Un jeu de dominos : éléments de solution

Ce jeu est connu en langue anglaise sous les noms de *Domineering* et *Cram*.

Caractéristique du jeu :

- les parties sont finies, c'est à dire se terminent toujours au bout d'un nombre fini de coups (aux échecs, par exemple, il serait possible d'avoir une partie infinie si chaque adversaire faisait alternativement des allers-retours avec une même pièce ; mais la règle de nulle par répétition de coups empêche ceci d'arriver...)
- il ne peut y avoir de partie nulle (au contraire du morpion ou des échecs);
- l'information est totale pour les deux joueurs (au contraire de la bataille navale);
- il n'y a pas de hasard (au contraire du backgammon).

Dans ces conditions, il est relativement facile de montrer que l'un des deux joueurs doit posséder une stratégie gagnante (l'argument est cependant très abstrait).

La notion de stratégie gagnante. Dire que l'un des deux joueurs possède une stratégie gagnante, c'est dire qu'il a la possibilité de gagner quels que soient les coups de son adversaire. Une telle stratégie peut se présenter sous la forme d'une règle, qui dit précisément quels coups jouer.

Par exemple, une stratégie gagnante pour le joueur en premier (appelons-le désormais A, et B le joueur en second) pourrait être de lui proposer de jouer un premier coup A1 ; le joueur B a alors à sa disposition un certain nombre de réponses possibles ; à chaque réponse B1 du joueur en second, la stratégie gagnante de A lui propose une réponse A2, de sorte qu'à chaque second coup B2 du joueur en second il existe à nouveau une réponse A3, etc... de sorte que A gagne dans tous les cas. Une définition mathématique de la notion de stratégie gagnante pour le joueur en premier s'énoncerait ainsi avec des quantificateurs : “il existe A1 tel que, quel que soit B1, il existe A2 tel que, quel que soit B2, il existe A3 etc... de sorte qu'à la fin A gagne”. Une définition de la notion de stratégie gagnante pour le joueur en second s'énoncerait de même : “Quel que soit A1 il existe B1 tel que, quel que soit A2, il existe B2 tel que quel que soit A3 il existe B3, etc... de sorte qu'à la fin B gagne”. Remarquons que la formalisation mathématique n'est pas terminée, puisque l'expression “etc... de sorte qu'à la fin A [ou B] gagne” n'est pas suffisamment précise.

Il est important de distinguer l'expression “le joueur en premier possède une stratégie gagnante” de “le joueur en premier gagne dans toutes les parties”, cette dernière expression pouvant se formaliser, dans la même veine que ci-dessus, sous la forme suivante : “Quel que soit A1, quel que soit B1, quel que soit A2, quel que soit B2, quel que soit A3, etc... alors A gagne”. On voit que les quantificateurs ont changé, et que l'expression “le joueur en premier gagne dans toutes les parties” est en général beaucoup plus forte que “le joueur en premier possède une stratégie gagnante”.

Analyse du jeu sur les plateaux 2 fois n.

- si n est impair, le joueur en premier gagne (ie possède une stratégie gagnante) ;
- si n est pair, c'est le joueur en second qui gagne.

Il est facile de voir que les deux énoncés sont liés de la façon suivante : le second implique le premier. En effet, supposons que si n est pair le joueur en second gagne, et plaçons-nous comme joueur en premier sur un plateau 2xn avec n impair. Il suffit de placer notre premier domino verticalement à une extrémité du plateau, pour se retrouver comme joueur en second dans le cas 2x(n-1) avec n-1 pair, et donc d'avoir une stratégie gagnante conformément à l'hypothèse. Observons qu'il s'agit d'un raisonnement *abstrait*, très intéressant du point de vue mathématique : l'implication d'un énoncé vers un autre. La démonstration ne nous apprend rien sur la nature d'une

stratégie gagnante.

On peut également montrer directement que le joueur en premier a une stratégie gagnante si n est impair : il lui suffit de jouer son premier coup verticalement au centre du plateau, divisant ainsi le plateau en deux parties identiques, et ensuite de copier dans l'autre partie chaque coup de son adversaire.

Il existe aussi une stratégie simple pour le joueur en second si n est pair : si son adversaire joue verticalement, il répond lui aussi verticalement (n'importe où) ; si son adversaire joue horizontalement, il répond lui aussi horizontalement juste au-dessus ou en dessous du coup de son adversaire. L'inconvénient de cette stratégie est qu'elle ne se généralisera pas à des plateaux de plus grande taille. Une stratégie par symétrie est plus intéressante : elle consiste pour le joueur en second à répondre à chaque coup du joueur en premier par un coup symétrique par une symétrie centrale.

La version “qui perd gagne” s'analyse de la même manière. Les conclusions sont inversées : si n est pair le joueur en premier gagne, si n est impair le joueur en second gagne. Cela étant, il ne s'agit pas d'une conclusion générale qui s'appliquerait à la version “négative” de tous les jeux. L'analyse du jeu sur un plateau 1x4 le montre bien : le joueur en premier gagne dans les deux versions du jeu.

Sur des plateaux de taille différente. Il est facile de montrer par des arguments de symétrie analogues aux précédents que :

- le joueur en second gagne sur un plateau mxn lorsque m et n sont pairs,
- le joueur en premier gagne si l'un est pair et l'autre est impair.

En revanche, l'étude du cas impair fois impair est très difficile ou du moins pas aussi immédiate. En particulier, le cas 1 fois impair est instructif.

Mots-clé.

- En anglais : cram, domineering, crosscram, impartial game theory.