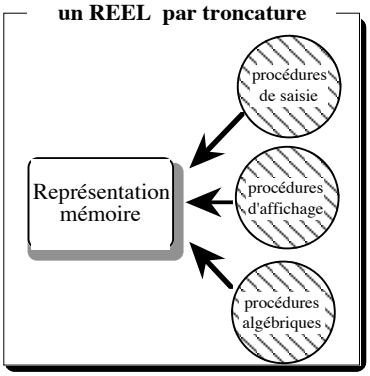
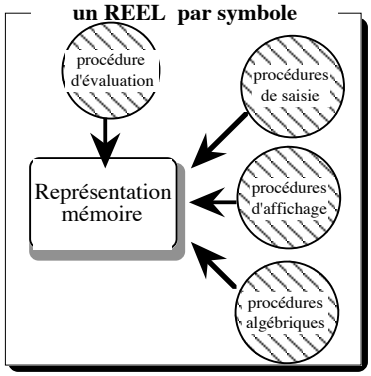
Annexe 3 : En savoir plus sur l'articulation calcul exact/calcul approché

La transposition informatique d'un réel est une représentation en mémoire et un environnement de procédures. Bien sûr l'environnement de procédures, pas plus que le format de la représentation mémoire ne sont les mêmes selon le type de représentation. Dans un cas, les procédures algébriques se réduisent à + - ÷ … alors que dans l'autre on trouve aussi factor, expand…





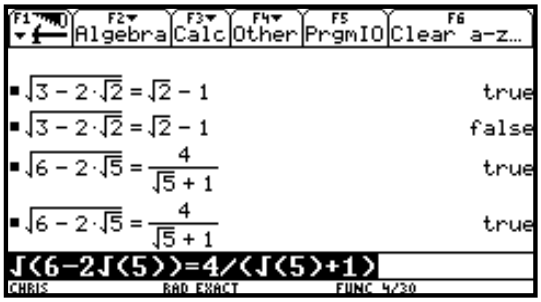
La procédure de saisie dans le cas d'une représentation par symboles utilise une analyse syntaxique élaborée…. . Conceptuellement, la différence entre les deux représentations tient en la présence d'une procédure[3] "d'évaluation" qui permet d'obtenir une représentation par troncature à partir de la représentation symbolique.

A travers quelques situations, nous allons illustrer le traitement de l'égalité de deux réels et juxtaposer les résultats issus de la transposition informatique de ce problème dans le cas d'une représentation par troncatures et dans le cas d'une représentation par symboles.

Réels	*Transposition :*	*Mode de la machine:*	*Représentation machine :*
A = B	par troncatures	`approx`(◊ enter)	a' ≡ b'
	par symboles	`exact`	a ↔ b

Situation 1

❶ mode `exact` ———>
❷ ◊ enter ———>
❸ mode `exact` ———>
❹ ◊ enter ———>



- ❶ A=$\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ et B=$\sqrt{2}$ - 1 sont des réels égaux, un chemin de a à b a été trouvé (via ?) : a ↔ b d'où la réponse «TRUE».
- ❷ En représentation par troncature, il y a eu des troncatures "fatales" (c'est-à-dire engendrant des représentations différentes) d'où la réponse «FALSE».
- ❸ Un chemin a été trouvé (via $\sqrt{5}$ -1 ?) , on a : a ↔ b d'où «TRUE».
- ❹ Troncatures "bénignes" (qui conduisent à des représentations identiques) a' ≡ b' d'où «TRUE».

On a donc ici dans le premier cas : A = B et $\begin{cases} a \leftrightarrow b \\ a' \not\equiv b' \end{cases}$ {réponses incohérentes}

Et dans le deuxième cas : A = B et $\begin{cases} a \leftrightarrow b \\ a' \equiv b' \end{cases}$ {réponses cohérentes et valides}

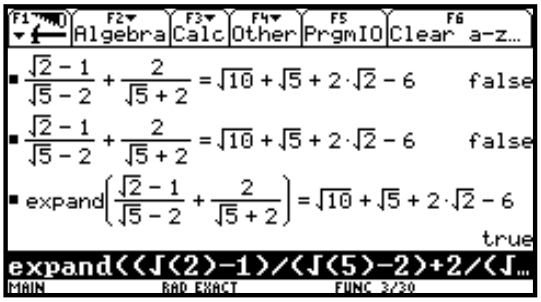
[3] En fait, cette procédure utilise des fonctions qui sont présentes dans la procédure de saisie d'un réel en représentation par troncature.

Situation 2

❶ mode **exact** ———>

❷ ◊ [enter] ———>

❸ mode **exact** ———>



•❶ Mode **exact** : les algorithmes n'ont pas trouvé de chemin d'où la réponse «FALSE» pourtant les deux réels sont bien égaux.

•❷ Mode **approx** : en représentation par troncature, il y a eu des troncatures "fatales" d'où réponse «FALSE», les deux modes de représentation donnent un résultat cohérent mais faux.

•❸ Mode **exact** : on a aiguillé les algorithmes vers un chemin qu'ils n'avaient pas pu initier, on a enfin la réponse «TRUE».

