CALCUL D'UN INVARIANT DE STAR-PRODUIT FERMÉ SUR UNE VARIÉTÉ SYMPLECTIQUE

Gilles Halbout

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur – C.N.R.S.
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France

Abstract. Let M be a symplectic manifold over $\mathbb{R}$. In [CFS] the authors construct an invariant φ in the cyclic cohomology of M for any closed star-product. They compute this invariant in the de Rham complexe of M when $M = T^*V$. We generalize this result by computing the image of φ in the de Rham complex for any symplectic manifold and any star-product and we show how this invariant is related to the general classification of Kontsevich. The proof uses the Riemann-Roch theorem for periodic cyclic chains of Nest-Tsygan.

§ 0. Introduction

Soit (M,ω) une variété symplectique de dimension $2n$; la variété M est canoniquement munie d'une structure de Poisson $\{.,.\}_\omega$. De Wilde et Lecomte, puis Fedosov ont construit des star-produits sur M. Fedosov a en outre donné une manière de classifier tous les star-produits sur M. De leur côté, Connes, Flato et Sternheimer ont proposé une autre manière de classifier ces star-produits. Dans ce travail, nous comparons les deux méthodes et montrons comment elles s'inscrivent dans la théorie générale de Kontsevich : ce dernier démontre l'existence de star-produits sur n'importe quelle variété de Poisson et donne une méthode générale de classification.

Dans [CFS], Connes, Flato et Sternheimer construisent un invariant pour les star-produits fermés sur une variété symplectique. Soit $\star$ un star-produit fermé et σ l'application $C^\infty(M)\times C^\infty(M) \to C^\infty(M)[[\hbar]]$, $\sigma(f,g) = f\star g - fg$; on définit alors des applications φ_{2k}, $k \geq 0$, par $\varphi_{2k}(f_0,f_1,\dots,f_{2k}) = \int_M [f_0 \star \sigma(f_1,f_2) \star \cdots \star \sigma(f_{2k-1},f_{2k})]_n \frac{\omega^n}{n!}$ où $[f]_n$ désigne le coefficient de $\hbar^n$ dans le développement $\hbar$-adique de f. La cochaîne $\varphi = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\varphi_{2k}$ est en fait un cocycle dans le complexe cyclique qui ne dépend que de la classe du star-produit considéré. Nous rappellerons les propriétés de ces applications dans la deuxième partie.

Notre but est d'étudier comment cet invariant est relié à la classification des star-produits donnée dans [Fe], qui apparaît comme un cas particulier de celle donnée par Kontsevich.

1991 *Mathematics Subject Classification:* Primary 19D55, (17B65,19K56,58G12,58F05)

Dans un premier temps nous montrerons que nous pouvons toujours nous ramener à un star produit “à la Fedosov” : Fedosov démontre que, sur une variété symplectique, les star-produits sont tous construits à partir de certaines connexions ∇ sur un fibré en algèbres de Weyl. De plus, deux déformations correspondant à des connexions ∇ et ∇' sont équivalentes si et seulement si $\nabla \sim \nabla'$ (équivalence de jauge que nous définirons dans la partie suivante) ou encore si les courbures de Weyl de ces connexions sont égales dans $H^2(M)[[\hbar]]$. Nous énoncerons précisément ces résultats dans la première partie.

Ensuite, pour calculer φ, nous verrons dans la quatrième partie qu'il est plus simple de passer par le complexe cyclique périodique de l'algèbre déformée : $CC^{per}_\cdot(A_\nabla)$. Nous utilisons pour cela une application $J(e^\sigma)\ : CC^{per}_\cdot(A) \to CC^{per}_\cdot(A_\nabla)$.

Nous pourrons alors utiliser un théorème de l'indice sur une variété symplectique (*cf.* [Fe2], [NT1] et [NT2]) : Soit $\mathbb{A}_\nabla$ une déformation de $C^\infty(M)$ correspondant à une connexion ∇. Nous savons ([Fe2,NT2]) qu'il existe une trace canonique $\mathrm{Tr}_{\mathrm{can}} : \mathbb{A}_\nabla \to \mathbb{C}[\hbar^{-1},\hbar]]$, unique à multiplication par un élément de $\mathbb{C}[\hbar^{-1},\hbar]]$ près. Soient P et Q deux idempotents de l'algèbre de matrices $M_N(\mathbb{A}_\nabla)$ tels que $P-Q$ est à support compact. On a alors

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{can}}(P-Q) = \int_M (\mathrm{ch}(P_0) - \mathrm{ch}(Q_0))\hat{A}(TM)e^{-\theta},$$

où $P_0 = P \bmod \hbar$, $\mathrm{ch}\, P_0$ est le caractère de Chern de la connexion $d P_0\, d$ dans le fibré vectoriel $P_0\mathbb{C}^N$ et θ est la courbure de Weyl de ∇. Nous donnerons le schéma de la preuve de ce résultat dans la troisième partie.

Par analogie avec le travail fait dans [CFS], nous montrerons enfin que l'image de φ dans le complexe de de Rham est $\frac{\int e^{\frac{\omega}{\hbar}}}{\int \hat{A}(TM)e^{-\theta}}\hat{A}(TM)e^{-\theta}$ (on retrouve bien le cas particulier $M = T^*V$ où φ donnait $\mathrm{Todd}(M)$). Le terme $e^{-\theta}$ nous confirme que φ est un “bon” invariant (qui ne tient compte que de la courbure de Weyl de la connexion à partir de laquelle est construite la déformation) qui classifie les star-produits (fermés) sur une variété symplectique.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier P. Cartier qui m'a soumis ce problème. J'ai bénéficié, pour le résoudre de l'aide de B. Tsygan : à la suite du cours qu'il a donné à Strasbourg, il n'a pas ménagé son temps pour répondre à toutes mes questions. J'ai eu également des discussions très utiles avec E. Leichtnam. Je voudrais enfin remercier M. Rosso pour ses précieux conseils et ses remarques judicieuses.

§ 1. Rappels et notations

Dans toute la suite de ce travail M désigne une variété lisse sur $\mathbb{R}$ de dimension $2n$.

Définition 1.1. *Un star-produit (aussi appelée déformation de $C^\infty(M)$) est une application $\star : C^\infty(M)[[\hbar]] \times C^\infty(M)[[\hbar]] \to C^\infty(M)[[\hbar]]$, $\mathbb{R}[[\hbar]]$-bilinéaire, associative et vérifiant, pour f et g dans $C^\infty(M)[[\hbar]]$:*

$$f \star g = fg + \hbar P_1(f,g) + \hbar^2 P_2(f,g) + \cdots$$

où les $P_i : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ *sont des applications bilinéaires, bidifférentielles et nulles sur les applications constantes.*

Deux déformations $\star$ *et* $\star'$ *sont isomorphes s'il existe un isomorphisme* $T = 1 + \hbar T_1 + \hbar^2 T_2 + \cdots$ *(les* T_i *étant des opérateurs différentiels) tel que :*

$$T(f \star g) = T(f) \star' T(g).$$

Nous pouvons ensuite définir l'application $\{.,.\}_\star : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ par $\{f,g\}_\star = \frac{1}{2}(P_1(f,g) - P_1(g,f))$. Cette application vérifie les propriétés suivantes :

- 1 - $\{f,g\}_\star = -\{g,f\}_\star$,
- 2 - $\{f_1,\{f_2,f_3\}\}_\star + \{f_2,\{f_3,f_1\}\}_\star + \{f_3,\{f_1,f_2\}\}_\star = 0$,
- 3 - $\{f_1, f_2 f_3\}_\star = \{f_1,f_2\}_\star f_3 + f_2\{f_1,f_3\}_\star$.

Ceci nous montre que l'application $\{.,.\}_\star$ est un crochet de Poisson, ou encore qu'il existe une section π dans $\Gamma(M, \wedge^2 TM)$, avec $[\pi,\pi]_S = 0$ telle que $\{f,g\}_\star = <\pi, df \wedge dg>$, où $[.,.]_S$ est le crochet de Schouten.

Définition 1.2. *Si* $(M, \{.,.\})$ *est une variété de Poisson on dit que* $\star$ *est une quantification de la structure de Poisson si* $\star$ *est une déformation de* $C^\infty(M)$ *vérifiant* $\{.,.\}_\star = \{.,.\}$.

