Test Racine Carrée

A.BRONNER

COMPTE RENDU D'EXPERIMENTATION

Nous présentons ici un compte rendu du test dans une classe de Troisième T1. Ce test a été proposé au élèves avant la séquence d'enseignement sur la racine carré. Nous allons caractériser les réponses des élèves à l'aide la classification d'Alain Bronner (1997).

Précisons encore que les élèves de la classe T1 n'ont pas eu de cours spécifique sur la racine carrée en classe de Quatrième et ont utilisé seulement la touche racine carrée de la calculatrice pour conclure dans les situations d'apprentissage du théorème de Pythagore. En effet, en Quatrième l'enseignant de la classe n'a pas introduit l'usage du symbole "√" et n'a pas proposé un enseignement sur la racine carrée.

1. Les différents rapports chez les élèves de la classe T1

Le tableau ci-dessous récapitule les modèles attribués selon la typologie précédente.

Modèles	CP	CA	CF	CA≈	CN	non attribué	Total
Nombre	8	4	1	6	1	0	20

2. Le groupe "CP" et les dérivés "CP-N", "CP+D/2"

8 élèves (sur 20) relèvent du modèle CP. On retrouve les caractéristiques générales de ce modèle.

Ensemble de définition de la fonction racine carrée et espace numérique des élèves :

A l'exercice 1 ces élèves ne remplissent pas la première ligne pour

x^2= 13 ; 0,9 ; 9/5 ; 2,8. Si nous considérons seulement ces réponses brutes du tableau nous n'avons pas assez d'éléments pour repérer le rapport personnel des élèves à l'objet racine carrée. Le fait de ne pas donner de réponse à $\sqrt{13}$ peut être lié à des connaissances très différentes et plus ou moins conformes. Les raisons peuvent être :

- ils ne trouvent pas de nombre entier qui a pour carré 13 ;
- ils ne trouvent pas de nombre décimal qui a pour carré 13 ;
- ils se rendent compte qu'ils ne possèdent pas d'autres écritures possibles pour $\sqrt{13}$;
- ils imaginent qu'ils y a d'autres chiffres que ceux donnés par la calculatrice et ils ne savent comment les trouver.

Il est donc nécessaire d'avoir recours aux écrits des élèves pour essayer de préciser le rapport personnel des élèves à l'objet racine carrée. Dans ce groupe, les arguments sont en général du type *"Le nombre ... n'est pas un carré "*. Par exemple l'élève 1, après avoir "transformé" à l'item c de l'exercice 4 l'équation en x^2 = 17, écrit *"je ne peux pas trouver x car 17 n'est pas un carré "* .

De la même façon nous avons encore à l'exercice 3 : *" Non on ne peut pas trouver un carré d'aire 17 cm^2 car 17 n'est pas un carré"* .

A l'exercice 2 sur la recherche d'un côté d'un triangle rectangle connaissant les deux autres, on pouvons trouver des arguments du type : *"13 = BC^2 on ne peut pas savoir la mesure de BC car 13 n'a pas de carré "* (él 20).

Ces écrits nous permettent de préciser les connaissances des élèves et en particulier de noter la présence du théorème en acte : " la (ou une) racine carrée de a existe si et seulement si a est un carré parfait de l'espace numérique de l'élève".

Le cas des valeurs négatives pour x^2

Au niveau du tableau, des élèves rejettent les racines carrées des nombres négatifs

-9 ; -7 ; $-\frac{35}{49}$ avec des diverses raisons :

- elles peuvent être liées à l'espace numérique de l'élève ;
- elles peuvent être liées aux connaissances sur le signe d'un carré ;

- elles peuvent être liées à des arguments basés sur des produits particuliers.

Par exemple :

- Pour un élève (él 6) le caractère positif d'un carré ne semble pas disponible et il revient à l'argument général que ces nombres ne sont pas des carrés traitant de la même manière 13 ; -9 ; -7 ; $-\frac{35}{49}$.

