^{\cdot}(M,\mathbb{W})$*),*
2) Pour toute connexion de Fédosov ∇, *l'ensemble* $\mathbb{A}_\nabla = \{s \in \Gamma(M,\mathbb{W}) | \nabla s = 0\}$ *est une sous-algèbre de* $\mathbb{W}$ *qui est isomorphe, par une application* ϕ, *à* $C^\infty(M)$. *Cette sous-algèbre est donc isomorphe à une déformation de* (M,ω) : $f\star g = \phi^{-1}(\phi(f)\star\phi(g))$.
3) Toute déformation est isomorphe à une sous-algèbre $\mathbb{A}_\nabla$ *pour une certaine connexion de Fédosov* ∇ *et deux déformations* $\mathbb{A}_\nabla$ *et* $\mathbb{A}_{\nabla'}$ *sont équivalentes si et seulement si les classes de* ∇^2 *et de* ${\nabla'}^2$ *sont les mêmes dans* $-\frac{1}{\hbar}[\omega] + H^2(M)[[\hbar]]$.

Dans toute la suite de ce travail, $(.)_p$ désigne la projection de $\Omega^{\cdot}(M,\mathbb{W})$ sur $\Omega^{\cdot}(M,\mathbb{W}_p)$. Avant de donner le schéma de la preuve de ce théorème, nous allons démontrer un résultat intermédiaire :

Proposition 2.6. *Soit* $(\Omega^p(M,\mathbb{W}_q),\delta_c)$ *le complexe de Koszul où* $\delta_c\ :\ \Omega^p(M,\mathbb{W}_q) \to \Omega^{p+1}(M,\mathbb{W}_{q-1})$ *est défini par*

$$\delta_c a = \sum_{l=1}^{2n} dX_l \wedge \frac{\partial a}{\partial X_l}$$

où $X_1,\ldots,X_{2n}$ est une base de $\mathbb{W}_1$. L'homologie de ce complexe est nulle pour $(p+q)\neq 0$.

Démonstration. Pour prouver le résultat, il suffit de vérifier que l'application

$$\delta_c^* \;:\; \Omega^p(M,\mathbb{W}_q)\to\Omega^{p-1}(M,\mathbb{W}_{q+1}),\;\; \delta_c^* a=\sum_{l=1}^{2n} X_l\cdot i_{dX_l}a$$

satisfait : $\delta_c\circ\delta_c^*+\delta_c^*\circ\delta_c=(p+q)\,\mathrm{Id}$ sur $\Omega^p(M,\mathbb{W}_q)$, ce qui est immédiat. □

Démonstration du Théorème 2.5. Pour prouver la première assertion, nous allons construire les termes N_i par récurrence. On peut écrire $N_{-1}=-\frac{1}{\hbar}\sum_{l,m} dX_l\omega_{lm}X_m$.

- Remarquons d'abord que $\delta_c=-[N_{-1},.]$ et que ${N_{-1}}^2=-\frac{1}{\hbar}\omega$. On vérifie ensuite que $[N_{-1},\nabla_0]=0$ et on peut donc poser $N_0=0$.
- Supposons les termes N_i, construits pour $i\leq p,\; p\geq 0$ et notons $\nabla_p=N_{-1}+\nabla_0+\cdots+N_p$. Nous cherchons N_{p+1} dans $\Omega^1(M,\mathbb{W}_{p+1})$ tel que $({\nabla_p}^2)_p=(\theta)_p$. Ceci s'écrit encore :
$$\delta_c(N_{p+1})=\nabla_0 N_p+\sum_{i+j=p}N_i\cdot N_j-(\theta)_p.$$
D'après la proposition 2.6, pour prouver l'existence de N_{p+1}, il suffit de montrer que
$$\delta_c(\nabla_0 N_p+\sum_{i+j=p}N_i\cdot N_j-(\theta)_p)=0.$$
Cette dernière expression vaut
$$\begin{aligned}\delta_c(\nabla_0 N_p+\sum_{i+j=p}N_i\cdot N_j) &= -\nabla_0\delta_c N_p+\sum_{i+j=p}[\delta_c N_i,N_j]\\ &= -\nabla_0(\nabla_0 N_{p-1}+\sum_{i+j=p-1}N_i\cdot N_j)\\ &\quad+\sum_{\substack{i+j=p\\ i\neq 0}}[\nabla_0 N_{i-1}+\nabla_{i-1}\cdot\nabla_{i-1},N_j]\\ &= \sum_{\substack{i+j=p-1\\ i>0}}[\nabla_i\cdot\nabla_i,\nabla_j]=\frac{1}{2}([[\nabla_{p-1},\nabla_{p-1}]\nabla_{p-1}])_{p-1}=0.\end{aligned}$$
Ceci prouve la première partie du théorème.