Dorénavant, M sera une variété compacte symplectique, c'est-à-dire munie d'une 2-forme ω dans $\Omega^2(M)$, non dégénérée et fermée ($d\omega = 0$). Puisque la 2-forme est non dégénérée, elle définit un isomorphisme $s_\omega : T^*M \to TM$. Soit π_ω dans $\wedge^2 TM$ l'image de ω par cet isomorphisme. La propriété $d\omega = 0$ entraîne $[\pi_\omega, \pi_\omega]_S = 0$, donc M est une variété de Poisson : $\{f,g\}_\omega := <\pi_\omega, df \wedge dg>$ pour f,g dans $C^\infty(M)$. Nous allons maintenant rappeler les principaux résultats de Fedosov (*cf.* [Fe1]) que nous résumerons dans un formalisme adapté à notre travail. Soit ∇_0 une connexion symplectique (c'est-à-dire vérifiant $\nabla_0 \omega = 0$) et sans torsion.

Soit m dans M ; définissons l'algèbre de Weyl W_m comme étant l'algèbre symétrique engendrée par $\hbar$ et les éléments de $T^*_m M$, et munie du produit de Moyal-Weyl $\star$: soit $y_1, \ldots, y_{2n}$ une base de $T^*_m M$ et $\pi^{ij}_{\omega,m}$ l'écriture de $\pi_{\omega,m}$ dans cette base ; pour tous a et b dans W_m, on pose $a \star b = \sum_{k,i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_k} \frac{1}{k!}\left(\frac{\hbar}{2}\right)^k \pi^{i_1 j_1}_{\omega,m} \cdots \pi^{i_k j_k}_{\omega,m} \partial_{y_{i_1}} \cdots \partial_{y_{i_k}} a \partial_{y_{j_1}} \cdots \partial_{y_{j_k}} b$. Sur tout ouvert de Darboux U_α où la forme ω est constante, W est de manière évidente un fibré au dessus de U_α. On définit alors le fibré de Weyl $\mathbb{W}$ sur M : une section (globale) S est donnée par la famille (S_α) de sections locales

$$\{S_\alpha \in C^\infty(U_\alpha, W) \text{ telles que } S_\alpha = g^T_{\alpha\beta} S_\beta\}$$

où les $g^T_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to Sp(2n)$ sont les fonctions de transition de TM. On peut définir de même $\Omega^k(M, \mathbb{W})$, le fibré des k-formes à valeurs dans $\mathbb{W}$. On munit $\mathbb{W}$ d'une graduation en posant $\deg \hbar = 2$ et $\deg v^* = 1$ pour v^* dans T^*M ; nous écrivons alors $\mathbb{W} = \prod_{i \geq 0} \mathbb{W}_i$. L'espace des dérivations de $\mathbb{W}$ est isomorphe à $\frac{1}{\hbar}\mathbb{W}/\frac{1}{\hbar}\mathbb{C}[[h]]$. Nous noterons $\mathfrak{g} = \mathrm{Der}\mathbb{W}$ cet espace gradué (avec la graduation induite, $\mathfrak{g}_i$ désignant les éléments de $\mathfrak{g}$ de degré i) et aussi $\tilde{\mathfrak{g}} = \frac{1}{\hbar}\mathbb{W}$. Nous disposons alors d'une extension centrale :

$$0 \to \frac{1}{\hbar}\mathbb{C}[[h]] \to \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g} \to 0.$$

Définition 1.3.
Une **connexion de Fedosov** *est un opérateur* $\nabla : \Omega^0(M,\mathbb{W}) \xrightarrow{\nabla} \Omega^1(M,\mathbb{W})$ *tel que :*
1) $\nabla(s \star t) = \nabla(s) \star t + s \star \nabla(t)$.
2) $\nabla = \nabla_0 + N_{-1} + N_0 + N_1 + \cdots$ *où* ∇_0 *est étendu par fonctorialité à* $\mathbb{W}$ *et* N_i *est dans* $\Omega^1(M,\mathfrak{g}_i)$*. On impose de plus que* N_{-1} $(\in \Omega^1(M,\frac{1}{\hbar}T^*M) \simeq \Omega^1(M,\frac{1}{\hbar}TM) \simeq \frac{1}{\hbar}T^*M \otimes TM)$ *soit la forme canonique correspondant à* $-\frac{1}{\hbar}\,\mathrm{Id}$ *dans* $T^*M \otimes TM$.
3) $\nabla^2 = 0$.

Nous pouvons définir l'**équivalence de jauge** entre deux connexions ∇ et ∇' : $\nabla \sim \nabla'$ s'il existe X dans $\Gamma(M,\mathfrak{g}_{\geq 1})$ tel que $\nabla' = e^{\mathrm{ad}(X)}\nabla$. Soit $\tilde{\nabla}$ un relèvement d'une connexion de Fedosov ∇ pour l'extension centrale précédente. La classe de cohomologie de $\tilde{\nabla}^2$ dans $H^2(M)[[\hbar]]$ ne dépend pas du choix de $\tilde{\nabla}$. Cette classe s'appelle la **courbure de Weyl** de ∇. Enfin, que pour chaque connexion de Fedosov ∇, l'espace $\mathbb{A}_\nabla = \{s \in \Gamma(M,\mathbb{W}) | \nabla s = 0\}$ est un déformation de la variété symplectique M.

Nous pouvons maintenant résumer les principaux résultats de Fedosov sur la classification des déformations des variétés symplectiques :

Théorème 1.4.
1) Pour toute forme θ *dans* $-\frac{1}{\hbar}\omega + \Omega^2(M)[[\hbar]]$ *vérifiant* $d\theta = 0$*, il existe une connexion de Fedosov* ∇ *et un relèvement* $\tilde{\nabla}$ *tel que* $\tilde{\nabla}^2 = \theta$.
2) Deux connexions de Fedosov sont équivalentes si et seulement si leurs courbures de Weyl donnent la même classe dans $H^2(M)[[\hbar]]$.
3) Chaque déformation est isomorphe à une algèbre $\mathbb{A}_\nabla = \{s \in \Gamma(M,\mathbb{W}) | \nabla s = 0\}$ *pour une certaine connexion de Fedosov* ∇.
4) Deux déformations $\mathbb{A}_\nabla$ *et* $\mathbb{A}_{\nabla'}$ *sont équivalentes si et seulement si* $\nabla \sim \nabla'$.

Nous retrouvons ainsi un cas particulier du résultat de Kontsevich : les classes de déformations de (M,ω) sont en bijection avec $-\frac{1}{\hbar}\omega + H^2(M)[[\hbar]]$ ou, si l'on préfère, avec les classes d'équivalence de jauge des connexions.

§ 2. Le cocycle de Connes-Flato-Sternheimer

Dans cette partie nous reprenons les définitions de [CFS] que nous modifierons parfois légèrement pour la cohérence de notre travail. Pour plus de clarté, nous notons $\mathbb{A}$ l'espace $C^\infty(M)[[\hbar]]$. Quand $\mathbb{A}$ est muni de sa structure d'algèbre commutative usuelle nous la notons $\mathbb{A}.$ et nous notons $\mathbb{A}_\star$ l'algèbre $(\mathbb{A},\star)$. Commençons par définir un star-produit fermé.

Définition 2.1. *Soit* f *dans* $\mathbb{A}$ *; notons* $[f]_l$ *le coefficient devant* $\hbar^l$ *dans le développement* $\hbar$*-adique de* f*. Soit* $\mathrm{T} : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ *l'application définie par*

$$\mathrm{T}(f) = \int_M [f]_n \frac{\omega^n}{n!}.$$

Nous dirons qu'un star-produit $\star$ *est* **fermé** *si l'application* $\mathrm{T} : \mathbb{A}_\star \to \mathbb{R}$ *est une trace.*

Remarquons que l'identité $\mathbb{A}_{.} \to \mathbb{A}_\star$ n'est pas un morphisme d'algèbre. Nous appelons $\sigma : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ l'application qui rend compte de ce phénomène : pour f, g dans $\mathbb{A}$

$$\sigma(f,g) = f \star g - fg = \sum_{i>0} h^i P_i(f,g).$$

Nous pouvons maintenant définir l'invariant de [CFS] :

Définition 2.2. *Si $\star$ est un star-produit fermé, on définit, pour tout entier k, une application $\varphi_{2k} : \mathbb{A}^{\otimes 2k+1} \to \mathbb{R}$ par*

$$\varphi_{2k}(f_0, f_1, \ldots, f_{2k}) = \mathrm{T}(f_0 \star \sigma(f_1, f_2) \star \cdots \star \sigma(f_{2k-1}, f_{2k})).$$

Nous noterons φ la somme $\varphi := \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\varphi_{2k}$.