- Les élèves (él 1 et 13) donnent bien comme argument pour -9 ; -7 ; $-\frac{35}{49}$ que *" le carré d'un nombre est toujours positif "* traitant tous les négatifs de la même manière. De même à l'exercice 4 ils ne trouvent pas de solution dans les équations équivalentes à $x^2 = a$ avec a négatif : *"On ne peut pas trouver x car le carré d'un nombre n'est jamais négatif "*.

- Pour les deux autres (él 11 et 20), le rejet de l'existence d'une racine carrée de -9 semble procéder de deux étapes. Ils ne considèrent comme nombres, pouvant intervenir comme facteurs dans le carré, que les nombres 3 et -3, en envisageant peut être implicitement la valeur absolue du nombre (-9). Ensuite ils essaient les différents produits 3x3, (-3)x(-3) ou (-3)x3 et ils constatent que cela ne donne pas -9 ou alors que les deux facteurs ne sont pas égaux comme dans le dernier produit : *"Pour -9 si je fais -3x3 cela fera 9 et non -9 je pourrais faire -3x3 ce qui donnerait -9, mais ce ne serait pas bon car je dois multiplier par le même nombre"*. (él 11)

Là encore, l'écrit est décisif pour se déterminer sur les raisons du rejet de certaines valeurs négatives.

L'opérateur racine carrée :

Les situations font ressortir pour certains élèves un besoin et une recherche d'un tel opérateur. Les écrits complémentaires des élèves montrent qu'ils ressentent le vide d'un opérateur réciproque. En effet :

- Pour - 9 ; -7 ; 0,9 ; et 2,8 l'élève 6 écrit *"je n'arrive pas à trouver l'inverse de (x^2)"* ;

- Pour l'élève 1 *" Je ne sais pas passer de x^2 à x ".*

Un modèle dérivé : CP+D/2

L'élève (2) a un rapport globalement conforme au modèle CP. Cependant cet élève fait aussi apparaître localement l'opérateur racine carrée comme ayant même effet que la division par 2. Nous relevons dans ces écrits :*"On ne peut pas remplir certaines cases parce que quand on prend la moitié d'un chiffre, certains ne sont pas égaux"*. Cela est confirmé aussi à l'exercice 3 où cet élève pour la recherche du côté d'un carré d'aire 17 cm^2 déclare :*"17 c'est 8,5x8,5, donc 8,5 est la longueur des côtés "*. En s'appuyant sur ses écrits, nous pouvons avancer que cet élève utilise pour certains nombres une procédure division par deux comme opérateur de racine carrée. Ce sous-modèle sera noté CP + D/2 dans la suite.

3. Le groupe d'élèves CA

La prise en compte de tous les types d'écrits (écrits mathématiques et écrits complémentaires) nous ont permis de différencier les comportements de certains élèves de ce groupe :

Le type "standard" :

Lorsque a n'est pas carré parfait les solutions sont données par des valeurs approchées de $\sqrt{a}$ données par l'affichage de la calculatrice. En effet, l'élève 12 donne 1,3416408 comme racine carrée de 9/5, trouve pour le côté du carré d'aire 17 cm^2 4,1231056 et écrit *" oui, car 4,1231056 x 4,1231056 = 17 cm^2 "*.

Le type " normalisateur" :

Certains élèves donnent, assez systématiquement, les réponses sous forme d'écritures décimales normalisées, même lorsque la calculatrice donne des écritures décimales exactes. Ainsi l'élève 14 normalise à deux chiffres après la virgule :

- 3,60 ; 0,94 ; 1,34 ; 1, 67 comme racine carrée respective de 13 ; 0,9 ; 9/5 ; 2,8 dans le tableau de l'exercice 1;

- mais aussi 20,34 comme carré de 4,51 (la valeur exacte étant 20,3401). Nous interprétons ce comportement comme une “identification” des nombres modulo 1/100).

