SFODEM	Le problème de carrelage Sommaire	

- Fiche d'identification
- Fiche professeur
- Fiche élève
- Scénarios d'usage
- Productions d'élève
- Comptes-rendus d'expérimentation :
    - Premières approches - question de la 6ième du collège de la Providence

- Suivi des travaux de recherche de la 5ième du collège de Clermont l'Hérault

- Démonstration algébrique sur la parité d'un produit

- Relance du chercheur à toutes les classes

- Echanges questions – réponses

- Analyse du problème

  - Conjectures élèves

  - Solutions partielles

- Fiche technique

SFODEM	Le problème de carrelage Fiche d'identification	

Type :	Résolution d'un problème
Niveau :	Collège 6ième - 5ème - 4ème - 3ème . Lycée - 2nde
Mots-clés :	aire – rectangle - pavage - suite de Fibonacci - dénombrement - parité - démarche scientifique - problème ouvert - narration de recherche - communication à distance - travail collaboratif.
Objectifs pédagogiques Généraux :	• savoir organiser une recherche et communiquer ses résultats • travailler une démarche scientifique : émettre des conjectures, les démontrer ou donner des contre-exemples
Modalité :	Narration de recherche et débat scientifique. Recherche individuelle ou en groupe. Travail collaboratif à distance
Dispositif technique :	Système de rétroprojection
Liste et description des fichiers :	
Description activité :	• Ecriture de la narration de recherche et/ou recherche en groupe. • Débat scientifique dans la classe sur les différentes stratégies et conjectures. Communication aux différentes classes participant à la recherche.

Auteurs

NOM	etablissement	ville	classe
BERSOT Georges	Clg Florian	Anduze	4
CAVALIER Anne Marie	Clg du Sallagou	St Mathieu de Trévie	5 ou 4
CAZALET Claude	Clg du Sallagou	Clermont l'Hérault	6
COMBES M. Claire	Clg F Villon	St Gely	3
DISCHLER Claude	Lycée Daudet	Nimes	2
DRAY Liliane	Clg La Providence	Montpellier	6
PAGES Michel	Clg du Sallagou	Clermont l'Hérault	5
PERTUS Fernand	Lycée Mermoz	Beziers	1er BAC PRO
SAUMADE Henri	Clg P Lamour	La Grande Motte	3
SAUTER Mireille	Clg P Mendes France	Jacou	4
THERET David	Fac de sciences	Montpellier	

SFODEM	Le problème de carrelage Fiche Professeur	

Programme officiel	***Collège :*** **6ième , 5ième** : mesures et comparaison d'aires, pavages, aire du rectangle, symétrie axiale et centrale **4ième , 3ième :** utilisation du calcul littéral pour la résolution de problème, rotation, translation ***Lycée :*** - proposer aux élèves des problèmes utilisant pleinement les acquis de connaissances et de méthodes faits au collège. - aborder la notion de suites numériques.
Objectifs pédagogiques	- savoir organiser une recherche et communiquer ses résultats - travailler une démarche scientifique : émettre des conjectures, les démontrer ou donner des contre-exemples - élaborer des stratégies de dénombrements
Pré-requis	Savoir calculer des aires de rectangles
Description de l'activité instrumentée	La recherche de ce problème ouvert peut être organisée dans les classes suivant plusieurs scénarios, mais d'une manière générale on trouve les différentes phases suivantes qui s'alternent : - Phase de recherche individuelle (**narration de recherche**) ou en groupe (**problème ouvert de Lyon**) ; elle permet une première approche expérimentale du problème (dessins de rectangles, divers pavages) et rapidement on voit une prise de conscience, chez les élèves, de l'importance pour les rectangles étudiés de la parité de l'aire et des dimensions ; il s'en suit une étude sur divers pavages. - Mise en commun, travail de synthèse et préparation des travaux à communiquer aux autres classes. - Moment de débat scientifique sur les différentes conjectures émises par les élèves de la classe ou par les autres classes, en particulier travail sur la notion de contre-exemple et démonstration algébrique concernant la parité de produits de nombres entiers. - Rédactions des réponses aux autres classes. - Reprises des recherches en groupe, fréquemment la recherche s'organise autour de l'étude des pavages de rectangles 1x 2n ; 2 x n ; 3 x 2n, ces recherches sont plus ou moins poussées suivant le niveau de la classe. Prolongement Le problème sur la suite de Fibonacci est souvent donné en narration de recherche