Une simple analyse de la valuation en $\hbar$ de l'expression $f_0 \star \sigma(f_1, f_2) \star \cdots \star \sigma(f_{2k-1}, f_{2k})$ nous montre que $\varphi_{2k} = 0$ pour $k > n$. Pour la suite de ce travail, nous allons définir un intermédiaire de calcul $\tilde{\delta}$ analogue de la différentielle de Hochschild qui fait le lien entre les deux structures d'algèbre sur $\mathbb{A}$. Nous noterons $C^k(E,F)$ l'espace des applications k-linéaires : $E^{\otimes k} \to F$.

Définition 2.3. *Soit $\tilde{\delta} : C^k(\mathbb{A}, \mathbb{A}) \to C^{k+1}(\mathbb{A}, \mathbb{A})$ l'application linéaire définie, pour $f_1, \ldots, f_{k+1}$ dans $\mathbb{A}$ et ϕ dans $C^k(\mathbb{A}, \mathbb{A})$ par :*

$$\tilde{\delta}\phi(f_0, \ldots, f_k) = (-1)^{k-1}\{f_0 \star \phi(f_1, f_2, \ldots, f_k) - \phi(f_0 \cdot f_1, f_2, \ldots, f_k) + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^k \phi(f_0, \ldots, f_{k-1} \cdot f_k) - (-1)^k \phi(f_1, \ldots, f_{k-1}) \star f_k\}.$$

Nous ne pouvons pas utiliser les résultats de cohomologie de Hochschild car $\mathbb{A}$ n'est pas un $\mathbb{A}$-module du fait même que σ est non nul. Notons une propriété évidente de $\tilde{\delta}$:

Lemme 2.4. *Nous avons $\tilde{\delta}\sigma = 0$.*

Démonstration. Soients e, f, g dans N. On a :

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}\sigma(e,f,g) = & \; e \star \sigma(f,g) - \sigma(e \cdot f, g) + \sigma(e, f \cdot g) - \sigma(e,f) \star g \\ = & \; e \star (f \star g - f \cdot g) - ((e \cdot f) \star g - e \cdot f \cdot g) \\ + & \; (e \star (f \cdot g) - e \cdot f \cdot g) - (e \star f - e \cdot f) \star g \\ = & \; 0. \end{aligned}$$

□

L'application bilinéaire et symétrique $\mathrm{T} \circ (. \star .)$, $\mathbb{A} \otimes \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ permet de définir une application $\iota : \mathbb{A} \to \mathbb{A}^*$. Par analogie avec la définition de la différentielle de Hochschild, nous définissons une application $\bar{\delta} : C^k(\mathbb{A}, \mathbb{R}) \to C^{k+1}(\mathbb{A}, \mathbb{R})$, telle que $\iota \circ \tilde{\delta} = \bar{\delta} \circ \iota$, par

$$\bar{\delta}\phi(f_0, \ldots, f_k) = \phi(f_0 \star f_1, f_2, \ldots, f_k) - \phi(f_0, f_1 \cdot f_2, \ldots, f_k)$$
$$+ \cdots + (-1)^k \phi(f_0, \ldots, f_{k-1} \cdot f_k) - (-1)^k \phi(f_0, \ldots, f_{k-1} \star f_k).$$

Proposition 2.5. *Nous avons* $\bar{\delta}\varphi = 0$.

Démonstration. Cette propriété est une conséquence immédiate de ce que $\tilde{\delta}\sigma = 0$:

$$\bar{\delta}\varphi_{2k}(f_0, f_1, \ldots, f_{2k+1}) = \mathrm{T}(f_0 \star f_1 \star \sigma(f_2, f_3) \star \cdots) - \mathrm{T}(f_0 \star \sigma(f_1 \cdot f_2, f_3) \star \cdots) + \cdots$$

En utilisant le fait que $\tilde{\delta}\sigma = 0$, nous pouvons remplacer la somme des 3 premiers termes par $\mathrm{T}(f_0 \star \sigma(f_1, f_2) \star f_3 \star \cdots)$ et donc $\bar{\delta}\varphi_{2k}(f_0, \ldots, f_{2k+1}) =$

$$\mathrm{T}(f_0 \star \sigma(f_1, f_2) \star f_3 \star \sigma(f_4, f_5) \star \cdots) - \mathrm{T}(f_0 \star \sigma(f_1, f_2) \star \sigma(f_3 \cdot f_4, f_5) \star \cdots) + \cdots$$

et par une récurrence immédiate (et en utilisant le fait que le produit $\star$ est fermé), nous voyons que $\bar{\delta}\varphi = 0$. $\square$

Ce travail préliminaire nous permet de démontrer que :

Théorème 2.6. *La cochaîne* φ *est un élément de* $\ker(\delta + B)$ *où* δ *est le cobord de Hochschild et* B *est la différentielle* $B\phi(f_0, \ldots, f_{n-1}) = \sum_{0 \leq i \leq n-1} (-1)^i \phi(1, f_i, f_{i+1}, \ldots)$.

Démonstration. Pour prouver cette proposition, nous allons comparer les deux définitions δ et $\bar{\delta}$. Une simple analyse nous montre que dans l'expression $\bar{\delta}\varphi$ nous n'avons fait que remplacer (dans le premier et le dernier terme de l'expression de $\delta\varphi_{2k}$) $f_0 . f_1$ par $f_0 \star f_1$ et $f_{2k+1} . f_0$ par $f_{2k+1} \star f_0$. Comme $\bar{\delta}\varphi$ est nul, nous pouvons alors écrire (en utilisant σ qui mesure justement la différence entre $f \star g$ et $f.g$) :

$$\delta\varphi_{2k}(f_0, f_1, \ldots, f_{2k+1}) = -\,\mathrm{T}(\sigma(f_0, f_1) \star \sigma(f_2, f_3), \star \cdots) + \mathrm{T}(\sigma(f_{2k+1}, f_0) \star \sigma(f_1, f_2) \star \cdots).$$

Dans cette dernière expression, on reconnaît le terme $-\frac{1}{k+1} B\varphi_{2k+2}$. Ceci nous permet de conclure que $(\delta + B)\varphi = 0$. $\square$

Grâce à des résultats classiques sur la cohomologie cyclique ([Co], [Lo]), nous savons que cet invariant peut s'exprimer dans le complexe de de Rham. Dans le cas où la variété M est le fibré cotangent d'une variété W, Connes, Flato et Sternheimer ont montré que φ correspond à la classe de Todd de la variété W. Nous voulons généraliser ce résultat au cas d'une variété symplectique quelconque. Pour cela, nous allons utiliser un théorème de l'indice sur les variétés symplectiques.

§ 3. Le théorème de Riemann-Roch pour les chaînes cycliques périodiques

Dans cette partie, (M, ω) est toujours une variété symplectique compacte et $\mathbb{A}_\nabla$ désigne l'espace $C^\infty(M)[[\hbar]]$ déformé au moyen de la connexion ∇ (le produit $\star$ correspond au produit sur $\mathbb{A}_\nabla$). Dans toute la suite de notre travail la notation $(\cdots)_{\mathbb{C}[\hbar^{-1}, \hbar]]}$ désignera l'extension des scalaires au corps des séries de Laurent $\mathbb{C}[\hbar^{-1}, \hbar]]$. Commençons par rappeler un résultat de Gutt (*cf.* [Gut]) et généralisé dans [Fe2] :

Théorème 3.1. *L'espace des applications $\mathbb{C}[\hbar^{-1},\hbar]]$-linéaires $T : \mathbb{A} \to \mathbb{C}[\hbar^{-1},\hbar]]$ telles que $T(f\star g - g\star f)=0$ est de dimension 1 sur $\mathbb{C}[\hbar^{-1},\hbar]]$.*

On peut ainsi définir une trace canonique $\mathrm{Tr_{can}} : \mathbb{A}_\nabla \to \mathbb{C}[\hbar^{-1},\hbar]]$,

$$\mathrm{Tr_{can}}(f) = \frac{1}{\hbar^n}[\int \frac{\omega^n}{n!} f + \hbar T_1(f) + \hbar^2 \cdots]$$

avec $T_k(f) = \int D_k(f)\frac{\omega^n}{n!}$ où les D_k sont des opérateurs différentiels sur M.

