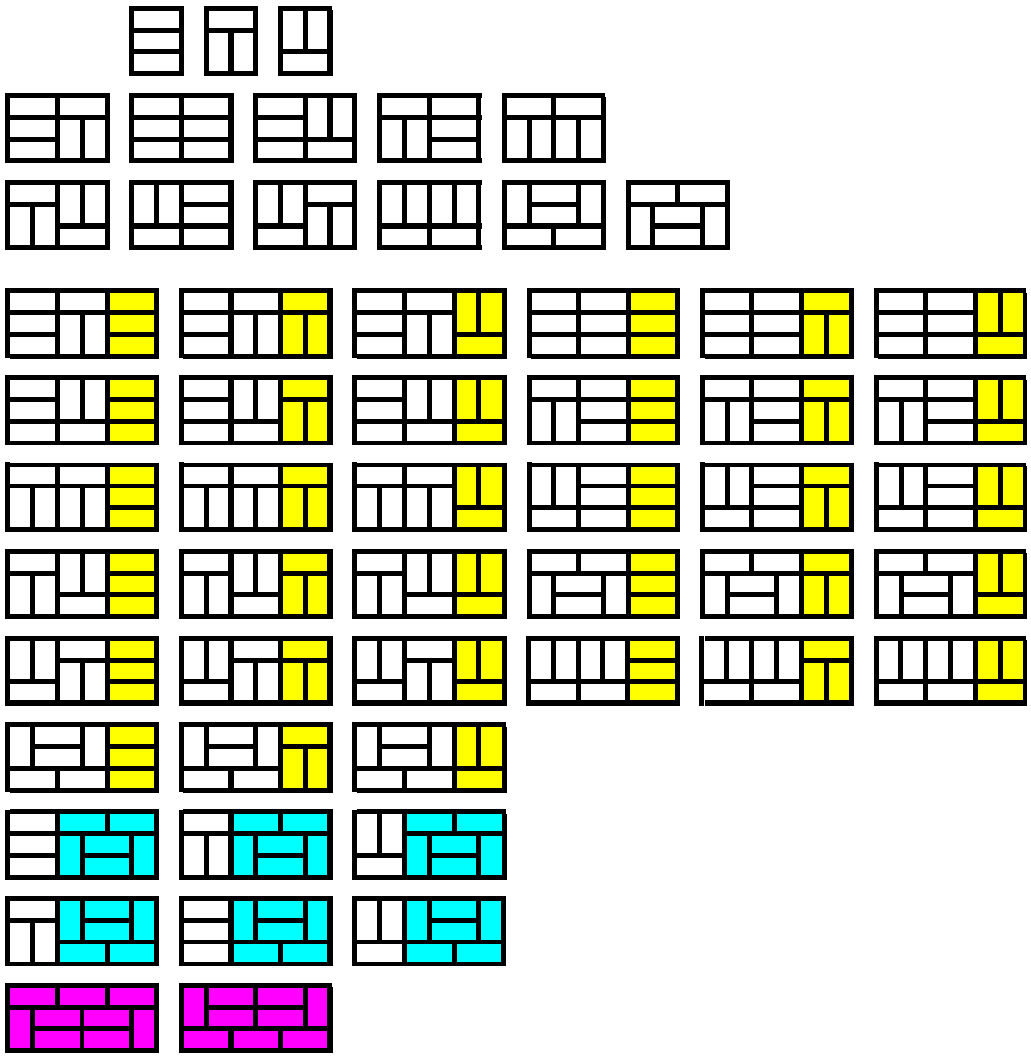
Recherches dans le cas des rectangles de largeurs 3 et 4

une solution dans le cas des rectangles 3 x 2n

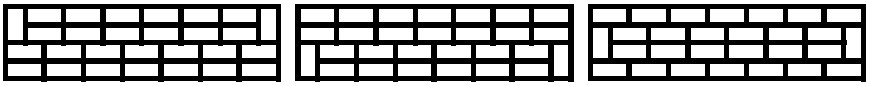


n	u_n
2	3
4	3 x 3 + 2 = 11
6	11 x 3 + 3 x 2 + 2 = 41
8	41 x 3 + 11 x 2 + 3 x 2 + 2 = 153
10	153 x 3 + 41 x 2 + 11 x 2 + 3 x 2 + 2 = 571
12	571 x 3 + 153 x 2 + 41 x 2 + 11 x 2 + 3 x 2 + 2 = 2131

