

# Journée EDP à Montpellier

Université Montpellier II, 2 novembre 2004

Organisée avec le concours de l'I3M (UMR CNRS 5149), du Conseil Scientifique de l'Université Montpellier II et de Polytech' Montpellier.

---

## PROGRAMME DE LA JOURNÉE

Horaire	Exposé
9h30 – 10h00	<i>accueil et petit déjeuner</i>
10h00 – 11h00	Philippe Hoch : Equations de Hamilton-Jacobi d'ordre 1 : les cas des maillages structurés et non-structurés.
11h00 – 12h00	Elisabetta Carlini : A convergent scheme for a non local Hamilton-Jacobi equation, modeling dislocation dynamics
12h00 – 14h00	<i>déjeuner</i>
14h00 – 15h00	Michel Pierre : A propos de régularité des formes optimales
15h00 – 16h00	Alain Prignet : Existence et non existence de solutions d'équations elliptiques non-linéaires à données mesures
16h00 – 16h15	<i>pause café</i>
16h15 – 17h15	Claire Chainais : Schemas volumes finis pour des modèles de semiconducteurs
17h15 – 18h15	Elisabeth Rouy : Solutions de viscosité géométriques pour les problèmes de type Hele-Shaw

---

## RÉSUMÉS

Philippe Hoch (CEA Paris).  
**Equations de Hamilton-Jacobi d'ordre 1 : les cas des maillages structurés et non-structurés**

---

Elisabetta Carlini (CERMICS-ENPC)

**A convergent scheme for a non local Hamilton-Jacobi equation, modeling dislocation dynamics**

We study dislocation dynamics with a level set point of view. The model, we present here, looks at the zero level set of a solution of a non local Hamilton Jacobi equation, as a dislocation in a plane of a crystal. The front has a normal speed, depending on the solution itself. The existence and uniqueness for short time of such problem has been proved in the set of discontinuous viscosity solution. We present here a finite difference scheme, first order accurate, for the corresponding level set formulation of the model. The scheme is essentially based on monotone numerical Hamiltonian, proposed by Osher and Sethian, but the non local character of the problem make it not monotone; we refer, but not direct apply, to the general result for monotone scheme, to prove convergence in the two dimensional case. We obtain an explicit convergence rate of the approximation to the viscosity solution and to the front, i.e. to the corresponding level set. We provide numerical simulation.

---

Michel Pierre (Antenne de Bretagne de l'ENS Cachan et IRMAR)

**A propos de régularité des formes optimales**

Etant donnée une application numérique  $E$  définie sur une famille  $\mathcal{O}$  de parties de  $R^N$ , nous nous intéressons à la régularité d'une forme optimale associée, c'est-à-dire de  $\Omega^*$  solution de

$$E(\Omega^*) = \min\{E(\Omega); \Omega \in \mathcal{O}\}.$$

La famille  $\mathcal{O}$  peut contenir des contraintes: on peut penser par exemple aux ouverts  $\Omega$  de  $R^N$  contenus dans un ouvert fixe  $D$  de  $R^N$  et de volume imposé. Si la fonctionnelle  $E$  est la fonction périmètre, on a, par exemple, le problème géométrique classique consistant à minimiser le périmètre à volume donné parmi les ouverts inclus dans un ouvert fixe. Nous nous intéressons à des fonctionnelles de forme contenant des termes géométriques de ce type ainsi que d'autres termes énergétiques dont le calcul passe par la solution  $u_\Omega$  d'une équation aux dérivées partielles sur  $\Omega$ , par exemple le problème de Dirichlet  $u_\Omega \in H_0^1(\Omega)$ ,  $-\Delta u_\Omega = f$  sur  $\Omega$  où  $f \in L^2(D)$  est donnée.

Souvent, l'existence d'une forme optimale est donnée par des outils d'analyse fonctionnelle qui produisent des formes sans pratiquement aucune régularité a priori, même dans les cas où on s'attend à des formes très régulières, voire à bord analytique. C'est en général une étape très difficile que d'obtenir un peu de régularité à partir de rien. Nous discuterons ce type de question en rappelant quelques résultats géométriques classiques issus des travaux sur les surfaces minimales et en donnant des résultats récents sur la minimisation de la fonctionnelle de Dirichlet  $\Omega \rightarrow \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_\Omega|^2 - \int_\Omega f u_\Omega$  avec contrainte de mesure  $|\Omega| = m$  et  $u_\Omega$  comme ci-dessus. Nous évoquerons aussi le cas des formes minimales pour les valeurs propres du Laplacien avec conditions de Dirichlet.

---

Alain Prignet (Université d'Orleans).

**Existence et non existence de solutions d'équations elliptiques non-linéaires à données mesures**

On s'intéresse aux équations elliptiques non-linéaires dont le modèle est le  $p$ -laplacien :  $-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x)$  (et plus généralement aux opérateurs elliptiques de Leray et Lions) avec  $u = 0$  au bord d'un ouvert borné. Lorsque  $f$  est assez régulière, il y a existence et unicité. Lorsque  $f$  est une mesure, ces résultats ne s'appliquent plus : si on peut encore montrer l'existence d'une solution, construite par approximation, il n'y a plus unicité. Lorsqu'on ajoute une non-linéarité en  $|u|^{q-1}u$ , la situation est très différente. Si  $q$  est petit et  $f$  est intégrable, il y a toujours existence, mais si  $q$  est assez grand et si  $f$  est concentrée sur des ensembles assez petits (de capacité, liée à  $q$ , nulle), la solution approchée tend vers 0. Ceci peut s'interpréter comme un résultat de non-existence d'une solution ou de stabilité de l'équation.

---

Claire Chainais-Hillairet (Université de Clermont-Ferrand).  
**Schémas volumes finis pour des modèles de semiconducteurs**

Le modèle de dérive-diffusion et le modèle de transport d'énergie sont des systèmes d'équations aux dérivées partielles qui interviennent dans la modélisation des semiconducteurs. Le but de l'exposé est de présenter ces 2 modèles et d'en proposer une approximation par des schémas volumes finis. Dans le cas du modèle de dérive-diffusion, on établira la convergence du schéma numérique, ce qui démontre simultanément l'existence de solutions. On présentera également des résultats numériques.

---

Elisabeth Rouy (Ecole Centrale de Lyon).  
**Solutions de viscosité géométriques pour les problèmes de type Hele-Shaw**

Nous étudions des modèles de type Hele-Shaw qui décrivent le comportement d'un fluide injecté entre deux plaques très proches l'une de l'autre. C'est un problème de mouvement de front avec une seule phase. L'injection se fait à travers un trou modélisé par une source compacte  $S$ . On note  $\Omega(t)$  la région comprenant  $S$  occupée par le fluide au temps  $t$  et  $\Sigma(t)$  sa frontière extérieure. La vitesse normale de  $\Sigma(t)$  est donnée en chacun de ses points  $x$  par

$$V_{t,x} = |\nabla u(t,x)|^{p-1}$$

lorsque, pour  $p > 1$  fixé,  $u(t, \cdot)$  est la solution de l'équation

$$\begin{cases} -\operatorname{div} (|\nabla u(t,x)|^{p-2}\nabla u(t,x)) = f(x) & \text{dans } \Omega(t) \setminus S \\ u(t,x) = 0 & \text{sur } \Sigma(t) \\ u(t,x) = g(x) & \text{sur } S \end{cases}$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions positives. Nous montrons l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème pour des intervalles de temps arbitraires sous des hypothèses de régularité du front initial.