Nest et Tsygan définissent un quasi-isomorphisme de complexes $\mathbb{Z}_2$-gradués (*cf.* [NT1]),

$$\mu^\hbar \ : \ (\check{C}^\cdot(M, CC_\cdot^{per}(\mathbb{A}_\nabla)_{\mathbb{C}[\hbar^{-1},\hbar]]}), \check{\partial} + b + B) \xrightarrow{\mu^\hbar} (\check{C}^\cdot(M, \Omega^{2n-\cdot}(M)[\hbar^{-1},\hbar]]), \check{\partial} + d)$$

($(CC_\cdot^{per}, b+B)$ désigne le complexe cyclique périodique et $(\check{C}^\cdot, \check{\partial})$ le complexe de Čech). Cette application est appelée **densité de trace**. Elle est obtenue par perturbation du rétract par déformations (*cf.* [Ka]) défini à partir du quasi-isomorphisme local suivant : dans le cas où $M=\mathbb{R}^{2n}$, il existe un quasi-isomorphisme de complexes π :

$$(C_\cdot(\mathbb{A}_\nabla)_{\mathbb{C}[\hbar^{-1},\hbar]]}, b) \xrightarrow{\pi} (K_\cdot(\mathbb{A}_\nabla)_{\mathbb{C}[\hbar^{-1},\hbar]]}, b)$$

avec $K_k(\mathbb{A}_\nabla) = \mathbb{A}_\nabla \otimes \wedge^k(\mathbb{R}^{2n}) \subset C_k(\mathbb{A}_\nabla) = \mathbb{A}_\nabla \otimes \bar{\mathbb{A}}_\nabla^{\otimes k}$. En effet, dans le cas où la variété est $\mathbb{R}^{2n}$, on peut munir l'algèbre de Weyl $\mathbb{A}_\nabla$ d'une filtration qui nous permet de nous ramener au cas commutatif (comme pour la démonstration du théorème P.-B.-W.) et dans ce cas, le complexe $K_\cdot(\mathbb{A}_\nabla)$ (qui est le complexe de Koszul) et le complexe $C_\cdot(\mathbb{A}_\nabla)$ donnent tous deux une résolution projective de $Tor_\cdot^{\mathbb{A}_\nabla \otimes \mathbb{A}_\nabla^{op}}(\mathbb{A}_\nabla, \mathbb{A}_\nabla)$. Nous avons un autre quasi-isomorphisme de complexes :

$$(K_\cdot(\mathbb{A}_\nabla)_{\mathbb{C}[\hbar^{-1},\hbar]]}, b) \xrightarrow{\varpi} (\Omega^{2n-\cdot}(\mathbb{R}^{2n})[\hbar^{-1},\hbar]], d)$$

défini ainsi : on peut identifier $K_\cdot(\mathbb{A}_\nabla)$ avec $\Omega^\cdot(\mathbb{R}^{2n})$, espace des formes sur $\mathbb{R}^{2n}$ (au moyen de l'application $f\otimes y_{i_1}\wedge\cdots\wedge y_{i_j} \mapsto f\, dy_{i_1}\wedge\cdots\wedge dy_{i_j}$). Par analogie avec le travail qui suit la définition 1.2, on définit un isomorphisme $s_{\frac{\omega}{\hbar}} : T^*M \to TM$. Cette application s'étend en un isomorphisme $s_{\frac{\omega}{\hbar}} : \Omega^\cdot(\mathbb{R}^{2n}) \to \Gamma(\mathbb{R}^{2n}, \wedge^\cdot\mathbb{R}^{2n})$. Notons $i_{\frac{\omega^n}{n!}} : \Gamma(\mathbb{R}^{2n}, \wedge^\cdot\mathbb{R}^{2n}) \to \Omega^{2n-\cdot}(\mathbb{R}^{2n})$ la contraction sur la forme $\frac{\omega^n}{n!}$. On définit alors l'application :

$$\varpi \ : \ K_\cdot(\mathbb{A}_\nabla) \to \Omega^{2n-\cdot}(\mathbb{R}^{2n}), \text{ par } \varpi = \frac{1}{\hbar^n} i_{\frac{\omega^n}{n!}} \circ s_{\frac{\omega}{\hbar}}.$$

Par exemple, dans l'espace $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}(x,\xi)$ muni de la forme $\omega = dx\wedge d\xi$, on a ϖ : $f\mapsto \frac{1}{\hbar}f\omega$, $f\otimes x\mapsto f\,dx$, $f\otimes\xi\mapsto f\,d\xi$, $f\otimes x\wedge\xi \mapsto -\frac{1}{2}\hbar f$. En étudiant cette application sur des coordonnées de Darboux, on vérifie que ϖ est un morphisme de complexes. La composée des deux applications π et ϖ nous donne alors un quasi-isomorphisme entre les complexes $(C_\cdot(\mathbb{A}_\nabla)_{\mathbb{C}[\hbar^{-1},\hbar]]}, b)$ et $(\Omega^{2n-\cdot}(\mathbb{R}^{2n})[\hbar^{-1},\hbar]], d)$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de Riemann-Roch pour les chaînes périodiques (*cf.* [NT1], [NT2] et [BNT]) :

Théorème 3.2. *le diagramme suivant est commutatif à homotopie près :*

$$\begin{array}{ccc} \check{C}^{\cdot}(M, CC^{per}_{\cdot}(\mathbb{A}_{\nabla})_{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{\quad s \quad} & \check{C}^{\cdot}(M, CC^{per}_{\cdot}(\mathbb{A}_{\cdot})_{\mathbb{C}}) \\ {\scriptstyle \mu^{\hbar}\circ p}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mu} \\ \check{C}^{\cdot}(M, \Omega^{\cdot}(M)[\hbar^{-1}, \hbar]]) & \xleftarrow[\_\cup \hat{A}(TM)\cup e^{-\theta}]{} & \check{C}^{\cdot}(M, \Omega^{\cdot}(M)[\hbar^{-1}, \hbar]]) \end{array}$$

Ici, s est la spécialisation en $\hbar = 0$, μ est le morphisme de Hochschild-Kostant-Rosenberg (*cf.* [HKR]), θ est la courbure de Weyl de ∇ et p désigne l'extension des scalaires : $\check{C}^{\cdot}(M, CC^{per}_{\cdot}(\mathbb{A}_{\nabla})_{\mathbb{C}}) \to \check{C}^{\cdot}(M, CC^{per}_{\cdot}(\mathbb{A}_{\nabla})_{\mathbb{C}[\hbar^{-1},\hbar]]})$. Nous avons écrit ici le théorème pour le complexe cyclique $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué, c'est-à-dire que l'on identifie a avec $S(a)$ (où S est l'application de Connes usuelle) pour tout a dans $CC^{per}_{\cdot}(\mathbb{A}_{\nabla})$.

Nous allons maintenant donner une version "intégrée" de ce théorème. Pour cela, remarquons que l'on peut étendre $\mathrm{Tr_{can}} : \mathbb{A}_{\nabla}/[\mathbb{A}_{\nabla}, \mathbb{A}_{\nabla}] \to \mathbb{C}[\hbar^{-1}, \hbar]]$ en une application $CC^{per}_{\cdot}(\mathbb{A}_{\nabla})_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}[\hbar^{-1}, \hbar]] : a_0^0 + a_0^2 \otimes a_1^2 \otimes a_2^2 + a_0^4 \otimes a_1^4 \otimes \cdots \otimes a_4^4 + \cdots \mapsto \mathrm{Tr_{can}}(a_0^0)$ (le produit tensoriel est pris ici sur $\mathbb{C}$). Par ailleurs, il est clair que pour tous f et g dans $C^{\infty}(M)$, $\int \circ \mu^{\hbar} \circ p[f, g] = 0$ donc $\int \circ \mu^{\hbar} \circ p$ est une trace. D'après le théorème 3.1, $\int \circ \mu^{\hbar} \circ p$ est proportionnelle à $\mathrm{Tr_{can}}$ et l'égalité de ces deux applications en l'élément 1 nous assure l'égalité. Donc :

Proposition 3.3. *On a :*

$$\int \circ\, \mu^{\hbar} \circ p = \mathrm{Tr_{can}}\,.$$

Pour tout P dans $M_n(\mathbb{A}_{\nabla})$ tel que $P^2 = P$, on peut définir $\mathrm{ch}(P)$ dans $CC^{per}_{\cdot}(\mathbb{A}_{\nabla})_{\mathbb{C}}$ tel que $\mathrm{Tr_{can}}(P) = \mathrm{Tr_{can}}(\mathrm{ch}(P))$:

$$\mathrm{ch}(P) = \mathrm{tr}(P + \sum_{i\geq 1} (-1)^i \frac{(2i)!}{i!}(P - \frac{1}{2}) \otimes P^{\otimes 2i}) \text{ ([Lo 8.3.3]).}$$

Théorème 3.4. *Avec les notations précédentes, soient P, Q dans $M_n(\mathbb{A}^{\hbar}(M))$ tels que $P^2 = P$, $Q^2 = Q$ et $P - Q$ est à support compact. Alors :*

$$\mathrm{Tr_{can}}(P - Q) = \int_M [\mathrm{ch}(P_0) - \mathrm{ch}(Q_0)]\hat{A}(TM)e^{-\theta}$$

où $P_0 = P \bmod \hbar$ et la classe de Chern de P_0 est : $\mathrm{ch}(P_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \mathrm{tr}\, P_0(dP_0)^{2m}$.