Accès au sommaire Accès à la liste des scénarios

SFODEM	Le problème de carrelage Fiche élève	

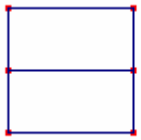
ENONCE INITIAL :

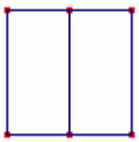
Problème de carrelage

On veut carreler une forme rectangulaire de largeur m et de longueur n (multiples entiers d'une même unité de longueur) avec des carreaux blancs et identiques de largeur 1 et de longueur 2.
Est-ce possible ?
Et si oui, de combien de manières différentes peut-on le faire ?

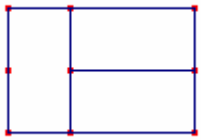
Voici différents exemples de pavages.

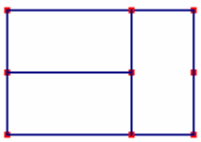
Exemples de pavages pour m = n = 2





Exemples de pavages pour m = 2 et n = 3





PROBLEME ANNEXE :

Les lapins de Fibonacci

Possédant au départ un couple de lapins , combien de couples de lapins obtient-on en douze mois si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence ?

SFODEM	Le problème de carrelage Fiche sénario	

Organisation du travail intégrant la communication

Durant la journée en présentiel, qui a précédé la recherche du problème avec les classes, les stagiaires et les tuteurs ont organisé le travail de la façon suivante :

- Constitution de 4 groupes d'échanges, chaque groupe est formés de 4 ou 5 classes avec un tuteur.
- Calendrier :

1ère semaine : recherches et envoi des questions aux autres classes.
2ème semaine : recherches sur les questions des autres classes et envoi des réponses. En fin de semaine, relance du chercheur associé.
3ème et 4ème semaines : poursuite des recherches avec examen des conjectures, (démonstration, invalidation) et poursuite des échanges.

Scénario1:

Séance	Phase	Acteur	Description de la tâche	Situation	Durée
1ère séance	1	Elève	Présentation et recherche	Individuelle	20 min
	2	Elève	Recherche	Groupe	20 min
	3	Elève	Narration de recherche	Maison	
2ème séance	4	Elève	Bilan des réponses et nouvelle recherche sur les rectangles de largeur 1 et 2	Groupe	40 min
	5	Elève	Nouvelle narration de recherche sur les rectangles (2; n) et (3; 2n)	Maison	
3ème séance	6	Elève et enseignant	Bilan des différentes réponses et présentation de solutions pour la largeur 3	Classe entière	55 min
	7	Elève	Travail sur les lapins (puissances et suite de Fibonacci)	Maison	

Scénario 2 :

Séance	Phase	Acteur	Description de la tâche	Situation	Durée
1ère séance	1	Elève et enseignant	Présentation du travail	Classe entière	5 min
	2	Elève	Recherche	Individuelle	20 min
	3	Elève	Débat	Groupe	20 min
	4	Elève et enseignant	Travail collectif	Classe entière	5 min
2ème séance	5	Elève et enseignant	Présentation du travail	Classe entière	5 min
	6	Elève	Recherche	Individuelle	20 min
	7	Elève	Débat	Groupe	20 min
	8	Elève et enseignant	Travail collectif	Classe entière	5 min
3ème séance	9	Elève et enseignant	Présentation du travail	Classe entière	5 min
	10	Elève	Recherche	Individuelle	20 min
	11	Elève	Débat	Groupe	20 min
	12	Elève et enseignant	Travail collectif	Classe entière	5 min
4ème séance	13	Elève et enseignant	Présentation du travail à faire sous forme de narration de recherche	Maison	30 min

Scénario 3:

Séance	Phase	Acteur	Description de la tâche	Situation	Durée
1ère séance	1	Elève et enseignant	Lecture et explication de l'énoncé	Classe entière	10 min
	2	Elève	Recherche	Individuelle	10 min
	3	Elève	Recherche de questions et de conjectures	Groupe de 4	20 min
	4	Elève et enseignant	Choix des questions et conjectures à envoyer	Classe entière	15 min
	5	Elève	Travail de recherche sur les questions et conjectures des autres classes	Maison	
2ème séance	6	Elève	Réponses aux questions et discutions sur les recherches	Groupe de 4	45 min
	7	Elève et enseignant	Rédaction commune des réponses	Classe entière	10 min
3ème séance	8	Elève	Travail particulier dans chaque groupe sur des rectangles de largeur 2, 3 , 4..	Groupe de 4	45 min
	9	Elève et enseignant	Préparation d'une nouvelle recherche à partir de la relance du chercheur	Classe entière	10 min
	10	Elève	Travail de recherche sur les rectangles 2 x n	Maison	
4ème séance	11	Elève et enseignant	A partir des travaux correction du cas 2 x n et suite de Fibonacci	Classe entière	55 min
	12	Elève	Travail de recherche sur les lapins de Fibonacci	Maison	
5ème séance	13	Elève et enseignant	Recherche de stratégie et clôture pour 2 x n et 3 x 2n	Travail individuel et classe entière	55 min

Scénario 4 :

Séance	Phase	Acteur	Description de la tâche	Situation	Durée
1ère séance	1	Elève	Lecture de l'énoncé	Individuelle	2 min
	2	Elève et enseignant	Explication et réponses aux questions	Classe entière	10 min
	3	Elève	Recherche collective	Groupe de 5	30 min
2ème séance	4	Elève	Recherche collective	Groupe de 5	25 min
	5	Elève et enseignant	Présentation par un membre de chaque groupe et confrontation des résultats	Classe entière	25 min
3ème séance	6	Elève et enseignant	Lecture des réponses des autres classes	Classe entière	25 min
	7	Elève	Recherche des différents pavages	Groupe de 5	25 min
4ème séance	8	Elève et enseignant	Recherche collective à partir de la relance de David dans le cas 2 x n	Classe entière	40 min
	9	Elève	Début de rédaction de la recherche	Individuelle	15 min
	10	Elève	Narration de recherche	Maison	

A Excellente recherche même si le résultat est faux pour 2×7

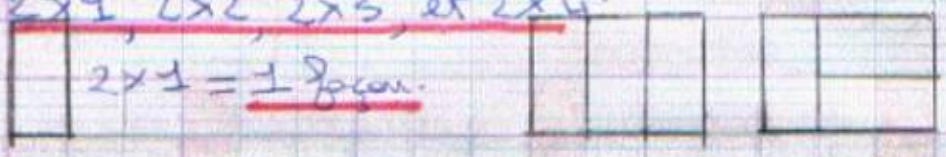
Bruchi Maxe 5e4

Lundi 28 FÉVRIER 2005

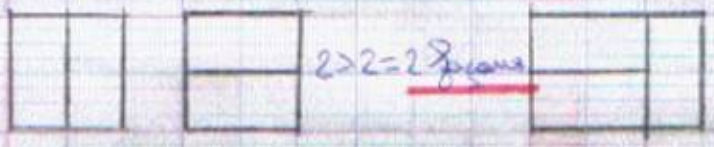
Narration de recherche

PROBLÈME: Comment carreler une forme rectangulaire de largeur M et longueur N (multiples entiers d'une même unité de longueur) avec des carreaux identiques de largeur 1 et de longueur 2.
EST-CE POSSIBLE? et si oui de combien de manières différentes peut-on le faire?
Déjà il faut se poser de BONNES QUESTIONS:
Ce problème est-il possible? Oui, mais il faut trouver une stratégie pour trouver les résultats.
Faut-il faire une opération? NON, seulement trouver une stratégie.

Il faut déjà commencer à trouver les plus faciles: 2×1, 2×2, 2×3, et 2×4.

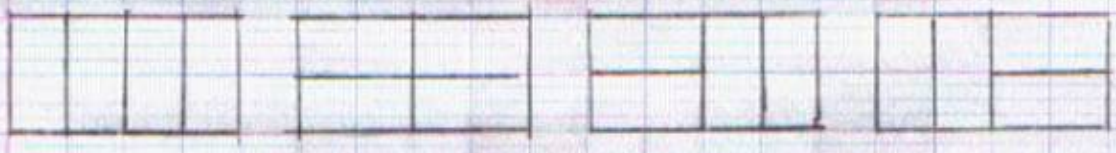


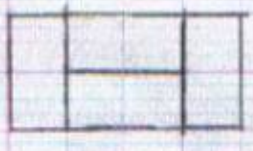
2×1 = 1 façon.