une solution dans le cas des rectangles 4 x n

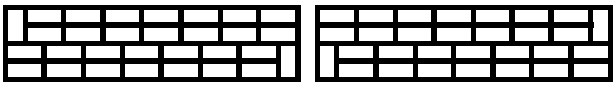
n pair > 2

3 solutions sans barre verticale



n impair>1

2 solutions sans barre verticale



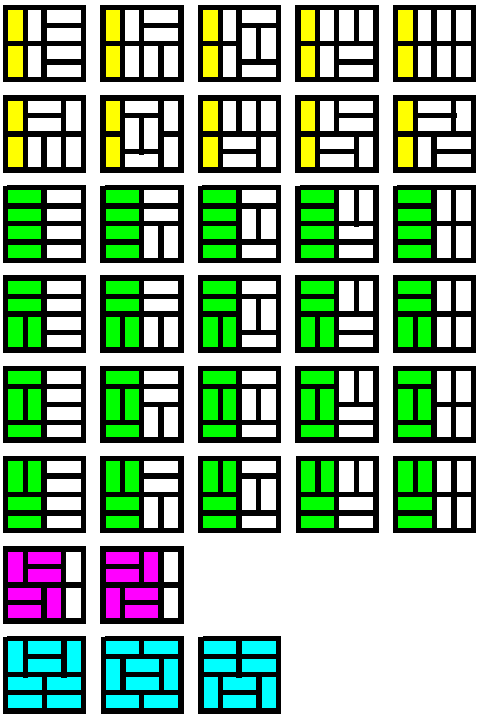
4x2

n = 2

4 solutions sans barre verticale

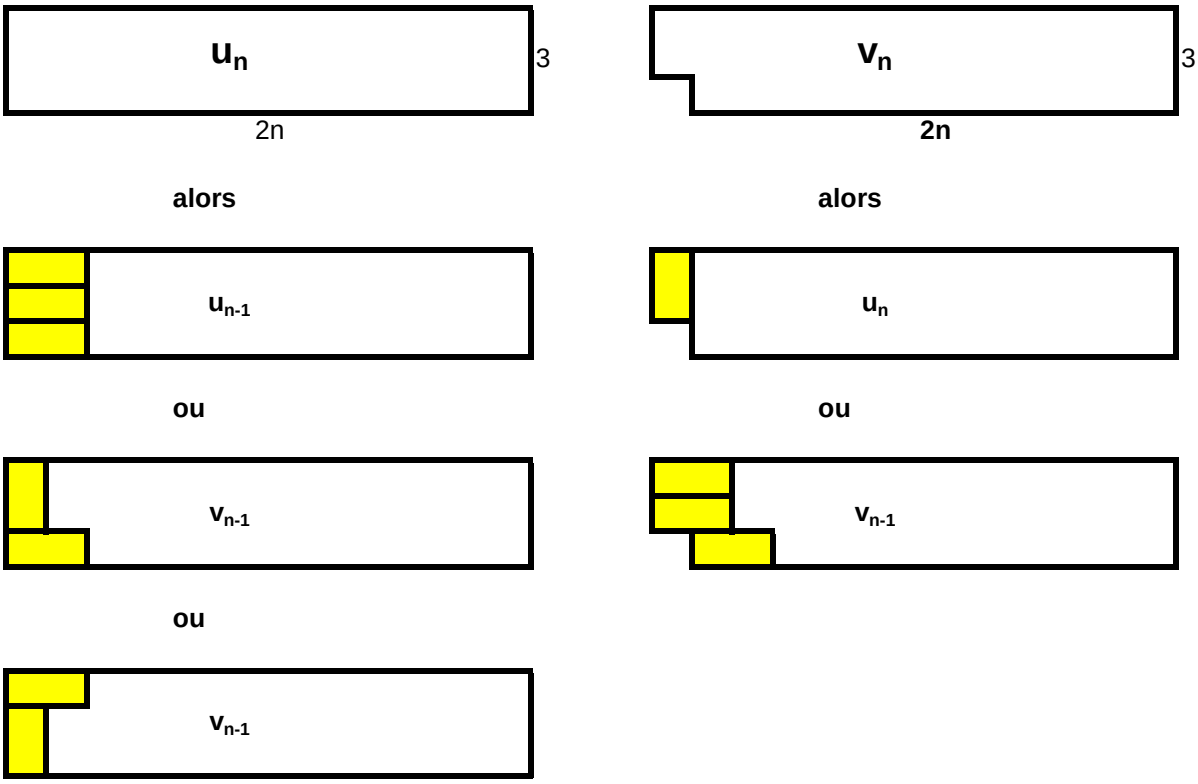
4x3

4x4



n	u_n
1	1
2	5
3	5 + 4 x 1 + 2 = 11
4	11 + 4 x 5 + 2 x 1 +3 = 36
5	36 + 4 x 11 + 2 x 5 + 3 x 1 + 2 = 95
6	95 + 4 x 36 + 2 x 11 + 3 x 5 + 2 x 1+ 3 = 281
7	281 + 4 x 95 + 2 x 36 + 3 x 11 + 2 x 5 + 3 x 1+ 2 = 781

Solution plus générale dans le cas d'un rectangle 3 x 2n



D'après les figures ci-contre, on a :

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + 2v_{n-1} \\ v_n = u_n + v_{n-1} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u_n = u_n - 1 + 2v_{n-1} \\ v_n = u_{n-1} + 3v_{n-1} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ pour n = 1, on a : $u_1 = 3$ et $v_1 = 4$

donc $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Il faut diagonaliser $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ car $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable : il existe P matrice inversible telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{i.e. } A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\text{d'où : } A^n = P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}}_{I} . P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1} . P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1} \ldots\ldots P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Il reste à trouver λ, μ et P (s'ils existent bien).