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème 3.2, de la proposition 3.3 et du fait que $\mu(s(\mathrm{ch}(P))) = \mathrm{ch}(P_0)$ ([Lo 8.3.9]). Nous retrouvons ainsi le théorème de l'indice. Nous n'aurons besoin que du théorème 3.4 pour la suite de notre travail. Ce théorème, qui est sous forme "intégrée", a été démontré par Fedosov (*cf.* [Fe2]) sans utiliser la version algébrique du théorème 3.2.

Nous allons résumer la preuve du théorème 3.2 faite dans [NT1] et [NT2] et qui donne une nouvelle démonstration du théorème 3.4, car les techniques nous seront utiles pour la suite du travail. Nest et Tsygan exhibent un élément Υ dans $\check{C}^{\cdot}(M, \mathrm{End}(CC^{per}_{\cdot}(\mathbb{A}_{\nabla}))_{\mathbb{C}})$ qui vérifie (on a même l'égalité modulo $\hbar$) : $\mu^{\hbar} \circ p \circ \Upsilon \sim \mu \circ s$, où $a \sim b$ signifie que a et b sont dans la même classe dans le complexe $\mathbb{Z}_2$-gradué. Puis ils montrent que $\Upsilon \sim [\hat{A}(TM)e^{-\theta}]^{-1}\,\mathrm{Id}$ où le terme $\hat{A}(TM)e^{-\theta}$ peut être vu comme un élément de $\check{C}^{\cdot}(M, \mathbb{C}[\hbar^{-1}, \hbar]]\cdot \mathrm{Id}) \hookrightarrow \check{C}^{\cdot}(M, \mathrm{End}(CC_{\cdot}^{per}(\mathbb{A}_\nabla))_{\mathbb{C}})$ (c'est à ce niveau que l'identification $x = S(x)$ intervient). Ceci nous permet de conclure que :

$$\mu^\hbar \circ p \circ (\hat{A}(TM)e^{-\theta} \cup \Upsilon) \circ p \sim \mu^\hbar \circ p \sim \hat{A}(TM)e^{-\theta} \cup \mu \circ s.$$

La preuve du théorème 3.2 nécessite ainsi l'étude de $\mathrm{End}(CC_{\cdot}^{per}(A))$ quand $(A, |.|)$ est une algèbre graduée. Cette étude est faite dans [NT1]. Nous en donnons ici les grandes lignes qui nous serons utiles dans la partie suivante. Pour cela, nous allons définir des applications $\bullet_1 : C_{\cdot}(A, A) \otimes C_{\cdot}(\mathcal{E}_A^{\cdot}, \mathcal{E}_A^{\cdot}) \to C_{\cdot}(A, A)$ et $\bullet_2 : C_{\cdot}^{per}(A) \otimes C_{\cdot}^{per}(\mathcal{E}_A^{\cdot}) \to C_{\cdot}^{per}(A)$ en corrigeant les erreurs de signes qui s'étaient glissées dans [NT3]. Pour $a_0, \ldots, a_n$ dans A nous notons η_k la somme : $\sum_{i=0}^{k-1} |a_k| + k$, et si a désigne $(a_0, \ldots, a_n)$, nous notons $|a| = \eta_{n+1} - 1$. Notons encore $\mathcal{E}_A^{\cdot}$ l'algèbre graduée $(C^{\cdot}(A, A), \deg, \delta, \cup)$. Toutes les définitions, dans le cas gradué, figurent dans l'appendice.

Proposition 3.5. *L'application* $\bullet_1 : C_{\cdot}(A, A) \otimes C_{\cdot}(\mathcal{E}_A^{\cdot}, \mathcal{E}_A^{\cdot}) \to C_{\cdot}(A, A)$,
$(a_0 \otimes \cdots \otimes a_k)\bullet_1(D_0 \otimes \cdots \otimes D_p) =$

$$\sum_{i_1<\ldots<i_p} (-1)^{\Theta_{a,D}^{\{i\}}} a_0 D_0(a_1, a_2, \cdots) \otimes \cdots \otimes a_{i_1} \otimes D_1(a_{i_1+1}, \ldots) \otimes \cdots \otimes D_p(a_{i_p+1}, \ldots) \otimes \cdots$$
$$+ \sum_{\substack{0\le j\le k+1 \\ i_0<\ldots<i_{p-1}}} (-1)^{\Theta'^{j,\{i\}}_{a,D}} D_p(a_j, \ldots, a_k, a_0, \ldots, a_{i_0}) D_0(a_{i_0+1}, \ldots) \otimes \cdots \otimes D_{p-1}(a_{i_{p-1}+1}, \ldots) \otimes \cdots$$

$$\text{avec } \Theta_{a,D}^{\{i\}} = (|D_0| - 1)(\eta_{k+1} - \eta_1) + \sum_{q=1}^{p} |D_q|(\eta_{k+1} - \eta_{i_q+1}),$$
$$\text{et } \Theta'^{j,\{i\}}_{a,D} = |D_p|(\sum_{q=0}^{p} D_q) + \eta_j(\eta_{k+1} - \eta_j) + (|D_0| - 1)(\eta_j - \eta_{i_0+1}) + \sum_{q=1}^{p-1} |D_q|(\eta_j - \eta_{i_q+1}) + |D_p|\eta_{k+1},$$

est un morphisme de complexes, c'est-à-dire : $b(a\bullet_1 x) = (ba)\bullet_1 x + (-1)^{|a|} a\bullet_1(b + \delta)x$.

Proposition 3.6. *(pour simplifier les notations, nous posons, dans* $C_{k+1}^{per}(A)$, $a_i = a_{i-k-1}$ *si* $k < i < 2k + 2$*) L'application* $\bullet_2 : C_{\cdot}^{per}(A) \otimes C_{\cdot}^{per}(\mathcal{E}_A^{\cdot}) \to C_{\cdot}^{per}(A)$,

$$(a_0\otimes\cdots\otimes a_k)\bullet_2(D_0\otimes\cdots\otimes D_p) = (a_0\otimes\cdots\otimes a_k)\bullet_1(D_0\otimes\cdots\otimes D_p) + \sum_{\substack{0\le q\le p,\ 0\le j\le k \\ j\le i_0<\ldots<i_p\le j+k}} (-1)^{\Theta_{a,D}^{q,j,\{i\}}} \times$$
$$\times 1\otimes a_j \cdots \otimes D_q(a_{i_0}, \ldots) \otimes \cdots \otimes D_p(a_{i_{p-q}}, \ldots) \otimes \cdots \otimes D_0(a_{i_{p-q+1}}, \ldots) \otimes \cdots \otimes D_{q-1}(a_{i_p}, \ldots) \otimes \cdots$$

(en se limitant aux $p - q + 1 > k + 1$*, c'est-à-dire :* D_0 *est situé après* a_0*),*

$$\text{avec } \Theta_{a,D}^{q,j,\{i\}} = (\sum_{r<q} |D_r|)(\sum_{r\ge q} |D_r|) + \eta_{k+1} + 1 + (\eta_{k+1} - \eta_j)\eta_j + \sum_{r=q}^{p} |D_r|(\eta_{j+k} - \eta_{i_{r-q}}) + \sum_{r=0}^{q-1} |D_r|(\eta_{j+k} - \eta_{i_{p-q+1+r}}),$$

est un morphisme de complexes : $(b+B)\ (a\bullet_2 x) = ((b+B)\ a)\bullet_2 x + (-1)^{|a|} a\bullet_2(b + B + \delta)x$.

Dans ces deux propositions nous avons considéré le complexe de Hochschild gradué ! Nous pouvons étendre les produits $\bullet_i$ en des lois internes sur $C_{\cdot}^{per}(\mathcal{E}_A^{\cdot}, \mathcal{E}_A^{\cdot})$. Traitons, par exemple, le cas de $\bullet_2$, le cas de $\bullet_1$ s'étudiant de la même manière.