2×2 = 2 façons

2×3 = 3 façons.





2×4 = 5 façons.

Pour le début, je me suis aperçue de 2 CHOSES:

<<**Problème Carrelages**>>
Productions d'élèves 2/4

• Pour les 3 premiers, les nombres de longueur et de façons sont les mêmes :

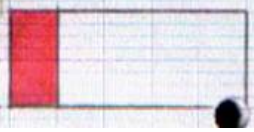
2×1 = 1 façon 2×2 = 2 FAÇONS 2×3 = 3 façons

Mais à partir du 4ème, cela ne marche plus.

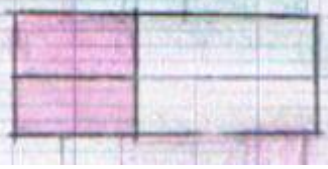
• Il est déjà possible de savoir combien il peut y avoir de pavés à l'intérieur du rectangle, selon la longueur :

Pour le nombre, on sait déjà. Mais maintenant, il faut une stratégie pour LES FAÇONS.

Pour moi, la stratégie la plus simple, ce serait de commencer à carreler d'abord comme ici :

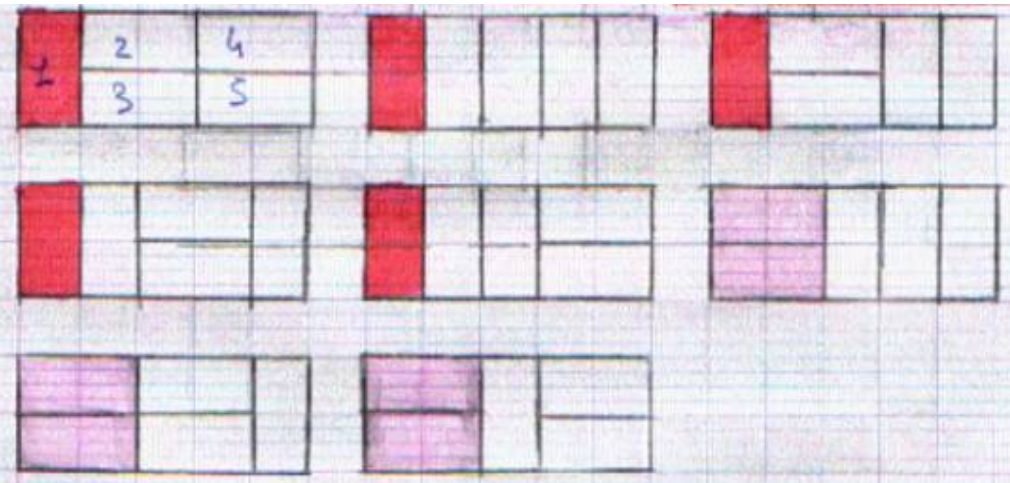


de trouver toutes les façons de carreler, et ensuite, recommencer mais en commençant comme cela :



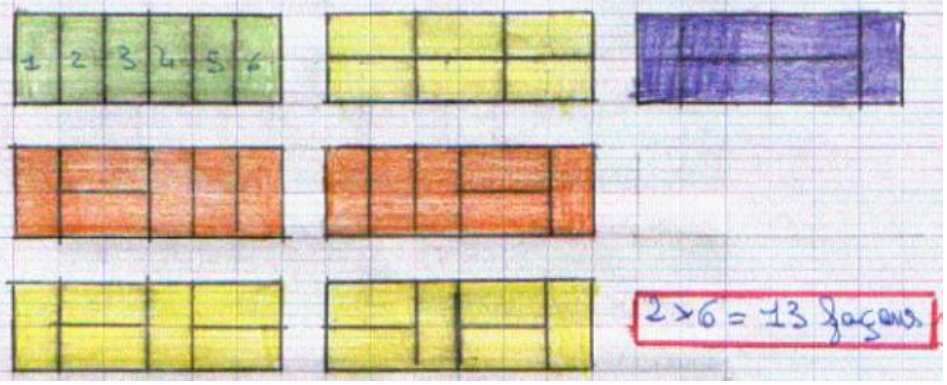
J'ESSAIE avec 2×5 :

