Un problème de coloriage : éléments de solution

La variante simple.

On résout ici la version faible du problème : deux régions qui se touchent en un point seulement peuvent recevoir la même couleur.

Dans ce cas deux couleurs suffisent. On peut démontrer ce résultat par récurrence sur le nombre de droites qui sont tracées, en montrant comment on peut modifier un coloriage déjà construit à chaque fois qu'on ajoute une nouvelle droite.

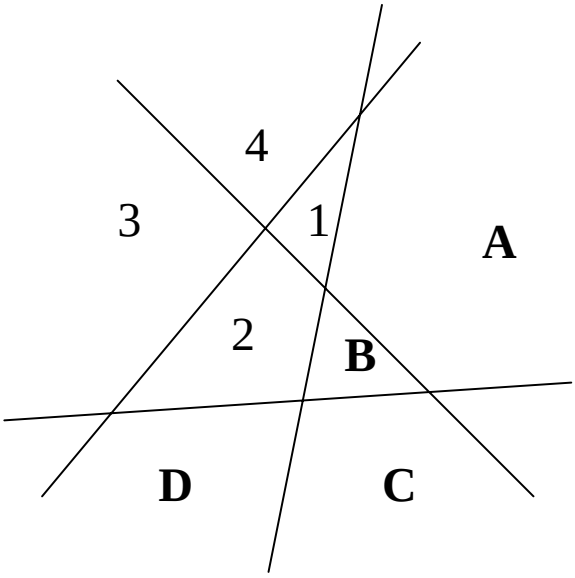
- S'il n'y a qu'une seule droite, il n'y a que deux régions et alors deux couleurs suffisent bien.

- Supposons maintenant que le résultat est vrai pour n-1 droites, où n est un entier supérieur ou égal à 2. On se donne n droites, et on veut montrer que deux couleurs suffisent. Choisissons une de ces droites, et mettons-la de côté pour l'instant... On commence donc par tracer les n-1 autres. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut colorier le dessin obtenu avec deux couleurs seulement.
  On superpose maintenant la dernière droite à ce coloriage. On obtient un mauvais coloriage: si la nouvelle droite passe à travers une région déjà coloriée, on obtient deux régions de même couleur séparées par un segment de la nouvelle droite.
  La nouvelle droite sépare le plan en deux demi-plans ; on décide que sur l'un des demi-plans on laisse les couleurs telles qu'elles sont, et que sur l'autre on les échange. On affirme qu'on a alors un coloriage correct du dessin avec les n droites.
  En effet, soient R et R' deux régions du dessin final qui ont une frontière commune. Cette frontière est un segment de droite... de quelle droite ? Si c'est de l'une des n-1 premières droites, alors R et R' sont dans le même demi-espace, et donc elles ont des couleurs différentes (soit parce qu'elles sont du côté où rien n'a été changé, soit parce qu'elles sont du côté où les couleurs ont été échangées). Si leur frontière commune est un morceau de la dernière droite, c'est que R et R' sont les deux nouvelles régions issues d'une même région du coloriage avec les n-1 premières droites. Avant le re-coloriage, elles étaient donc de même couleur; après re-coloriage, elles sont donc de couleurs différentes. On a ainsi réussi à re-colorier le dessin après avoir ajouté une nouvelle droite.

L'affirmation que deux couleurs suffisent est ainsi démontrée par récurrence sur le nombre de droites.

La variante où les points sont frontière.

Il n'est pas difficile d'obtenir une situation où 5 couleurs sont nécessaires. Sur le dessin ci-dessous, les régions 1, 2, 3 et 4 doivent recevoir quatre couleurs distinctes, que l'on peut appeler 1, 2, 3 et 4 respectivement. La région A ne peut recevoir les couleurs 1, 2, 4 ; si l'on veut colorier avec quatre couleurs, elle doit donc recevoir la couleur 3 ; la région B doit alors recevoir la couleur 4 ; la région C la couleur 1 ; la région D est alors contiguë à des régions portant les couleurs 1, 2, 3 et 4 : elle doit ainsi recevoir une cinquième couleur.



