Un problème de coloriage : éléments de recherche

L'énoncé est délibérément vague sur les notions de *région* et de *frontière commune*.

Certains élèves soulèvent le problème des régions “infinies”, c'est à dire non bornées, en se demandant si elles doivent être coloriées ou non ; comment, en effet, les colorier dans la pratique ? La plupart des élèves les considèrent néanmoins comme des régions à colorier. Le problème de l'infini peut aussi se poser sur les dessins avant coloriage : les droites sont-elles infinies, et si oui comment peut-on représenter cet infini sur un dessin ? Et, de manière encore plus cruciale, le plan lui-même est-il infini ?

Le problème des frontières communes est assez délicat, car il mène à deux interprétations différentes du problème, qui admettent des réponses également différentes. Une grande majorité des élèves se pose à un moment ou à un autre la question de savoir si les frontières sont nécessairement des segments, des demi-droites ou des droites, ou bien si un *point* peut être lui aussi considéré comme frontière. Les deux interprétations sont intéressantes ; la première recueille en général plus d'adhésion que la seconde, plus minoritaire. Pour soutenir celle-ci, on peut évoquer la réalisation pratique et l'intérêt d'un coloriage d'une carte géographique ; il est probablement souhaitable que des régions se touchant par un point (même s'il s'agit d'un idéal mathématique) reçoivent des couleurs distinctes : la réalisation pratique du coloriage peut être de mauvaise qualité (les couleurs bavent), et la mauvaise vue du lecteur peut l'empêcher de bien distinguer les régions.

Laquelle des deux variantes étudier ? Le choix peut se faire en fonction de multiples paramètres : intérêt, difficulté, cas particulier ou généralisation, etc... Ici, la variante où les points ne sont pas frontière est beaucoup plus simple : on devine rapidement sur les dessins que 2 couleurs suffisent, et la démonstration en est relativement simple.

Le cas où les points sont frontières est plus compliqué, et est pour cette raison perçu comme plus intéressant par certains élèves. On voit rapidement que si n droites sont concourantes alors 2n couleurs sont nécessaires (et peut-être pas suffisantes). Si l'on souhaite arriver à un nombre de couleurs qui ne dépende pas du nombre de droites, une hypothèse simple et souvent formulée par les élèves est de demander que les droites soient en « position générale » au sens où trois quelconques d'entre elles ne se coupent pas en un même point. On peut alors montrer facilement (sur un dessin explicite) que 5 couleurs sont parfois nécessaires, et on peut prouver que 6 couleurs suffisent dans tous les cas. Nous ne savons pas, pour le moment, si 5 couleurs suffisent dans tous les cas, même si cela paraît être une conjecture plausible.

Remarquons également que le problème fait travailler les notions “nécessaire” et “suffisant”. La question telle qu'elle est posée ici, “de combien de couleurs *faut-il* disposer... ?”, renvoie au nécessaire. Interprétée à la lettre et mathématiquement, elle pourrait admettre la réponse : “il faut une couleur (au moins)” ! Et effectivement, s'il n'y a pas de droite une couleur suffit. On s'intéresse évidemment davantage au suffisant et au général : peut-on majorer le nombre de couleurs qui permettront de colorier dans tous les cas ?