Le type “affichage flottant” :

L’élève 7 fournit un nombre de chiffres après la virgule très variable selon les nombres:

- par exemple 3,605 ; 0,3 ; 1,34 ; 1,67 comme racine carrée respective de 13 ; 0,9 ; 9/5; 2,8 à l’exercice 1 ;

- et à l’exercice 4, pour l’équation $x^2 = 17$, il répond *“ $17\sqrt{x} = 4,123$ ”* ;

- *“ $17\sqrt{x} = 4,123105626$, le côté n’est pas exact, donc 17 cm^2 pour aire n’est pas bon, on ne peut pas trouver un côté exact ”*.

Les écrits de cet élève montrent que le type de réponses (nombre de chiffres après la virgule, existence ou non du nombre) est fortement lié à la nature du cadre. Sans les écrits complémentaires exigés nous n'aurions pas pu accéder à un raisonnement non conforme d'un élève. En effet dans le tableau les réponses de cet élève concernant les nombres négatifs -9 et -7 sont correctes, mais en fait le rejet est appuyé uniquement sur le message de la calculatrice. Au lieu d'analyser le nombre, son écriture, son signe, …, l’élève entre l'expression numérique dans la calculatrice et donne un résultat strictement conforme à celui de l'écran : *"On ne trouve à la calculatrice aucun carré de -9 et de -7"*. Nous voyons ici comment l'écrit nous permet d'observer un cas de dépendance de la calculatrice.

4. Le groupe d’élèves CA≈

Certains élèves répondent systématiquement selon le rituel vu en Quatrième sur les situations de Pythagore. Ils utilisent le symbole ≈ pour écrire le résultat ou ils fournissent une valeur décimale avec une “précision”. Les deux peuvent se combiner. Il en est de même pour d'autres expressions numériques, par exemple des produits ou des quotients, comme nous pouvons le voir dans les productions écrites d‘élèves :

- L'élève (3) déclare pour le premier exercice avec le tableau *"On ne peut pas mettre un chiffre à peu près égal à son carré"* , et fournit les réponses suivantes :

dans le cadre algébrique (exercice 4) :

- à l'item a) "x = $\frac{16-5}{3}$ " , puis "*x ≈ 3,67 au 100ème près*" ;

- à l'item c) "$x^2 = 17$", puis " *x ≈ 4,12 au 100ème près*"

dans le cadre géométrique (exercice 3) :

- à l'item c) pour le côté du carré d'aire 36 cm^2 , puis 17 cm^2

* "*Aire = 36 cm^2 --> 36 est le carré de 6 --> 6 = côté du carré*"

* *"Aire =17 cm^2 --> 17 est le carré de ≈ 4,1 --> 4,1 = côté du carré"*

- Chez l'élève (5) on décèle une gestion différente et erronée des approximations :

- dans le cadre algébrique

- à l'item a) "$x = \frac{11}{3}$" , puis "*x ≈ 3,666666667* " et en dessous "*3,7 au milliardième près*" ;

- à l'item c) "$x^2 = 17$", puis " *x ≈ 4,2 au dixième près*"

- dans le cadre géométrique (exercice 3), à l'item c) pour le côté du carré d'aire 17 cm^2

"$c^2 = 4,2 \times 4,2 \approx 17$", puis "*au centième près donc les côtés mesurent 4,2 cm*"

Les valeurs données sont reconnues comme des valeurs approchées des expressions cherchées et non des valeurs "exactes". Par exemple l'élève 16, après avoir donné x= $\sqrt{4}$ = 2 pour x^2= 4, va écrire pour la résolution de x^2 = 17, *" On ne peut pas car on aurait qu'une valeur approchée"* - toujours après avoir barré le mot *"inexacte"*.

L'élève 17 de ce groupe fournit bien "$x = \frac{11}{3}$" comme solution de l'équation 3x+5 = 16.

Mais pour x^2 = 17, après avoir écrit *"x = 0,1176 à 0,01 près"*, conclut que ce n'est pas possible parce que *"ce n'est pas un nombre à virgule"*. Un fonctionnement et un traitement

différent entre racines carrées et quotients sont ainsi repérables chez certains élèves par l'intermédiaire de leurs écrits.

