Appropriation

Les questions posées par les classes sont très diverses, mais de la 6ème à la seconde les préoccupations sont sensiblement les mêmes et peuvent se classer en trois catégories :

- Motivation
  - *Est-ce que ce sont des francs ou des euros ? Est-ce qu'il y a un lien avec les euros ? Est-ce que c'est aussi pareil dans d'autres pays, ou seulement en France ?*
  - *Les marchands n'en profiteront-ils pas pour augmenter les prix ?*
  - *Pensez-vous comme nous que cela devient très encombrant pour les grosses factures parce qu'il aura beaucoup trop de pièces ?*
  - *L'énoncé parle de pièces seulement, est-ce qu'il y aura aussi des billets ?*
  - *Est-ce qu'on aura aussi des chéquiers et des cartes bancaires, parce que s'il n'y a que des pièces, ça ne serait pas pratique, ça fera lourd dans les porte-monnaie.*

- Choix des problèmes que l'on va résoudre
  - *Serait-il possible d'utiliser des centimes ?*
  - *Comment rendre la monnaie ?*
  - *Peut-on faire tous les nombres ?*
    - *En rendant la monnaie ?*
    - *Sans rendre la monnaie ?*

- Entrée dans les mathématiques
  - *Peut-on trouver 1 ?*
  - *Pourquoi avoir choisi 9 et 11 ?*
  - *Y-a-t-il plusieurs façons de faire 19 ?*

Réactions aux questions

La deuxième séance met en sommeil dans un premier temps le travail déjà amorcé pour se consacrer uniquement aux interrogations des autres classes issues du même groupe.
Cependant, les préoccupations sont souvent très proches et le travail de chaque classe peut se poursuivre.

Voici le travail de la **6ème de Thuir** en réponse aux questions de la **5ème du Salagou** :

« 1)Etes-vous d'accord sur le fait qu'on puisse payer 1, 2, 3, 4, etc…c'est à dire toutes les factures « entières » avec uniquement des pièces de 9 et de 11 ?
Nous sommes d'accord avec vous. A partir du moment où l'on a 1, on peut tout avoir.
avec des pièces de 9 et 11 unités : 1 = (9 x 5) – (11 x 4)

Avec des pièces de 9 et 11 centimes
(9 + 11) + (9 + 11) + (9 + 11) + (9 + 11) + (9 + 11) = 100 centimes = 1 unité
2)Comment faites-vous pour des centimes ?
On prend des pièces de 9 et 11 centimes.
3)Pensez-vous comme nous que cela devient très encombrant pour les grosses factures parce qu'il y aura beaucoup trop de pièces ?
Très encombrant et complexe mais tout est possible.
4)Le groupe d'Anaïs dit que le système de monnaie est peut-être possible mais vraiment pas commode car il faudrait trop de pièces.
Entièrement d'accord.
5)Andoni demande : si je dois acheter quelque chose qui coûte 9 et que je n'ai qu'une pièce de 11 : on ne peut pas me rendre la monnaie donc le système n'est pas possible.
Avec des pièces de 9 et 11 centimes cela est possible. Par contre pour payer 9 centimes avec une pièce de 11 centimes c'est impossible.
En conclusion nous pensons que le système est possible mais qu'il faut toujours avoir beaucoup de pièces, donc très encombrant . »

A la fin de la deuxième séance, les classes, pour la plupart, pensent que le problème initial est résolu, mais commencent à se poser de nouvelles questions :
*« Les élèves de **5ème3 du Collège Du Salagou** adressent le bilan du débat qu'ils ont eu en prenant connaissance du travail des deux autres classes :*

1) *Ils pensent qu'il est inutile de parler d'euros et donc de centimes.*
2) *Ils sont convaincus qu'il faut utiliser que des nombres entiers*
3) *Ils disent que du moment qu'on peut atteindre 1 tout nombre entier peut alors être atteint en prenant des multiples « équivalents » .*
4) *Ils admettent qu'il faudra avoir beaucoup de ces pièces pour atteindre des grands nombres.*
5) *Ils ont remarqué que 2 peut être obtenu avec 18 pièces mais aussi avec seulement 2 pièces. Ils cherchent donc le minimum de pièces pour obtenir 1, 2, 3, 4, 5, etc…*
6) *Ils ont également constaté qu'en prenant que des pièces de 6 et de 4 à la place de 11 et de 9 ils ne pouvaient atteindre 1, ni 3, ni 5... mais seulement 2, 4, 6… Ils pensent donc que les nombres 11 et 9 n'ont pas été pris au hasard. »*

Relance

Les classes partant dans plusieurs directions, **une relance** destinée à tous paraît alors nécessaire pour que ces différentes classes puissent continuer à échanger sur des préoccupations communes.