Définition 3.7. *Soit* $\hat{}$ *l'application* $\mathcal{E}^{\cdot}_A \to \mathcal{E}_{\mathcal{E}^{\cdot}_A}$ *définie par :* $D \mapsto \hat{D} = \sum_{p\geq 0} D^{(p)}$, *avec*

$$D^{(p)}(D_1,\ldots,D_p)(a_1,\ldots,a_k) = \sum_{r=1}^{p} (-1)^{\sum\limits_{r=1}^{p} \eta_{i_r}\cdot|D_r|} D(a_1,\ldots,D_r(a_{i_r+1},\ldots)\ldots).$$

Cette application est un morphisme d'algèbres différentielles graduées $\mathcal{E}^{\cdot}_A \to \mathcal{E}_{\mathcal{E}^{\cdot}_A}$.

En définissant maintenant le produit $\bullet_2$ sur $\mathcal{E}^{\cdot}_A$ et non plus sur A, nous obtenons une application que nous noterons toujours $\bullet_2$, $C^{per}_{\cdot}(\mathcal{E}^{\cdot}_A) \otimes C^{per}_{\cdot}(\mathcal{E}_{\mathcal{E}^{\cdot}_A}) \to C^{per}_{\cdot}(\mathcal{E}^{\cdot}_A)$. Enfin, en composant cette application avec $\mathrm{Id} \otimes \hat{\mathrm{Id}}$, $C^{per}_{\cdot}(\mathcal{E}^{\cdot}_A) \otimes C^{per}_{\cdot}(\mathcal{E}^{\cdot}_A) \to C^{per}_{\cdot}(\mathcal{E}^{\cdot}_A) \otimes C^{per}_{\cdot}(\mathcal{E}_{\mathcal{E}^{\cdot}_A})$, nous obtenons la loi interne désirée (associative à homotopie près) :

$$C^{per}_{\cdot}(\mathcal{E}^{\cdot}_A) \otimes C^{per}_{\cdot}(\mathcal{E}^{\cdot}_A) \xrightarrow{\bullet_2} C^{per}_{\cdot}(\mathcal{E}^{\cdot}_A).$$

Si l'on regarde $CC^{per}_{\cdot}(A)$ comme $CC^{per}_{\cdot}(\mathcal{E}^0_A)$ (c'est-à-dire que l'on considère les éléments de A comme des cochaînes de degré 0) alors, puisque le produit $\bullet_2$ étendu que nous venons de définir se restreint à $CC^{per}_{\cdot}(\mathcal{E}^0_A)$, nous obtenons une autre loi interne (que nous noterons encore $\bullet_2$) : $CC^{per}_{\cdot}(A) \otimes CC^{per}_{\cdot}(A) \to CC^{per}_{\cdot}(A)$. Ce produit est appelé produit de Hood-Jones sur $CC^{per}_{\cdot}(A)$. Nous allons utiliser ce produit non pas sur l'algèbre A, mais sur l'algèbre $\mathcal{E}^{\cdot}_A$ (nous voyons les cochaînes sur A comme des cochaînes de degré 0 sur $\mathcal{E}^{\cdot}_A$). Pour éviter toute confusion nous noterons $\diamond$ ce produit :

$$CC^{per}_{\cdot}(\mathcal{E}^{\cdot}_A) \otimes CC^{per}_{\cdot}(\mathcal{E}^{\cdot}_A) \xrightarrow{\diamond} CC^{per}_{\cdot}(\mathcal{E}^{\cdot}_A).$$

Définition 3.8. *Pour* α *dans* $CC^{per}_{\cdot}(A)$ *et* $D_1,\ldots,D_p, D$ *dans* $C^{\cdot}(A,A)$, *posons :*

$$J(D_1 \wedge\cdots\wedge D_p \otimes D)\alpha = (-1)^{|\alpha| \sum\limits_{r=1}^{p}(|D_r|-1)} L_D(\alpha)\bullet_2 \frac{1}{p!}\sum_{\varrho} \epsilon_\varrho L(D_{\varrho 1}\diamond(D_{\varrho 2}\diamond(\cdots\diamond D_{\varrho m}))\cdots).$$

où ρ *décrit les permutations de* $[1,p]$ *et* ϵ_ϱ *est le produit des* $\epsilon_{(i,i+1)}$ *selon une décomposition de* ϱ *en produit de transposition, en notant* $\epsilon_{(i,i+1)} = (-1)^{(|D_i|-1)(|D_{i+1}|-1)}$. *Enfin, on a posé* $L_D(\alpha) = (-1)^{|\alpha||D|}(\alpha\bullet_2(1,D))$.

Nous avons alors le résultat suivant ([NT3]) :

Théorème 3.9. *Soit* $\mathfrak{a}$ *l'algèbre de Lie différentielle graduée* $(C^{\cdot}(A,A), |.|, [.,.]_G, \delta)$ *où* $[.,.]_S$ *est le crochet de Gerstenhaber ([Ge]). Soit* $(R.(\mathfrak{a}), \partial^{Lie})$ *le complexe de Lie associé à* $\mathfrak{a}$ *:* $R.(\mathfrak{a}) = \wedge^{\cdot}\mathfrak{a} \otimes U(\mathfrak{a})$ *et* ∂^{Lie} *est la dérivée de Lie graduée. Alors l'application* J *:* $R.(\mathfrak{a}) \to \mathrm{End}(CC^{per}_{\cdot}(A))$ *est un homomorphisme de* $\mathfrak{a}$*-modules à droite et :*

$$[B+b, J(\gamma)] = J((\partial^{Lie}+\delta)\gamma),\ \forall\gamma \in R.(\mathfrak{a}).$$

Remarque 3.10 (*cf.* **[NT3]**). *A partir de l'action définie dans le théorème précédent, on peut construire un morphisme de complexes naturel :*

$$\overline{C}^{\lambda}_{\cdot -1}(A) \times CC^{per}_{\cdot}(A) \to CC^{per}_{\cdot}(A)$$

où $\overline{C}^{\lambda}_{\cdot -1}(A)$ est le complexe cyclique réduit. On se reportera à l'appendice pour des définitions précises.

Concluons cette partie en terminant le schéma de la démonstration du théorème 3.2 (*cf.* [NT1]). Si l'on restreint la variété M à un ouvert U contractile et de Darboux, le groupe d'homologie $\bar{HC}_{2n-1}(\mathbb{A}_\nabla)[\hbar^{-1}]$ est isomorphe à $\mathbb{C}[\hbar^{-1}, \hbar]]$. Si $\xi_1, x_1, \ldots, \xi_n, x_n$ est un système de coordonnées vérifiant $[\xi_l, x_m] = \hbar\delta_l^m$, pour tous $1 \leq l, m \leq n$, le cycle $\Upsilon_0 = \frac{1}{2n(\hbar)^n} \operatorname{Alt}(\xi_1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n \otimes x_n)$ est un générateur du groupe $\bar{HC}_{2n-1}(\mathbb{A}_\nabla)[\hbar^{-1}]$. En utilisant la suite spectrale $E^2_{ij} = H^{-i}(M, \bar{HC}_j(\mathbb{A}_\nabla))$, on peut construire un cycle Υ dans le complexe $\check{C}^{\cdot}(M, \overline{C}^{\lambda}_{\cdot -1}(\mathbb{A}_\nabla))[\hbar^{-1}] \simeq \check{C}^{\cdot}(M, \operatorname{End}(CC^{per}_{\cdot}(\mathbb{A}^\hbar(M)))_{\mathbb{C}})$ dont la classe d'homologie donne le générateur de $\bar{HC}_{2n-1}$ sur chaque ouvert contractile de Darboux U_α. En calculant Υ dans $\check{C}^{\cdot}(M, \overline{C}^{\lambda}_{\cdot -1}(\mathbb{A}_\nabla[\eta])_{\mathbb{C}[\hbar^{-1}, \hbar]]})$, on trouve : $\Upsilon \sim \sum_{k\geq 0} (\hat{A}\cdot e^{-\theta})^{-1}_{2m}\cdot\eta^{(n+k)}$, où η est un paramètre formel qui donnera l'identité dans $\operatorname{End}(CC^{per}_{\cdot}(\mathbb{A}_\nabla))$. Ceci achève la preuve du théorème.

§ 4. Calculs intermédiaires

Nous voulons maintenant donner l'image de τ (cocycle dans le bicomplexe cyclique périodique) dans le complexe de de Rham (*cf.* [Co]). Pour cela, nous allons écrire τ grâce aux applications définies dans les parties précédentes. Nous gardons toujours les notations des parties 1 et 2 : $(\mathbb{A}_\nabla, \star)$ est une déformation de $\mathbb{A} = C^\infty(M)[[\hbar]]$.