Prouvons la deuxième assertion. Soit ∇ une connexion de Fédosov ; montrons que pour toute fonction f de $C^\infty(M)$, il existe un unique élément $a=\sum a_i$ dans $\mathbb{A}_\nabla$ avec a_i dans $\mathbb{W}_i$ tel que $a_0=f$. Pour cela, construisons les éléments a_i par récurrence sur i. Supposons les construits pour $i\leq p$ et notons a la somme $\sum_{i=0}^p a_i$. Le terme a_{p+1} doit vérifier

$$(E)\qquad \delta_c(a_{p+1})=(\nabla a)_p.$$

Pour prouver l'existence de a_{p+1}, il suffit, d'après la proposition 2.6, de démontrer que le terme $\delta_c((\nabla a)_p)$ est nul et l'on prendra alors $a_{p+1} = \frac{1}{1+p}\delta_c^*((\nabla a)_p)$. D'après l'hypothèse de récurrence et la définition de ∇, ce terme vaut :

$$\delta_c((\nabla a)_p) = ([\nabla\cdot\nabla, a])_{p-1} + ([\nabla, \nabla a])_{p-1} = 0.$$

Réciproquement, si $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ vérifie $\nabla a = 0$, les termes a_{p+1}, $p \geq 0$, sont solutions de (E). En composant cette équation par $\delta_c^* \circ \delta_c + \delta_c^*$ on obtient $(p+1)a_{p+1} = \delta_c^*((\nabla a)_p)$ et donc a_{p+1} est défini de manière unique.
Nous avons construit une application bijective $\phi_\nabla : C^\infty(M) \to \mathbb{A}_\nabla$, vérifiant $\phi_\nabla^{-1}(a) = (a)_0$ pour tout a dans $\mathbb{W}$, qui nous permet de définir un star produit sur $C^\infty(M)$:

$$(f, g) \mapsto f \star g := \phi_\nabla^{-1}(\phi_\nabla(f) \star \phi_\nabla(g)).$$

Pour prouver que toute déformation est isomorphe à une sous-algèbre $\mathbb{A}_\nabla$ pour une certaine connexion de Fédosov, nous allons introduire le fibré des jets $J(M)$ dont les sections sont $m \mapsto J_m(M)$ où $J_m(M)$ désigne l'ensemble des jets de fonctions en m. Localement, si $(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{2n})$ est une base de T^*M, un jet est une série de Taylor : $j_m = \sum a_{m,I}\hat{x}^I$ où $I = (a_1, \ldots, a_{2n})$ est un multi-indice et $\hat{x}^I = \prod(\hat{x}_i)^{a_i}$ est dans $\mathbb{W}(TM)$. On peut alors voir un jet comme une fonction : $\mathcal{D}_M \to C^\infty(M)$ où $\mathcal{D}_M$ est l'espace des opérateurs différentiels sur M. Ainsi, $\Gamma(M, J) = \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathcal{D}_M, C^\infty(M))$. On peut munir J d'une connexion canonique ∇^J telle que pour tout $s : \mathcal{D}_M \to C^\infty(M)$, et pour tout X dans $\mathrm{Vect}(M)$,

$$\nabla_X^J s \ : \mathcal{D}_M \to C^\infty(M), \ (\nabla_X^J s)(D) = L_X s(D) - s(X\cdot D).$$