Cette relance est faite par un enseignant-chercheur de la Faculté des Sciences de Montpellier qui travaille dans notre groupe de recherche.

Son rôle est important car il a une vue d'ensemble sur le travail effectué par les différentes classe.

Le problème : il s'agit donc de déterminer toutes les sommes possibles si on est autorisé à rendre la monnaie. Beaucoup d'entre vous ont trouvé que dans ce problème **n'importe quelle somme peut être réalisée.**

Des questions. Vous avez posé de nombreuses questions. Observez que certaines d'entre elles, mêmes si elles pouraient être importantes d'un point de vue pratique, n'ont aucune influence sur le problème mathématique. Par exemple : s'agit-il de francs ou d'euros ? Ou encore : peut-on utiliser des billets au lieu des pièces ? Quelle que soit la réponse, le problème mathématique restera exactement le même ! Ou encore : s'agit-il d'euros ou de centimes d'euros ? Il est évident que s'il s'agit de 9 et 11 euros, on ne pourra jamais obtenir des centimes, et donc la question est forcément de savoir quelles sommes en euros on peut obtenir. S'il s'agit de centimes d'euros, la question est de savoir quelles sommes en centimes d'euros on peut obtenir, et le problème est exactement le même ! Pouvez-vous trouver d'autres questions posées qui sont de la même nature ?

D'autres questions pourraient avoir un intérêt mathématique, mais posées ainsi elles sont trop vagues pour pouvoir être traitées mathématiquement. Par exemple : un tel système serait-il pratique ? Observez que ce sont des questions d'un type différent des précédentes. Pouvez-vous vous trouver d'autres questions posées qui sont de la même nature, c'est-à-dire qui ne sont pas du domaine des mathématiques (quel que soit leur intérêt) ?

•**Ce que vous pourriez faire.** Certains d'entre vous ont eu l'idée de prendre d'autres nombres que 9 et 11. Voilà une idée intéressante. Qu'est-ce qui change si on prend 5 et 10 (au lieu de 9 et 11) ? Ou bien si l'on prend 8 et 12 ? Ou bien 13 et 15 ?

Pouvez-vous donner un résultat général : comment choisir deux nombres pour pouvoir payer toutes les sommes possibles ?

Premières décisions et conjectures

Les classes ayant pris connaissance de la relance, réagissent aux propositions et poursuivent leur travail scientifique en proposant de nouvelles conjectures aux autres.

Nous trouvons ci-dessous les réactions de **la 5ème de Langevin Wallon**

« Nous avons pris connaissance des recherches des autres classes et nous avons essayé de travailler en essayant d'autres nombres que 9 et 11. En fait nous avons essayé d'obtenir 1.

Etes-vous d'accord pour dire qu'avec 8 et 12 cela ne marche pas ?

Nous proposons de choisir des nombres impairs qui ne sont pas dans la même table. Que pensez-vous de ce choix ? »

<u>Conjectures des 3ème 1 du collège de Saint-Mathieu</u>

comment choisir deux nombres pour pouvoir payer toutes les sommes possibles ?

c1
2 nombres impairs avec 2 de différence
c2
avec 2 nombres impairs, on peut payer toutes les sommes

c3
il faut pas qu'un nombre soit le double de l'autre
c4
possible si le PGCD des 2 nombres est 1 (nombres premiers entre eux)

Débats scientifiques et contre-exemples

Des moments de débat scientifique sont alors organisés dans les classes, afin d'invalider certaines conjectures ou d'essayer d'apporter une preuve.
*« En réponse **aux collèges Langevin Wallon et Pierre Moréto**, les élèves de **la 5ème3 du collège du Salagou :***

- *Sont d'accord sur le fait qu'une fois qu'on obtient 1, le problème est possible*
- *Pour obtenir 1, ils sont tombés d'accord pour écrire les tables respectives de chacun des nombres et de rechercher quand l'écart était de 1.*
- *Pensent qu'avec 2 pairs ça ne marche pas mais n'arrivent pas à le prouver indéfiniment.*
- *1 et n'importe quel autre nombre ça marche toujours étant donné que les multiples de 1 forment tous les nombres possibles sans que l'autre nombre joue un rôle.*
- *Ont répertorié des cas où ça marche : 3 et 5 ; 3 et 7 ; 9 et 11 ; 5 et 7 ; 5 et 11…*