On a ici : $A = B$ et $\begin{cases} a \not\leftrightarrow b & \{\text{réponse incorrecte}\} \\ a' \not\equiv b' & \{\text{réponse cohérente mas incorrecte}\} \\ a \leftrightarrow b & \{\text{valide mais "forcée" et incohérente}\} \end{cases}$

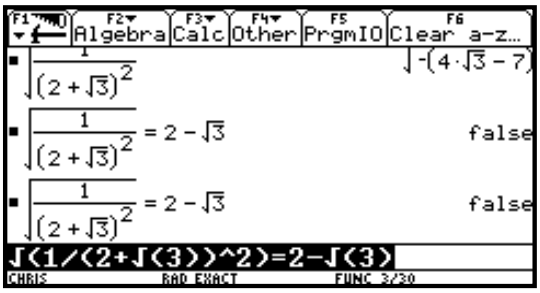
Avec un peu de pratique, les élèves constatent que les algorithmes réclament parfois un "coup de pouce" pour conclure et ce coup de pouce salvateur est alors frénétiquement recherché à travers des manipulations complètement erratiques sans la moindre sémantique.

Situation 3

❶ mode **exact** ————>

❷ mode **exact** ————>

❸ ◊ [enter] ————>



•❶ et ❷ Mode **exact** : sans entrer dans des détails de fonctionnements cognitifs, le réel A serait perçu globalement par l'élève et la formule : $\sqrt{c^2} = c$ appliquée (sans précaution c'est à craindre !) . [ENTER] déclenche une analyse syntaxique "en profondeur[4]" puis une ré écriture qui conduit à un "cul de sac". Bien que A = B , les algorithmes ne peuvent pas trouver un chemin de a à b.

•❸ Mode **approx** : des troncatures "fatales" conduisent à $a' \not\equiv b'$.

On a ici $A = B$ et $\begin{cases} a \not\leftrightarrow b \\ a' \not\equiv b' \end{cases}$ {réponses cohérentes mais incorrectes}

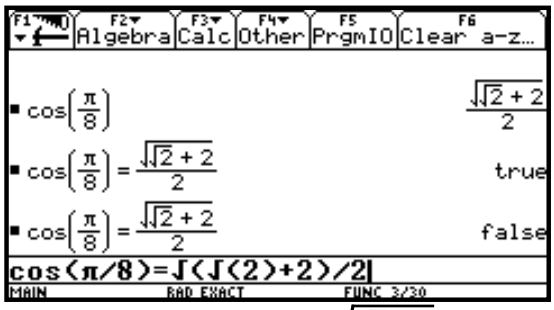
[4] C'est-à-dire commençant par : $(2 + \sqrt{3})^2 = (7 + 4\sqrt{3})$ puis traitement de l'inverse puis traitement de $\sqrt{}$

Situation 4

❶ mode **exact** ————>

❷ mode **exact** ————>

❸ ◊ enter ————>



•❶ et ❷ Mode **exact** : l'analyse de cos π/8 conduit à une ré écriture en $\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$; le chemin de cos π/8 à $\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$ est immédiat d'où la réponse valide «TRUE» (ici on pourrait dire que A = B se transpose informatiquement en a ↔ a).

•❸ Mode **approx** : les algorithmes d'évaluation approchée de cos et ceux des racines ne donnent pas des représentations a' et b' qui coïncident . On a une réponse «FALSE» qui est fausse et incohérente.

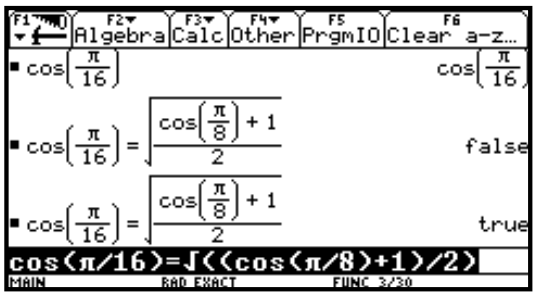
On a ici A = B et $\begin{cases} a \leftrightarrow b \\ a' \not\equiv b' \end{cases}$ {réponses incohérentes}

Situation 5

❶ mode **exact** ————>

❷ mode **exact** ————>

❸ ◊ enter ————>



•❶ et ❷ Mode **exact** : lors de la transposition informatique, cos π/16 n'a été associé à aucune expression algébrique. Il n'y a pas de chemin de cos π/16 jusqu'à une quelconque expression algébrique d'où la réponse incorrecte : « FALSE ».

•❸ Mode **approx** : le hasard[5] des algorithmes d'évaluation approchée conduisent à des représentations a' et b' telles que a' ≡ b' , d'où cette réponse valide mais incohérente : «TRUE».

On a ici A = B et $\begin{cases} a \not\leftrightarrow b \\ a' \equiv b' \end{cases}$ {réponses incohérentes}

[5] Les algorithmes sont bien sûr déterministes, on exprime plutôt une incompétence à contrôler tous les algorithmes et leurs compilations.