5 couleurs sont ici nécessaires

On peut démontrer que 6 couleurs suffisent dans tous les cas, par un argument de “balayage”. On considère une droite supplémentaire auxiliaire à toutes les droites de la configuration, que l'on peut supposer horizontale quitte à faire une rotation de la figure. On demande à cette droite auxiliaire d'être transverse à toutes les droites de la configuration (ie elle intersecte chaque droite de la famille en un point exactement) ; on demande de plus qu'aucune de ses parallèles ne passe par deux (ou plus) points d'intersection entre les droites de la configuration. On voit que ces deux conditions n'interdisent qu'un nombre *fini* de directions, et qu'il existe donc bien une telle droite auxiliaire.
On suppose que la droite est initialement suffisamment basse pour que tous les points d'intersection de la figure soient situés au-dessus. On colorie alors les régions situées en-dessous de la droite, avec la règle suivante : trois régions consécutives doivent porter des couleurs différentes. On déplace ensuite cette droite suivant les horizontales, de bas en haut. A chaque fois que la droite passe par un point d'intersection, et le choix de la droite auxiliaire assure que ces points sont traversés un par un, une nouvelle région à colorier apparaît. Dès lors que 6 couleurs sont disponibles, on peut colorier cette nouvelle région et respecter la règle de coloriage de trois couleurs consécutives. Après balayage complet, toutes les régions ont été coloriées.
Il est conjecturé que 5 couleurs suffisent dans tous les cas.