- *Ont répertorié des cas où ça ne marche pas : 4 et 6 ; 21 et 7 ; 3 et 15 ;…sans pouvoir vraiment dire que ce sera pas possible à un moment. Ils pensent que pour l'expliquer il va falloir utiliser leurs multiples.*

En fin de séance, nous cédons au découragement car une explication générale nous paraît trop compliquée face à tous les cas à étudier. Pourriez-vous nous sortir de cet enlisement… ? pourrions-nous conclure ensemble ? »

la 4ème A du collège de Jacou a mené elle aussi un débat sur l'une des conjectures proposées :

Nous avons fait un débat en classe sur la conjecture :

***Pour avoir toutes les sommes il faut que** :*

Les deux nombres soient impairs et que leur écart soit de 2

Nous avons étudié plusieurs exemples :
Couples qui conviennent : 7 et 9

Couples qui ne conviennent pas : 12 et 10
27 et 25
19 et 17
10 et 13
3 et 5
29 et 31
5 et 7

Nous sommes arrivés à la conclusion suivante :

- Si les 2 nombres sont impairs et ont un écart de 2 ça marche toujours *car on peut toujours trouver 1 car nous avons remarqué que : pour 3 et 5 on a $2\times5 - 3\times3 = 1$*

pour 5 et 7 on a $3\times7 - 4\times5 = 1$
pour 7 et 9 on a $4\times9 - 5\times7 = 1$

on peut continuer ainsi avec des nombres impairs qui ont 2 d'écart on augmente de 1 chaque fois les facteurs

- On n'est pas obligé d'avoir cette condition *nous avons les contre-exemples :*
- 10 et 13 où l'écart est de 3 et un des deux nombre est impair
- 9 et 5 où l'écart est de 4

Que pensez vous de nos conclusions ? Nous continuerons nos recherches mardi 20 Janvier
A bientôt

A l'occasion de ce travail sur les conjectures, il peut alors apparaître la nécessité d'inventer de nouvelles définitions communes à l'ensemble des chercheurs pour que les conjectures restent valides.

Les élèves du **collège du Salagou** rajoutent les remarques suivantes :

« La formulation de Wallon : des nombres impairs qui ne sont pas dans la même table a soulevé de nombreuses interrogations sur son véritable sens. Les 5ème3 pensent qu'elle devrait être reformulée de façon à être plus précise (laquelle table ?) »

Ces interrogations vont permettre de donner un statut moins artificiel aux définitions données en cours de mathématique.

Clôture du problème

Au bout de deux mois, il est alors essentiel de clôturer le problème. Les élèves et leurs enseignants ont besoin de faire le point sur ce qui a été démontré, sur les nouvelles connaissances rencontrées sur les questions qui restent encore en suspens.

Les enseignants doivent sentir qu'ils n'ont pas « perdu leur temps » par rapport au programme, et que les élèves ont acquis des connaissances qu'ils pourront réinvestir.
Le chercheur propose donc un texte que chaque enseignant va utiliser à sa guise en prenant ce qui correspond au travail de sa classe.

Voici la clôture du problème de la monnaie. Vous y trouverez un bilan global sur l'ensemble de vos recherches, des réponses à certaines questions que vous vous êtes posées, et des prolongements possibles.

1.LE PROBLEME

Depuis la première relance, le problème s'est stabilisé : il n'y a plus trop de références aux euros ou aux centimes d'euros, à savoir si on pourrait utiliser des billets, ou aux différents pays qui participeraient à l'opération, etc. Vous cherchez un problème plus abstrait, plus mathématique, que celui posé au départ. Cela n'empêche pas d'être amené à se poser des questions inspirées par le contexte concret de l'énoncé initial- et c'est très bien comme ça. Par exemple : ce système va être lourd, beaucoup de pièces seront nécessaires, peut-on avoir une idée du nombre minimum de pièces nécessaires pour réaliser telle ou telle somme ?

2.LES RESULTATS

Vous avez tous observé qu'il y a des cas où on peut faire toutes les sommes (en rendant la monnaie), par exemple 9 et 11, et qu'il y a aussi des cas où on ne peut pas faire toutes les sommes, par exemple 6 et 9.