Les calculs donnent :

$\lambda = 2 + \sqrt{3}$ $\qquad$ $\mu = 2 - \sqrt{3}$

$$P = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} \\ -1 & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (2+\sqrt{3})^n & 0 \\ 0 & (2-\sqrt{3})^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} \\ -1 & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Formule générale pour un rectangle n × m avec n ou m pair :

$$2^{\frac{mn}{2}} \prod_{k=1}^{m} \prod_{l=1}^{n} \left(\cos^2 \frac{k\pi}{m} + \cos^2 \frac{l\pi}{n}\right)^{\frac{1}{4}}$$

1) COMPARAISON DES FORMULES PRECEDENTES

Pour un rectangle de largeur égale à 3 et de longueur 2 n

U_n étant le nombre de rectangle différents que l'on peut faire avec des pavés de 2 carreaux (hor. ou vert.)

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{n-1}$$

Avec la calculatrice TI 83 + , on trouve :

n	2	3	4	5
$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 \\ 15 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 41 \\ 56 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 153 \\ 209 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 571 \\ 780 \end{pmatrix}$

Qui s'avère vérifier les premières formules.

n	u_n
1	3
2	3 x 3 + 2 = 11
3	11 x 3 + 3 x 2 + 2 = 41
4	41 x 3 + 11 x 2 + 3 x 2 + 2 = 153
5	153 x 3 + 41 x 2 + 11 x 2 + 3 x 2 + 2 = 571
6	571 x 3 + 153 x 2 + 41 x 2 + 11 x 2 + 3 x 2 + 2 = 2131

2) Diagonalisation de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{n-1}$ **donnant** $\lambda = 2 + \sqrt{3}$ **et** $\mu = 2 - \sqrt{3}$

matrice caractéristique : $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

polynôme caractéristique : $p(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 1$

valeurs propres : Pour $p(\lambda) = 0$ on a

$\Delta = 12$ et

$\lambda' = 2 + \sqrt{3}$
$\lambda'' = \mu = 2 - \sqrt{3}$

la matrice diagonale sera $A_0 = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$

telle que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix} P^{-1}$

Recherchons la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} \overset{0}{X} & \overset{0}{Y} \end{pmatrix}$ où $\overset{0}{X}$ et $\overset{0}{Y}$ sont les vecteurs propres

2.1 **<u>Calcul du vecteur propre</u>** correspondant à la valeur propre $\lambda = 2 + \sqrt{3}$:

Soit $\overset{0}{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ce vecteur.

On a $(A - \lambda I)\overset{0}{X} = 0$

Soit $\begin{pmatrix} 1-(2+\sqrt{3}) & 2 \\ 1 & 3-(2+\sqrt{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

Ce qui donne le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} (-1-\sqrt{3})\,x + 2\,y = 0 \\ x + (1-\sqrt{3})\,y = 0 \end{cases}$$

Ces deux équations étant les mêmes on choisira donc par exemple $y = 1$ ce qui donne :

$x = -1 + \sqrt{3}$

d' où le vecteur propre : $\overset{0}{X} = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

2.2 **<u>Calcul du vecteur propre</u>** correspondant à la valeur propre $\mu = 2 - \sqrt{3}$:

Soit $\overset{0}{Y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ce vecteur.

On a $(A - \lambda I)\overset{0}{Y} = 0$

Soit $\begin{pmatrix} 1-(2-\sqrt{3}) & 2 \\ 1 & 3-(2-\sqrt{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

Ce qui donne le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} (-1+\sqrt{3})\,x + 2\,y = 0 \\ x + (1+\sqrt{3})\,y = 0 \end{cases}$$

Ces deux équations étant les mêmes on choisira donc par exemple $y = 1$ ce qui donne :

$x = -1 - \sqrt{3}$

d' où le vecteur propre : $\overset{0}{Y} = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc la matrice $P = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice inverse P^{-1} peut se vérifier à la calculatrice facilement.

$P^{-1} = (1/\det)\,(\text{matrice adjointe})^t$ avec det = par la règle de Sarrus

$= (-1+\sqrt{3}) \times 1 - 1 \times (-1-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

matrice adjointe = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1+\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$

matrice transposée de la matrice adjointe = $\begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} \\ -1 & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$

d'où $P^{-1} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} \\ -1 & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$

On peut vérifier que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix} \times \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} \\ -1 & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

et surtout que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (2+\sqrt{3})^{n-1} & 0 \\ 0 & (2-\sqrt{3})^{n-1} \end{pmatrix} \times \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} \\ -1 & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$