Proposition 4.1. *Considérons l'application σ définie dans la deuxième partie : $\sigma = m_\star - m$ où $m_\star$ est la multiplication $\star$ et m est la multiplication commutative de $\mathbb{A}$.. Soient $b_\star$ et b les bords de Hochschild dans les algèbres $\mathbb{A}_\nabla$ et $\mathbb{A}$. Alors :*

$$L_\sigma = b - b_\star.$$

Démonstration. Il suffit de prouver que pour une algèbre (A, m), l'application $-L_m$ est le bord de Hochschild correspondant. Vérifions cette propriété dans le cas non gradué (le cas gradué se traitant de même) :

$$\begin{aligned} L_m(a_0 \otimes \cdots \otimes a_k) &= (-1)^k (a_0 \otimes \cdots \otimes a_k) \bullet_2 (1 \otimes m) \\ &= (-1)^k \sum_i (-1)^{k-i} a_0 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes a_{i+1}a_{i+2} \otimes \cdots \\ &+ (-1)^{k+k+k+1} a_n a_o \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k-1} \\ &+ (-1)^{k+k+1} a_o a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_k. \end{aligned}$$

C'est bien la définition de l'opposée de la différentielle de Hochschild. □

Définition 4.2. *Nous posons, formellement :*

$$e^\sigma = \sum_i \frac{1}{i!}\wedge^i\sigma \in \wedge^{\cdot}\mathfrak{a}.$$

Nous avons alors le résultat suivant :

Proposition 4.3. *Dans* $(\mathbb{A}_\nabla, \star)$*, avec les notations de la partie précédente :*

$$[B + b_\star, J(e^\sigma)] = J(e^\sigma)\cdot L_\sigma. \tag{1}$$

Démonstration. Remarquons d'abord que $\delta\sigma - \frac{1}{2}[\sigma,\sigma] = 0$. Ceci est immédiat compte-tenu de l'associativité de m et $m_\star$. Dans $\wedge^{\cdot}\mathfrak{a}\otimes U(\mathfrak{a})$ nous avons ensuite :

$$(\delta + \partial^{Lie})(e^\sigma \otimes 1) = e^\sigma(\delta\sigma - \frac{1}{2}[\sigma,\sigma]) \otimes 1 + e^\sigma \otimes L_\sigma.$$

Nous pouvons appliquer le théorème 3.9, et notre résultat suit. □

L'égalité (1) s'écrit : $(B + b_\star)J(e^\sigma) - J(e^\sigma)(B + b_\star) = J(e^\sigma)\cdot b - J(e^\sigma)\cdot b_\star$ ou encore :

$$(B + b_\star)J(e^\sigma) = J(e^\sigma)(B + b).$$

Nous venons de démontrer :

Théorème 4.4. *L'application* $J(e^\sigma)$ *définit un morphisme de complexes* $CC_\cdot^{per}(\mathbb{A}_\cdot) \to CC_\cdot^{per}(\mathbb{A}_\nabla)$*. De plus*

$$s \circ J(e^\sigma) = \mathrm{Id}.$$

Cette dernière formule découle directement de la définition de $J(e^\sigma)$.

Etudions maintenant le cocycle φ défini dans [CFS]. Celui-ci est construit au moyen de l'application $\mathrm{T} : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ qui est une trace (*cf.* définition 2.1). Cette trace n'est pas $\mathbb{C}[[\hbar]]$-linéaire mais elle peut s'écrire comme la composée d'une application $\mathbb{C}[[\hbar]]$-linéaire (qui est encore une trace) et de la projection s définie dans la troisième partie. Le théorème 3.1 nous assure alors que l'application T est proportionnelle à $s \circ \mathrm{Tr}_{\mathrm{can}}$ (on prolonge l'application s en une projection $s : \mathbb{C}[\hbar^{-1}, \hbar]] \to \mathbb{C}$). En comparant ces deux fonctions en l'élément 1, on voit que :

$$\mathrm{T} = s \circ \frac{\int e^{\frac{\omega}{\hbar}}}{\int \hat{A}(TM)e^{-\theta}} \mathrm{Tr}_{\mathrm{can}}. \tag{2}$$

Proposition 4.5. *Pour* $f_0, \ldots, f_{2k}$ *dans* $C^\infty(M)$*, on a :*

$$s \circ \frac{\int e^{\frac{\omega}{\hbar}}}{\int \hat{A}(TM)e^{-\theta}} \mathrm{Tr}_{\mathrm{can}}(p(J(e^\sigma)(f_0, \ldots, f_{2k}))) = \varphi(f_0, \ldots, f_{2k}).$$

Démonstration. Soient $f_0, \ldots, f_{2k}$ dans $C^\infty(M)$; calculons $s \circ \mathrm{Tr}_{\mathrm{can}}(p(J(e^\sigma)(f_0, \ldots, f_{2k})))$. D'après la définition de $\diamond$, la cochaîne $\sigma \diamond (\sigma \diamond (\cdots \diamond \sigma)\cdots)$ (où σ apparaît l fois) est dans

$\sum_{i\geq 0} CC^{per}_{2i}(\mathcal{E}^{\cdot}_{A})$. Soient $\alpha = a_0 \otimes \cdots \otimes a_j$ dans $CC_j(A)$ et $S = S_0 \otimes S_1 \otimes \cdots \otimes S_{2p}$ dans $CC^{per}_{2p}(\mathcal{E}^{\cdot}_{A})$, $p > 0$. Le produit $\alpha \bullet_2 S$ fait apparaître des termes de trois types :

$$a_0 \star S_0(\cdots)\otimes\cdots\otimes S_1(\cdots)\otimes\cdots, \quad S_{2p}(\cdots)\star S_0(\cdots)\otimes\cdots\otimes S_1(\cdots)\otimes\cdots, \quad \text{et } 1\otimes\cdots\otimes S_1(\cdots)\otimes\cdots$$

Dans tous les cas, l'élément $S_1(\cdots)$ intervient dans le $i^{\text{ème}}$ facteur ($i > 0$) du produit tensoriel, et donc $\mathrm{Tr}_{\mathrm{can}}(\alpha \bullet_2 S) = 0$ (d'après la définition de $\mathrm{Tr}_{\mathrm{can}}$ sur $CC^{per}_{\cdot}(\mathbb{A}_{\nabla})_{\mathbb{C}}$). $p(\alpha \bullet_2 S) = 0$. Nous venons de démontrer que seule la projection dans $CC^{per}_0(\mathcal{E}^{\cdot}_{A})$ de $\sigma \diamond (\sigma \diamond (\cdots \diamond \sigma)\cdots)$ contribue au calcul de $s \circ \mathrm{Tr}_{\mathrm{can}}(p(J(e^{\sigma})(f_0, \ldots, f_{2k})))$. Cette projection se calcule par une récurrence immédiate : elle est égale au produit des l termes σ : $\sigma \cup (\sigma \cup (\cdots \cup \sigma)\cdots)$. Il est alors clair que :

$$s \circ \mathrm{Tr}_{\mathrm{can}}(p(J(e^{\sigma})(f_0, \ldots, f_{2k}))) = \sum_i \frac{1}{i!} s \circ \mathrm{Tr}_{\mathrm{can}}(f_0 \star (\sigma \cup (\sigma \cup (\cdots \cup \sigma)\cdots))(f_1 \otimes \cdots \otimes f_{2k}).$$

Ceci démontre la proposition compte-tenu de l'égalité (2) et de la définition de φ. $\square$

§ 5. Le résultat principal

Pour exprimer l'invariant φ en homologie de de Rham, nous voulons en fait écrire $\varphi(f_0, f_1, \ldots, f_{2k})$ sous la forme $\int f_0 \, d f_1 \wedge \cdots \wedge d f_{2k} C(M)$ où $C(M)$ est une classe caractéristique associée à φ. C'est cette classe caractéristique que nous cherchons à construire.