Comment prouver qu'on peut réaliser toutes les sommes ? Vous avez eu la très bonne idée de remarquer que si on peut faire 1, alors on peut tout faire. Cela vient du fait que 1 « engendre » tous les nombres par l'addition.

Sur un exemple concret il est alors possible de montrer explicitement que l'on peut faire 1. Par exemple avec 9 et 11, on a

$$1 = 5 \times 9 - 4 \times 11$$

c'est à dire que nous donnons 5 pièces de 9 et qu'on nous rend 4 pièces de 11. remarquez d'ailleurs que cela prouve du même coup qu'on peut réaliser 1 avec 5 et 11, ou encore avec 5 et 4, ou encore avec 9 et 4 !

Il reste des questions : y a-t-il plusieurs solutions possibles ? Y a-t-il une formule pratique pour réaliser 1 si on donne deux nombres différents de 9 et 11 ? Y a-t-il une manière de faire 1 qui demande le moins de pièces possibles, et si oui laquelle et avec combien de pièces ?

Une fois qu'on a fait 1, on sait faire les autres sommes en multipliant le nombre de pièces utilisées, par exemple

$$10 = 50 \times 9 - 40 \times 11$$

Mais quand on a fait 10 comme cela, ce n'est pas très économique ! Cela nous demande 50 + 40 = 90 pièces, or on peut aussi dire que 10 c'est 11 moins 1, et que 11 est un pièce et qu'on sait faire 1 avec 5 + 4 = 9 pièces.

Cela nous amène aux mêmes questions que pour faire 1 : y a-t-il une manière de faire une somme quelconque qui demande le moins de pièces possibles, et si oui laquelle ?

Comment prouver qu'on ne peut pas réaliser toutes les sommes ? La question semble plus difficile, parce que nous ne pourrons jamais faire toutes les combinaisons possibles de 9 et de 11 – il y en a une infinité ! Il nous faut donc trouver un raisonement qui nous permette de conclure…et vous l'avez bien trouvé : dans votre langage, vous dites *« si les deux nombres sont dans la même table, alors on ne pourra pas tout réaliser »*. Par exemple, 6 et 9 sont tous les deux dans la table de 3 ; et toutes les combinaisons possibles de 6 et de 9 seront elles-mêmes toujours dans la table de 3.

Que signifie « être dans la même table » ? Naturellement, si on prend cela au sens strict, alors tous les nombres sont dans la table …de 1 ! On a donc envie de dire : si les deux nombres sont dans une même table autre que la table de 1, alors on ne peut pas réaliser toutes les sommes. En effet : si les nombres sont « dans la même table », cela signifie qu'ils apparaissent tous les deux dans la table de multiplication d'un même nombre, autrement dit qu'ils sont tous les deux multiples de ce nombre. Ce qui se dit encore : ils ont un diviseur commun (autre que 1). Mais dans ce cas, comme vous l'avez bien remarqué pour beaucoup d'entre vous, cela implique que toutes les sommes seront elles-mêmes divisibles par ce même nombre.

Quels sont les nombres qui permettent de réaliser toutes les sommes ?

Vous avez essayé de donner des conditions pour dire « si les deux nombres vérifient ceci ou cela, alors on peut réaliser toutes les sommes ». Par exemple :

- Des nombres successifs, par ex, 20 et 21 : dans ce cas il est clair qu'on obtient tout de suite 1 en soustrayant le plus petit du plus grand
- Deux nombres impairs successifs, c'est à dire à une distance de 2, par exemple 13 et 15 : dans ce cas on obtient tout de suite 2, et en prenant un des deux nombres impairs et en enlevant suffisamment de fois 2, on tombe sur 1
- Si on prend deux pairs, ça ne marche pas car les sommes seront toujours des nombres pairs
- Un pair et un impair : parfois ça marche, par exemple 10 et 11, mais parfois non, par exemple 10 et 15 (ils sont dans la table de 5)
- De même, un impair et un pair qui n'est pas multiple de l'impair ne marche pas toujours (10 et 15)
- Un nombre n et l'autre 2n + 1, par exemple 5 et 16 = 3 x 5 + 1

Certains d'entre vous ont eu l'idée (correcte) que la bonne condition, c'est à dire la condition la plus générale, est de demander aux nombres de ne pas être dans la même table…