Figure 1

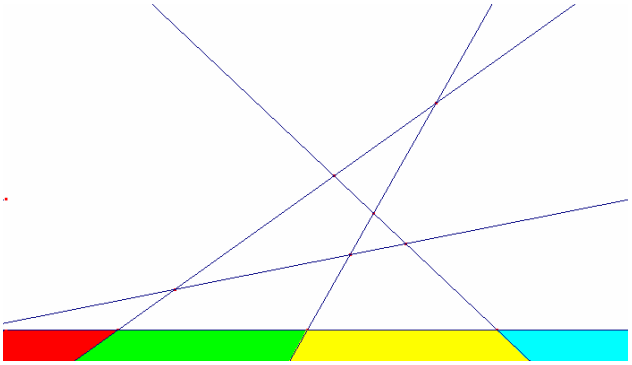


Figure 2

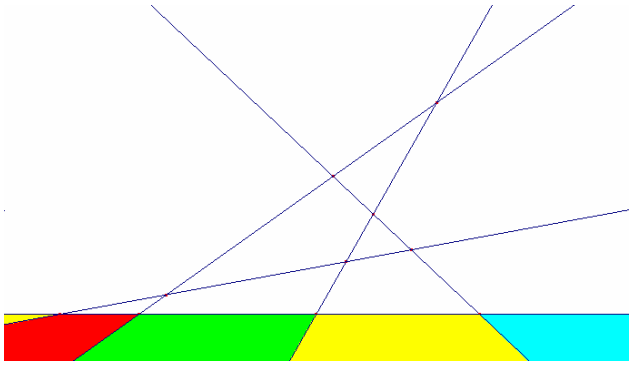


Figure 3

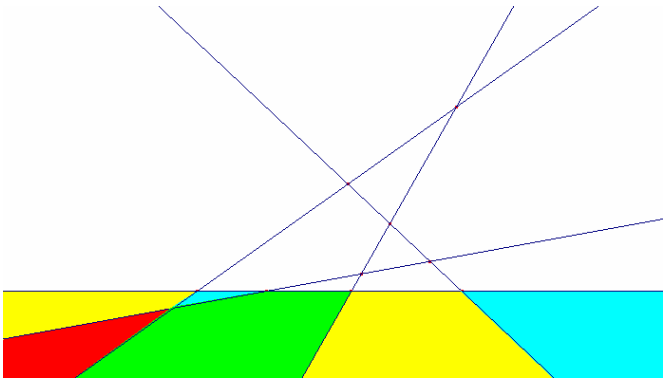


Figure 4

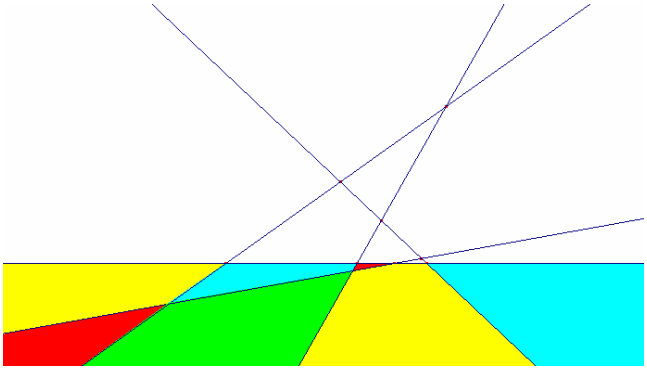


Figure 5

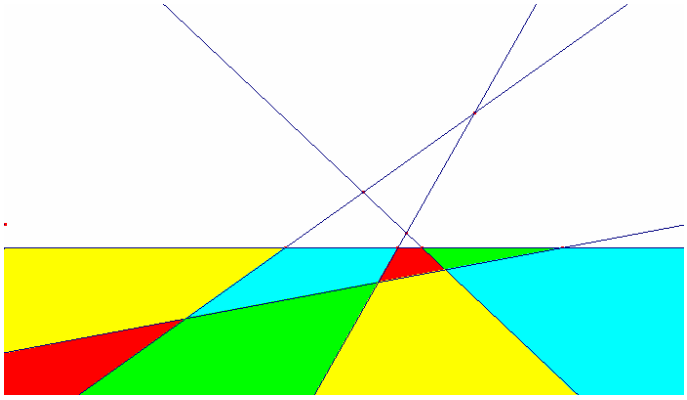


Figure 6

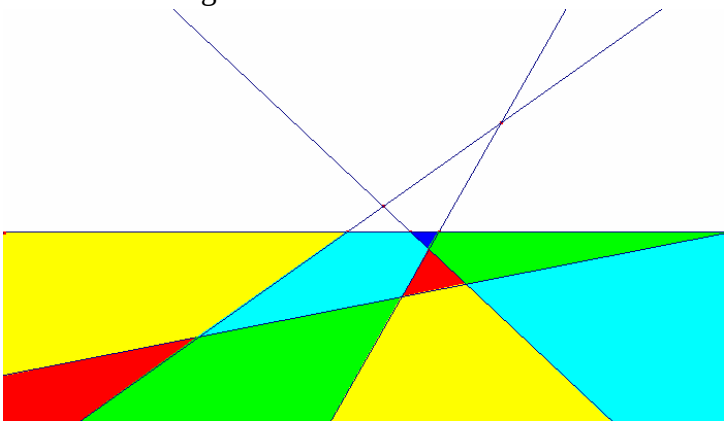


Figure 7

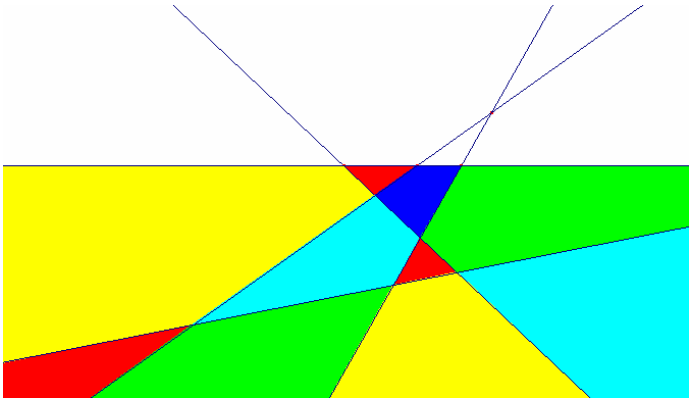
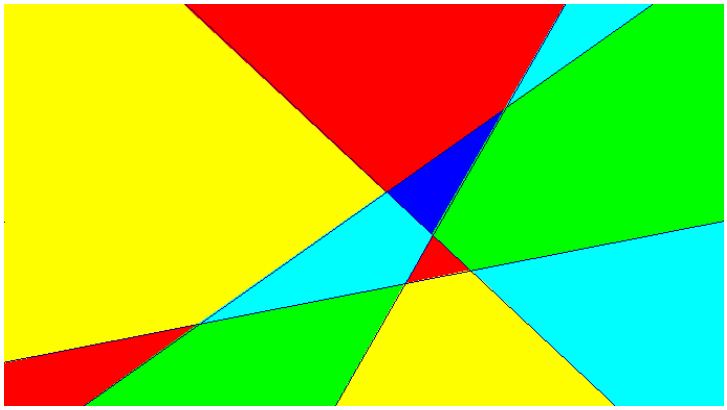



Figure 8