Sur un ouvert U_α, si l'on dispose d'un système de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_{2n})$ associé à la base $(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{2n})$ de T^*M, on identifie $\Gamma(J(U_\alpha))$ avec $C^\infty(x_1, \ldots, x_{2n})[[\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{2n}]]$. Chaque fibre de J est isomorphe à $\mathbb{C}[[\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{2n}]]$ et les fonctions de transition sont

$$g_{\alpha,\beta}^J(x) \ : \bar{f}(x + \hat{x}) \mapsto \bar{f}(g_{\alpha,\beta}(x + \hat{x}) - g_{\alpha,\beta}(x))$$

où les $g_{\alpha,\beta}$ sont les fonctions de transitions de la variété M et $\bar{f}$ désigne le développement de Taylor de $f(x, \hat{x})$ en $\hat{x}$. Dans cette base, on vérifie que $\nabla^J = \sum_{i=1}^{2n} dx_i(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j})$. Ainsi, l'ensemble $\{s \in J \text{ tels que } \nabla^J s = 0\}$ est isomorphe à $C^\infty(M)$. De plus, le fibré J est isomorphe au fibré de Weyl et peut être muni d'une filtration donnée par J^l, ensemble des jets agissant sur des opérateurs différentiels d'ordre $\geq l$. Donnons-nous, maintenant, un star-produit $\star$ sur M. Celui-ci induit une déformation sur le fibré J. On peut construire un isomorphisme d'algèbres entre le fibré des jets et le fibré de Weyl car, dans les deux cas, le produit est définit sur les fibres qui sont des espaces vectoriels. En prenant l'image de la connexion ∇^J par cet isomorphisme, on obtient une connexion ∇ sur $\mathbb{W}$ telle que la déformation $\star$ de $C^\infty(M)$ soit isomorphe à la déformation $\mathbb{A}_\nabla$.

Le dernier résultat concernant les équivalences de star-produits se démontre par récurrence, en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés pour prouver les deux premiers. □

§ 3. Comparaison des deux classifications

Dans [De], Deligne compare les deux méthodes de déformation en utilisant le langage des gerbes et des liens. Il prouve que la classe d'équivalence des déformations correspondant à la classe de $-\frac{1}{\hbar}\omega$ dans la classification de Fédosov est la même que celle qui correspond à la classe de $\hbar\omega$ dans la classification de De Wilde-Lecomte. Dans cette partie, nous allons généraliser ce résultat.

Théorème 3.1. *Soit θ une 2-forme fermée dans $\Omega^2(M)[[\hbar]]$; la classe d'équivalence des déformations correspondant à la classe de $-\frac{1}{\hbar}\omega + \theta$ dans la classification de Fédosov est la même que celle qui correspond à la classe de $\hbar\omega + \hbar^2\theta$ dans la classification de De Wilde-Lecomte.*

Démonstration. Soit $\star$ un star-produit. D'après le théorème 2.5, il est équivalent à une déformation $\mathbb{A}_\nabla$ associée à une connexion de Fédosov ∇. La classe d'équivalence de cette déformation correspond, dans la classification de Fédosov, à la classe de ∇^2 dans $-\frac{1}{\hbar}[\omega] + H^2(H)[[\hbar]]$. Notons $\nabla^2 = \theta = -\frac{1}{\hbar}\omega + \sum_i \theta_i$. Dans la classification de De Wilde-Lecomte, la classe de cette déformation est associée à une classe de Rham dans $\hbar[\omega] + \hbar^2 H^2(M)[[\hbar]]$ que nous noterons $\hbar[\omega] + \sum \hbar^i [F_i]$. Pour prouver le théorème, nous allons montrer par récurrence sur i que :

$$\forall i \geq 0,\ [\theta_i] = [F_{i+2}].$$

Montrons d'abord ce résultat pour $i = 0$. Ecrivons $\theta_0 = \sum \theta_{0,ij}\, dX_i \wedge dX_j$. La 2-forme F_2 est définie par $\mu^* F_2 = \tau P_2$. Le terme P_2 correspondant à la déformation $\mathbb{A}_\nabla$ s'écrit