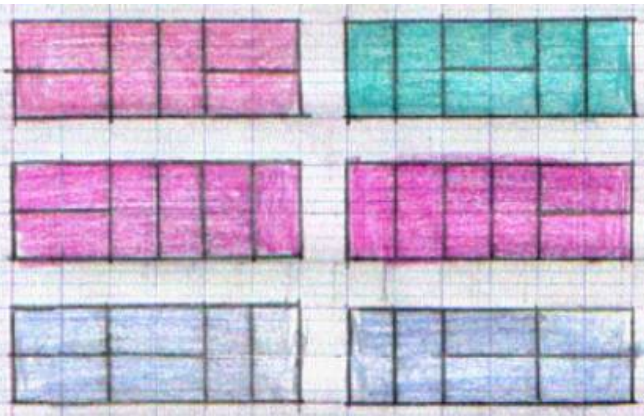
2×5 = 8 FAÇONS



Bien sûr, cette méthode est efficace pour ne pas faire 2 FOIS LES MÊMES. Mais on n'est toujours pas sûr de n'en avoir oublié aucun.

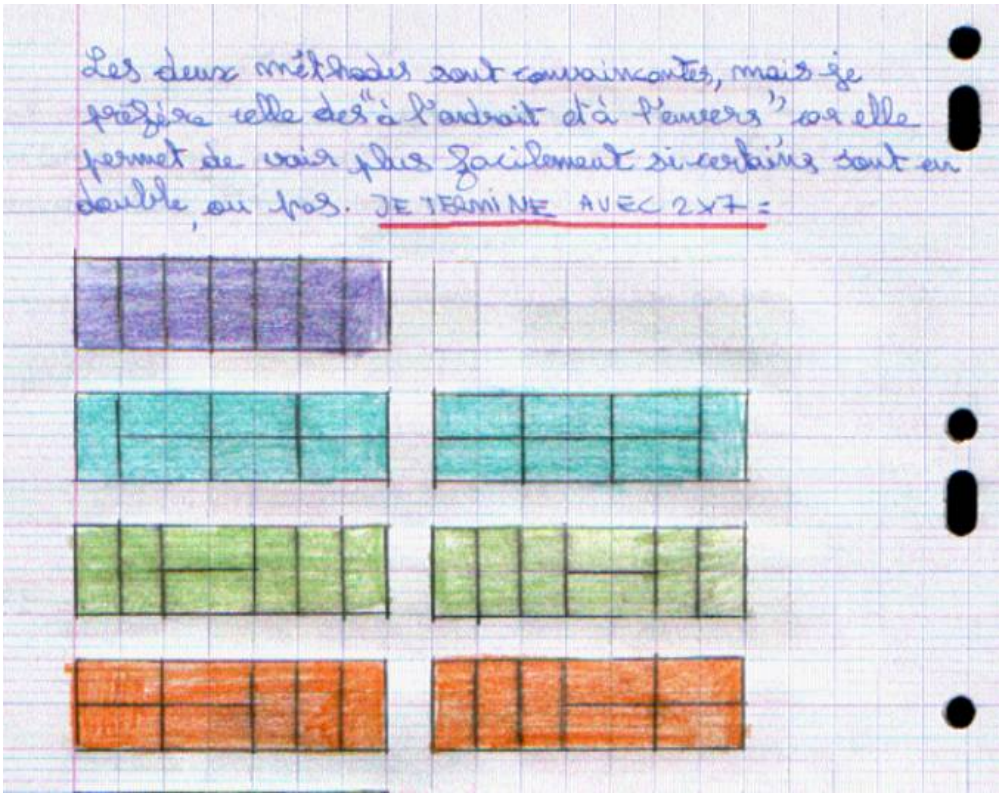
J'avais aussi une autre stratégie :
A chaque fois que je trouvais une façon, je la mettais directement à l'envers. Je vais ressayer maintenant 2x6 pour voir si cette méthode est aussi efficace que la précédente :