56. Un élève CF

L'élève 8, redoublant de Troisième, connaît le symbole radical √ et l'utilise pour produire comme réponse la suite d'équations : $x^2 + 8 = 25$, $x^2 = 25 - 8$, $x^2 = 17$, $x = \sqrt{17}$.
A ce niveau, la réponse semble conforme à l'attente institutionnel. Mais l'écrit complémentaire suivant *" Il me manque une opération pour trouver x ="* montre qu'il s'agit d'une transformation formelle en utilisant le symbole radical, mais pas vraiment d'un opérateur arithmétique permettant de trouver des valeurs numériques. Les racines carrées n'ont donc pas pris un statut de nombre. Autrement dit cet élève relève d'un modèle CF.

6. un élève CN

Un seul élève de cette classe semble relever du modèle CN. En particulier, il exprime la mesure du côté du carré d'aire 17 comme $\sqrt{17}$ .. Bien que présentant des comportements relevant du modèle CN, les apprentissages ne sont pas encore stabilisés. En regardant de près ces écrits, nous observons, qu'au niveau de l'exercice 1, l'élève (4) a répondu dans un premier temps : *"Pour 13^2 on ne peut mettre la valeur de x, parce qu'elle ne tombe pas juste"* et *"je ne peux pas le faire pour $\frac{9}{5}$ parce que la racine carrée n'est pas entière"*. Ensuite se ravisant, il a barré ces commentaires et a répondu avec des radicaux. Des apprentissages de Quatrième et de Troisième ont eu lieu pour cet élève, mais ils sont encore bien fragiles.

7. Les rapports personnels à la nature du nombre

La notion de racine carrée est un bon révélateur de rapport personnel à l'objet nombre et les écrits complémentaires des élèves nous permettent de préciser ces rapports en relation à la nature du nombre.

Les décimaux

L'élève 12 écrit *"2,8 n'a pas de racine carrée car 28 n'a pas de racine carrée"*. Il traite les décimaux comme des entiers.

Les rationnels

- L'élève 6 dit qu'il n'arrive pas à remplir certaines cases du tableau *" car ce sont des fractions "*. A l'exercice 4 une erreur l'amène à écrire x = $\frac{16}{3}$ + 5, qu'il remplace alors par 10,33….

- Quant à l'élève 12, il ne trouve pas de racine carrée pour $-\frac{35}{49}$, non pas en raison du signe de ce nombre, mais en faisant référence aux écritures. Il déclare *"Dans la dernière case* $-\frac{35}{49}$ *ne peut se simplifier car quand* <u>*on transforme la fraction en nombre*</u> *le résultat est trop complexe "* (c'est nous qui soulignons).

Les nombres idécimaux

Dans cette classe les rapports personnels aux objets "nombre réel" et "racine carrée" sont du type CP, CF, CA ou CA≈. Différents facteurs se conjuguent pour provoquer des difficultés chez les élèves dont nous allons montrer des indices à travers les formulations écrites des élèves :

- A propos de l'exercice 4 sur les équations *"le a), c), d), e) ne sont pas des nombres précis, alors ça ne peut tomber juste"*.

- Un élève donne bien $\sqrt{13}$ dans le tableau et dans le calcul de BC, ou encore $\sqrt{17}$ dans les exercice 3 et 4, mais une gêne apparaît : il dit qu'il ne peut remplir les cases du tableau "parce *que je ne connais pas de valeur juste de certains nombres"* et pour les autres exercices *"le résultat ne tombe pas juste"*.

Les expressions des élèves laissent penser qu'ils ne conçoivent pas de nombres en dehors des décimaux et qu'ils recherchent des valeurs décimales.

Certains élèves de type CA≈ commencent à construire une nature différente pour certains nombres :

par exemple un élève écrit à propos de l'exercice 3 : *"17 n'est pas le carré d'un nombre qui s'arrête ; c'est un nombre indéfini "*. Il récidive à l'exercice 4 après avoir écrit x =

Test Racine Carrée

A.BRONNER

$\sqrt{17}$: *"mais je ne peux pas aller plus loin comme pour l'exercice précédent ; x est un nombre indéfini x =* $\sqrt{17}$ *= 4,12… ".*