$$P_2(f,g) = \frac{1}{\hbar^2} \sum_{i+j=4} A_i(f) A_j(g)|_{\hbar=0}$$

où l'on pose $A(f) = \phi_\nabla(f)$ et $A_i(f) = (\phi_\nabla(f))_i$. Explicitons les termes $A_i(f)$: nous avons vu que $N_{-1} = -\sum \frac{1}{\hbar}\omega_{ij} X_j\, dX_i$ et $N_0 = 0$. Le terme N_1 doit vérifier $\delta(N_1) = \nabla_0^2 - \theta_0$. On choisit

$$N_1 = \sum \frac{1}{2}\theta_{0,ij}\, dX_j X_i + \sum \frac{1}{8\hbar} R_{ijlm} X_i X_j X_l\, dX_m$$

où R_{ijlm} est le tenseur courbure de la connexion symplectique ∇_0. Comme nous cherchons à calculer $\tau(P_2)$, nous pouvons ne considérer que les termes où interviennent des dérivées d'ordre 1 en f. Nous noterons ces termes $\dot{A}(f)$ et $\dot{A}_i(f)$ pour $(\dot{A}(f))_i$. On trouve alors

$$\begin{aligned}
\dot{A}_1(f) &= \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i, \\
\dot{A}_2(f) &= 0, \\
\dot{A}_3(f) &= -\frac{1}{24} \sum R_{ijlm} \pi_\omega^{ml} \frac{\partial f}{\partial x_l} X_i X_j X_l + \frac{1}{2} \sum \pi_\omega^{il} \frac{\partial f}{\partial x_l} \theta_{0,ij} X_j.
\end{aligned}$$

Donc $\tau P_2(f,g) = \frac{1}{2} \sum \pi_\omega^{il} \frac{\partial f}{\partial x_l} \theta_{0,ij} \pi_\omega^{jm} \frac{\partial g}{\partial x_m} = \mu^* \theta_0(f,g)$. Ceci prouve que $F_2 = \theta_0$.

Supposons $i > 0$, $[\theta_l] = [F_{l+2}]$ pour $l < i$ et $[\theta_i] = 0$. Par la méthode de Fédosov nous pouvons construire les termes $(N_l)_{l \leq 2i+1}$, puis $(A_l(f))_{l \leq 2i+3}$ et enfin les cochaînes $(P_l)_{l \leq i+2}$. Cette méthode nous permet de construire ensuite le terme P_{i+3} sans modifier la cochaîne P_{i+2}. Ceci montre, en reprenant les notations de la démonstration du théorème 1.2, que la classe de la forme ϖ_3 est nulle. En reprenant la démonstration de Deligne ([De] p. 686) qui se simplifie considérablement car la classe de ∇ est nulle, on vérifie que la forme $\varpi_{\alpha,2}$ est nulle dans $\Omega^2(U_\alpha)$ et donc $[F_{i+2}] = [\theta_i]$.

Supposons maintenant que la classe de la forme $\theta_i = \frac{1}{2} \sum \theta_{i,lm}\, dX_m\, dX_l$ n'est pas nulle. Par la méthode de Fédosov, nous obtenons une nouvelle expression de P_{i+2} qui diffère de celle obtenue quand $[\theta_i] = 0$ par une cochaîne que nous noterons P'_{i+2}. De la même manière, nous noterons N'_p (respectivement $A'_p(f)$) la différence entre le nouveau terme N_p (respectivement $A_p(f)$) et celui que l'on obtenait lorsque la classe $[\theta_i]$ était nulle. On a