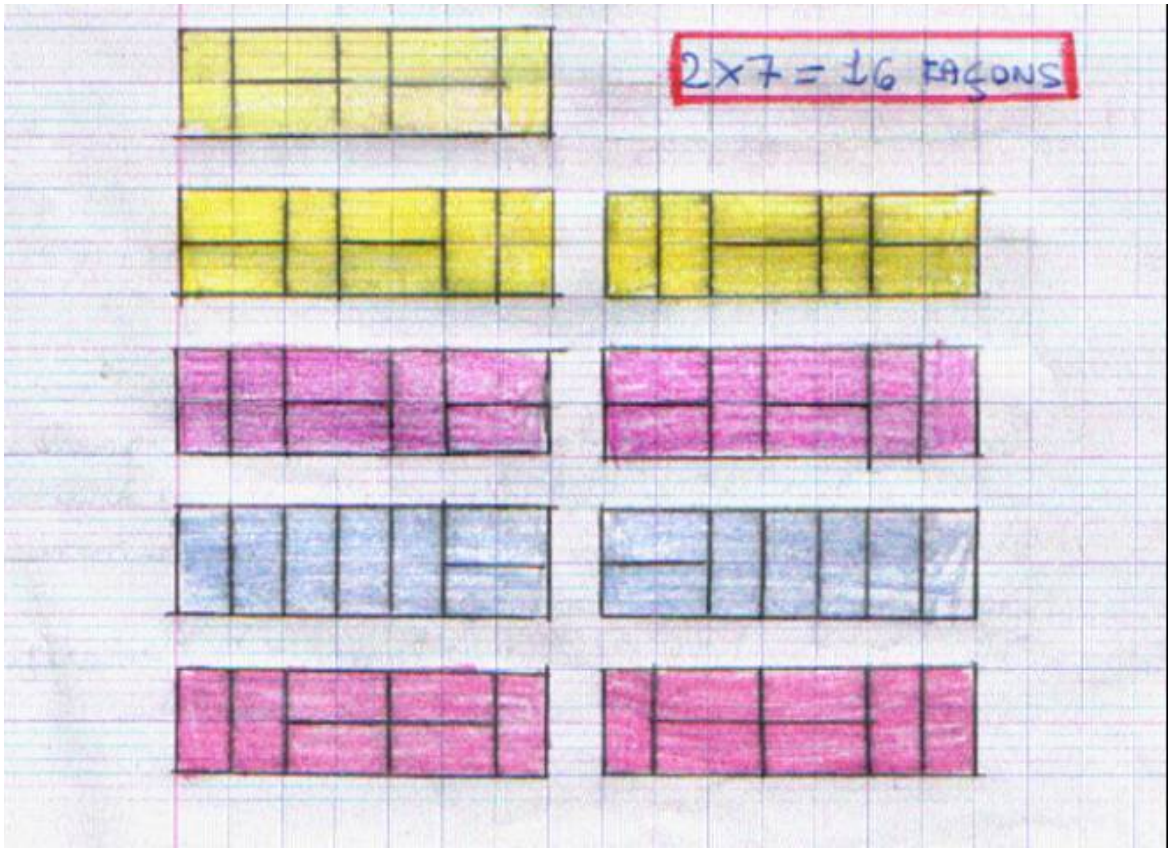




En regardant mon travail, j'ai eu une nouvelle idée : colorier tous les modèles trouvés de façons différentes et ceux qui sont à l'endroit et à l'envers de la même couleur, pour mieux repérer.
Il faut être très prudent, et toujours tout revérifier pour voir si certain ne sont pas en double.

<<**Problème Carrelages**>>
Productions d'élèves 4/4





Ces comptes-rendus d'expérimentation sont faits à partir des travaux mis sur le Forum par les enseignants

Premières approches - Questions de la 6ième du collège de la Providence

A. ON CHERCHE A COMPRENDRE LE PROBLEME

Est-ce du à l'influence de la recherche du problème des gardiens de musée ; mais beaucoup d'élèves sont restés longtemps à s'interroger sur les informations données dans l'énoncé, en se demandant si elles étaient suffisantes, si elles étaient utiles ou inutiles...
- On pourrait mettre des meubles dans la salle, mais il faudra les enlever pour pouvoir carreler.
- Si la salle a une porte, on va être obligé de couper des carreaux. Mais est-ce qu'on peut couper des carreaux ?
- Est-ce qu'il peut y avoir plusieurs pièces dans la salle ?
- Je pense qu'il n'y a pas assez d'informations pour faire le problème.
- Dans ce problème, il y a des informations inutiles, les carreaux blancs, ça m'avance pas beaucoup !
- Qu'est-ce que ça veut dire multiple entier ; pour moi, multiple c'est multiple de 2, de 3, de 5 ou de 9.
- Dans carreau, il y a carré, donc des carreaux rectangulaires c'est étonnant !
- Ce n'est pas normal, je ne comprends pas, largeur égale à 1 et longueur égale à 2 alors que les carreaux sont carrés.
- Dans carreau, on entend carré comme dans carrelage, alors normalement les carreaux d'un carrelage sont carrés, et carré ce n'est pas rectangle, mais je ne sais pas si je suis hors sujet.