Si les nombres ne sont pas « dans la même table ». Cela signifie qu'il n'existe pas un autre nombre dans la table duquel ils apparaissent, autrement dit qu'ils ne sont pas multiples d'un même nombre. Ce qui se dit encore : ils n'ont pas de diviseur commun. Sauf qu'il existe un nombre qui divise toujours, c'est 1. Mais comme il divise toujours, il n'est pas très intéressant pour la multiplication ou la division. On dira alors : **les deux nombres n'ont pas de diviseur commun autre que 1,** ou encore que les deux nombres sont **premiers entre eux.** Dans ce cas, on peut montrer qu'il est effectivement possible de construire le nombre 1, mais c'est plus difficile : c'est le **théorème de Bezout.**

Comment trouver toutes les solutions ? Sur notre exemple : on sait que

$$1 = 5 \times 9 - 4 \times 11$$

mais on a aussi

$$1 = 16 \times 9 - 13 \times 11$$

ou encore

$$1 = -8 \times 9 + 5 \times 11$$

La première solution est meilleure que les deux autres, puisqu'elle nous fait utiliser 5 + 4 = 9 pièces, au lieu de 16 + 13 = 29 ou 8 + 5 = 13 pièces. Peut-on faire mieux ? On sent bien que non…mais comment le dire ?

De manière générale, le théorème de Bezout nous dit que si deux nombres, disons a et b, ne sont pas dans la même table, alors il existe deux autres entiers u et v tels que

$$au + bv = 1$$

En existe-t-il d'autres ? Beaucoup d'autres ? Il est facile de voir que oui : si u et v conviennent, alors u + b et v – a conviennent aussi, puisqu'alors :
$a(u + b) + b(v – a) = au + ab + bv – ba = (au + bv) + (ab – ba) = 1 – 0 = 1$
De même, u + 2b et v – 2a conviennt, ainsi que u + 3b et v – 3a, u + 4b et v – 4a, etc…de même que u – b et v + a, u – 2b et v + 2a etc…
Il y a donc une infinité de solutions u et v ! On peut montrer que ce sont là toutes les solutions, qu'il n'y en a pas d'autres.

Quelle est la solution la plus économique ? Pour l'instant, on cherche la solution la plus économique pour faire 1.
Pour faire 1 avec des pièces de valeur a et de valeur b, il faut faire 1 = au + bv. Sauf si a = 1 ou b = 1, ce qu'on exclut, il faut donner des pièces et en rendre. Autrement dit, u et v ne sont pas tous les deux positifs…
Essayons d'abord de voir ce qui se passe si on donne des pièces de valeur a et si on rend des pièces de valeur b. On peut montrer que, parmi toutes ces solutions, il y en a une et une seule qui vérifie

$$0 \prec u \prec b \text{ et } -a \prec v \prec 0$$

(on donne u pièces de monnaie de la valeur a, et on rend –v pièces de valeur b).
Dans ce cas, le nombre de pièces échangées est u – v, qui est donc inférieur ou égal à a + b – 2.
Dans notre problème initial, on a vu que 9 pièces suffisaient. On a effectivement

$$9 \prec 9 + 11 = 18.$$

Pouvez-vous trouver un exemple où il faut a + b – 2 pièces pour faire 1 ? Et que peut-on dire sur la manière la plus économique de faire une autre somme que 1 ?

Et si on ne rend plus la monnaie ? Voici une variante du problème que vous avez étudié : maintenant on ne s'autorise plus à rendre la monnaie. Toujours avec 9 et 11, on peut donc faire certaines sommes mais évidemment pas toutes : on peut faire 9, 11, 18 = 9 + 9, 20 = 9 + 11, etc…mais on ne peut pas faire 1, 2, 3, …, 8, 10, 12, etc…
Cependant, si on fait la liste par ordre croissant de toutes les sommes possibles par cette méthode, on voit quelque chose de surprenant. Dans le groupe 3, la classe de 6ème11 du collège de Thuir a ainsi remarqué qu'on ne peut pas obtenir 79, mais qu'à partir de 80 toutes les sommes sont possibles !
Est-ce un hasard ? Pouvait-on le prévoir à l'avance ?Aurait-on le même phénomène en prenant d'autres nombres que 9 et 11, par exemple 11 et 13, ou 5 et 6, ou autre chose encore ? Voici un prolongement possible, et fort intéressant, à votre recherche !