$$\begin{array}{lcl} N'_p & = & 0 \qquad \text{(pour } p < 2i+1\text{)} \\ [N_{-1}, N'_{2i+1}] & = & \theta_i \\ [N_{-1}, N'_{2i+2}] & = & -[N_0, N'_{2i+1}] - \nabla_0 N'_{2i+1} \\ A'_p(f) & = & 0 \qquad \text{(pour } p < 2i+3\text{)} \\ [N_{-1}, , A'_{2i+3}(f)] & = & -[E'_{2i+1}, A_1(f)] \\ P_{i+2}(f,g)' & = & A'_{2i+3}(f)A_1(g) + A_1(f)A'_{2i+3}(g) \end{array}$$

puis on trouve

$$\begin{array}{lcl} N'_{2i+1} & = & \frac{1}{2}\sum \theta_{i,lm}\, d\,X_m X_l \\ A'_{2i+3}(f) & = & \frac{1}{2}\sum \theta_{i,lm} \frac{\partial f}{\partial x_p} \pi_\omega^{lp} X_m \\ P'_{i+2}(f,g) & = & \frac{1}{2}\sum \theta_{i,lm} \frac{\partial f}{\partial x_p} \pi_\omega^{lp} \frac{\partial g}{\partial x_j} \pi_\omega^{mj} = \mu^*\theta_i(f,g). \end{array}$$

Dans la classification de Lecomte-Dewilde, si l'on remplace la cochaîne P_{i+2} par $P_{i+2}+\mu^*\theta_i$, la classe du nouveau star-produit diffère de l'ancienne par $\hbar^{i+2}\theta_i$ (*cf.* propriété 1.6). Ceci montre que l'on a bien $[F_{i+2}] = [\theta_i]$ et termine la preuve du théorème. □

References

[BFFLS] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, *Deformation theory and quantization, I and II*, Ann. Phys. **111** (1977), 61-151.

[BNT] P. Bressler, R. Nest, B. Tsygan, *A Riemann-Roch type formula for the microlocal Euler class*, Internat. Math. Res. Notices **20** (1997), 1033-1044.

[De] P. Deligne, *Déformations de l'algèbre des fonctions d'une variété symplectique: comparaison entre Fédosov et De Wilde, Lecomte. (French) [Deformations of the algebra of functions of a symplectic manifold: comparison of the Fedosov and De Wilde-Lecomte methods]*, Selecta Math. (N.S.) **1** (1995), no. 4, 667–697.

[DW] M. De Wilde, *Deformation of the algebra of function of a symplectic manifold : a simple cohomological approach*, Prépublications de l'Institut de Mathématique l'Université de Liège **5** (96).

[DWL1] M. De Wilde, P. Lecomte, *Existence of star-product and of formal deformation of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifold*, Lett. Math. Phys. **7** (1983), no.6, 487–496.

[DWL2] M. De Wilde, P. Lecomte, *Existence et classification des star-produit*, Notes du cours donné dans le cadre de l'Ecole d'Eté "Quantification - Quantification par déformation" organisé à Nice du 25 juin au 12 juillet 1996 par le CIMPA.

[Fe1] B.V. Fedosov, *A simple geometrical construction of deformation quantization*, J. Differential Geom. **40** (1994), no.2, 213–238.

[Fe2] B.V. Fedosov, *The index theorem in the algebra of quantum observables*, Soviet Phys. Dokl. **34** (1989), no.4, 319–321.

[FLS1] M. Flato, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, *Crochet de Moyal-Vey et quantification*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **283** (1976), no. 1, Aii, A19–A24.

[Ko] M. Kontsevich, *Formality conjecture. Deformation theory and symplectic geometry*, Math. Phys. Stud. **20** (Ascona, 1996), 139–156.

[NV] O.M. Neroslavsky, A.T. Vlassov, *Sur les déformations de l'algèbre des fonctions d'une variété symplectique*, C. R. Acad. Sc. Paris **292-1** (1981), 71-73.

[Ve] J. Vey, *Déformation du crochet de Poisson d'une variété symplectique*, Comm. Math. Helv. **50** (1975), 421-454.

Gilles Halbout
Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur – C.N.R.S.
7, rue René Descartes — F–67084 STRASBOURG Cedex — FRANCE
e-mail: halbout@math.u-strasbg.fr