Soient $f_0 \otimes \cdots \otimes f_{2k}$ dans $CC^{per}_{2k}(C^{\infty}(M))$. Nous allons appliquer la version "intégrée" du théorème 3.2 à $J(e^{\sigma})(f_0 \otimes \cdots \otimes f_{2k})$ où $J(e^{\sigma})$ est l'application définie dans la partie précédente ($\sigma = m_{\star} - m$). Nous obtenons alors :

$$\int \mu^{\hbar} \circ p(J(e^{\sigma})(f_0, \ldots, f_{2k})) = \int \hat{A}(TM) e^{-\theta} \mu \circ s(J(e^{\sigma})(f_0, \ldots, f_{2k})).$$

Mais nous avons vu que $s \circ J(e^{\sigma}) = \mathrm{Id}$ (théorème 4.4) et que $\int \circ \mu^{\hbar} = \mathrm{Tr}_{\mathrm{can}}$ (proposition 3.3). De plus le morphisme de Hochschild-Kostant-Rosenberg s'écrit $\mu(f_0, \ldots, f_{2k}) = f_0 \, d f_1 \wedge \cdots \wedge d f_{2k}$. On obtient alors : pour tous $f_0, \ldots, f_{2k}$:

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{can}}(p(J(e^{\sigma})(f_0, \ldots, f_{2k}))) = \int \hat{A}(TM) e^{-\theta} f_0 \, d f_1 \wedge \cdots \wedge d f_{2k}.$$

Pour conclure nous pouvons appliquer la proposition 4.5 qui relie le cocycle φ et la trace canonique. Posons $c(\hbar) = \frac{\int e^{\frac{\omega}{\hbar}}}{\int \hat{A}(TM) e^{-\theta}}$. On a :

$$s \circ c(\hbar) \, \mathrm{Tr}_{\mathrm{can}}(p(J(e^{\sigma})(f_0, \ldots, f_{2k}))) = \varphi(f_0, \ldots, f_{2k}).$$

Nous avons ainsi démontré :

Théorème 5.1. *Le cocycle de Connes-Flato-Sternheimer donne la classe caractéristique :* $C(M) = s \circ \frac{\int e^{\frac{\omega}{\hbar}}}{\int \hat{A}(TM)e^{-\theta}} \hat{A}(TM)e^{-\theta}$ *en homologie de de Rham, c'est-à-dire, pour tous* $f_0, \ldots, f_{2k}$ *dans* $C^\infty(M)$,

$$\varphi(f_0, f_1, \ldots, f_{2k}) = \int f_0 \, df_1 \wedge \cdots \wedge df_{2k} C(M).$$

Ceci démontre que l'invariant φ défini par Connes Flato et Sternheimer classifie bien les star-produits fermés : quand on regarde cet invariant dans le groupe d'homologie de de Rham, on vérifie qu'il ne tient compte que des caractéristiques de la variété M (terme $\hat{A}(TM)$) et de la courbure de Weyl de la connexion ∇ à partir de laquelle on a construit le star-produit (terme $e^{-\theta}$). On retrouve ainsi un résultat compatible avec la classification de Fedosov et Kontsevich donnée dans le théorème 1.4.

§ 6. Appendice

Dans cette partie, nous allons définir précisément les différentes applications linéaires utilisées dans les parties précédentes et notamment les différentielles de Hochschild pour les complexes gradués. Soit $(A, |.|, m)$ une algèbre graduée. Si $a = a_0 \otimes \cdots \otimes a_d$ est une chaîne dans A nous notons η_k la somme : $\sum_{i=0}^{k-1} |a_k| + k$, et $|a| = \eta_{n+1} - 1$. Notons $\mathcal{E}_A^{\cdot}$ l'algèbre graduée $(C^{\cdot}(A, A), \deg, \delta, \cup)$: où si D est dans $C^d(A, A)$, $\deg(D) = d +$ le degré de D comme application linéaire. Nous disposons aussi de l'algèbre de Lie graduée $\mathfrak{a} = (C^{\cdot}(A, A), |.|, [.,.]_G)$ où $|D| = \deg(D) - 1$. Voici les définitions :

$$\begin{aligned}
m(a_1, a_2) &= (-1)^{|a_1|} a_1 \cdot a_2 \\
D \circ E(a_1, \ldots, a_{d+e-1}) &= \sum_{i \geq 0} (-1)^{|E| \cdot \eta_i} D(a_1, \ldots, a_i, E(a_{i+1}, \ldots, a_{i+e}), \ldots) \\
[D, E]_G &= D \circ E - (-1)^{|E||D|} E \circ D \\
D\{E_1, \ldots, E_p\}(a_1, \ldots, a_d) &= \sum (-1)^{\sum_{k=1}^{p} \eta_{i_k} \cdot |E_k|} \times \\
&\quad \times D(a_1, \ldots, a_{i_1}, E_1(a_{i_1+1}, \ldots), \ldots, E_p(a_{i_p+1}, \ldots), \ldots) \\
(D \cup E)(a_1, \ldots, a_{d+e}) &= (-1)^{(|E|-1) \cdot \eta_d} D(a_1, \ldots, a_d) E(a_{d+1}, \ldots, a_{d+e}) \\
(\delta D)(a_0, \ldots, a_d) &= (-1)^{(|a_0|+1)|D| + |a_0|} a_0 D(a_1, \ldots, a_d) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^{|D| + \eta_{i+1}} D(a_0, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_d) \\
&\quad + (-1)^{|D| + \eta_{d+1}} D(a_0, \ldots, a_{d-1}) a_d
\end{aligned}$$

Décrivons maintenant les différents complexes. Commençons par le bicomplexe cyclique :

$(CC_{\cdot}(A), b+B)$ où $CC_k(A) = A \otimes \overline{A}^{\otimes k}$ et les différentielle sont donnée par :

$$b(a_0 \otimes \cdots \otimes a_k) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{\eta_i} a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_k$$
$$+ (-1)^{(|a_k|+1)(\eta_k+1)+1} a_k a_0 \otimes \cdots \otimes a_{k-1}$$
$$B(a_0 \otimes \cdots \otimes a_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{(\eta_{k+1}-\eta_i)\cdot\eta_i} 1 \otimes a_i \otimes \cdots \otimes a_k \otimes \cdots \otimes a_{i-1}$$

Si (A, ∂_A) est en plus différentielle graduée on étend ∂_A à $CC_{\cdot}(A)$ par :

$$\partial_A(a_0 \otimes \cdots \otimes a_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{\eta_i} a_0 \otimes \cdots \otimes \partial_A a_j \otimes \cdots \otimes a_k.$$

References

[BNT] P. Bressler, R. Nest, B. Tsygan, *A Riemann-Roch type formula for the microlocal Euler class*, Internat. Math. Res. Notices **20** (1997), 1033-1044.

[Co] A. Connes, *Noncommutative differential geometry*, Ins. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **62** (1985), 257–360.

[CFS] A. Connes, M. Flato, D. Sternheimer, *Closed star product and cyclic cohomology*, Lett. Math. Phys. **24** (1992), no.1, 1–12.

[DWL] M. De Wilde, P. Lecomte, *Existence of star-product and of formal deformation of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifold*, Lett. Math. Phys. **7** (1983), no.6, 487–496.

[Fe1] B.V. Fedosov, *A simple geometrical construction of deformation quantization*, J. Differential Geom. **40** (1994), no.2, 213–238.

[Fe2] B.V. Fedosov, *The index theorem in the algebra of quantum observables*, Soviet Phys. Dokl. **34** (1989), no.4, 319–321.

[Ge] M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring*, Ann. of Math. **78** (1963), 267–288.

[Gut] S. Gutt, *Equivalence of deformation and associated $\star$-products*, Lett. Math. Phys. **3** (1979), 297–309.

[HKR] G. Hochschild, B. Kostant et A. Rosenberg, *Differential forms on regular affine algebras*, Transactions AMS **102** (1962), 383-408.

[Ka] C. Kassel, *Homologie cyclique, caractère de Chern et lemme de perturbation*, Angew. Math. **408** (1990), 159–180.

[Ko] M. Kontsevich, *Formality conjecture. Deformation theory and symplectic geometry*, Math. Phys. Stud. **20** (Ascona, 1996), 139–156.

[Lo] J.L. Loday, *Cyclic Homology*, Springer Verlag (1993).

[NT1] R. Nest, B. Tsygan, *Algebraic index theorem*, Comm. Math. Phys. **172** (1995), no.2, 223–262.

[NT2] R. Nest, B. Tsygan, *Algebraic index theorem for families*, Adv. Math. **113** (1995), no.2, 151–205.

[NT3] R. Nest, B. Tsygan, *Product structures in (cyclic) homology and their applications. Operator algebras and quantum field theory*, Internat. Press, Cambridge (Rome, 1996), 416–439.

Gilles Halbout

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur – C.N.R.S.
7, rue René Descartes — F–67084 STRASBOURG Cedex — FRANCE
e-mail: halbout@math.u-strasbg.fr