B. LES ÉLEVES FONT QUELQUES SUGGESTIONS " POUR Y VOIR PLUS CLAIR "

- Je vais faire des dessins pour m'aider à comprendre.
- La salle doit être mesurée avec de m et les carreaux avec des cm.
- Ce serait mieux si on fixait les dimensions de la salle.
- Le plus simple serait d'avoir une salle carrée.
- Si je dis " oui c'est possible ", il va falloir que je le prouve, je vais le montrer avec toutes les façons possibles, donc déjà, il faut que j'invente une forme rectangulaire.
- Si les carreaux sont mesurés en cm, alors il faut obligatoirement que la forme soit aussi en cm.
- Ce sera pareil si on prend n'importe quelle unité de mesure.
- L'important ce serait de savoir les dimensions de la salle, les dimensions des carreaux, et le nombre de carreaux, mais pas la couleur, ça sert à rien !

C. EST-CE POSSIBLE ?

- Moi je dis que c'est impossible parce qu'il n'y a pas assez d'informations.
- Ce n'est pas possible puisque je ne comprends pas.
- Je ne pense pas que c'est possible, mais j'ai l'impression qu'il y a une astuce, mais laquelle ?

- C'est possible si on coupe les carreaux à certains endroits.
- Puisqu'on nous demande de combien de façons, bien sur que c'est possible !
- Si c'est possible il faut que je le prouve.

- C'est possible mais il faut savoir le nombre de carreaux.
- C'est possible car je pense que la salle est en m, elle est plus grande que les carreaux qui sont en cm.

D. QUELQUES IDEES, HYPOTHESES, CONJECTURES COMMENCENT A APPARAITRE

- Je dois chercher combien mesure la salle, je dis que la salle mesure 8m de largeur et 14,5m de longueur. mais il faut des mesures entières, alors je prends 8 et 14 et je fais des dessins.
- On pourrait faire des opérations pour trouver l'aire de la salle, comme cela on pourrait alors trouver peut-être le nombre de carreaux, et savoir si c'est possible ou pas possible.
- On na qua fixer L et l et essayer de dessiner toutes les façons possibles.
- C'est possible, je vais imaginer la salle de la longueur qu'on veut par exemple : 15m sur 10m 20cm=0,20m solution : 15 : 0,20=75 et 75x10=750 il y aura donc 750 carreaux.

- Si la largeur est un nombre pair on pourra carreler en long l'horizontale.
- Si la longueur est un nombre pair on pourra carreler en large la verticale.
- Si la largeur et la longueur ne sont pas pairs on pourra quand mme s'arranger, on mettra les carreaux en les emboîtant.
- Il y aura toujours des faons tant que les nombres seront pairs.
- Si c'est possible, il y a 2 faons, en long et en large.
- En fait, je pense qu'on peut le faire autant de fois qu'on veut, si la longueur est multiple de 2 et que la largeur soit sa moitié et quelle soit aussi un multiple de 2.

Suivi des travaux de recherche de la classe de 5°2 du Collège de Clermont l'Hérault

Ces travaux ont été rédigés par l'enseignant et mis sur le Forum à la fin de chaque semaine.

La première semaine, les élèves ont cherché par groupe de 4 ou 5. Ils se sont mis d'accord pour poser certaines questions aux autres classes de leur groupe (collège de Jacou, St Gély, La Grande Motte, lycée de Béziers).

La deuxième semaine ils ont étudié les questions et conjectures posées par les autres classes, ils ont rédigé de réponses, on voit un important travail sur la notion de contre-exemple mais ils n'ont pas encore les outils algébriques pour démontrer leurs affirmations.
*Ils se heurtent à un problème d'orientation de pavage**, une décision très importante doit être prise par toutes les classes pour la suite des recherches** car pour communiquer et échanger des résultats il faut qu'il y ait accord et unanimité sur les choix adoptés.*

La troisième semaine la recherche est organisée et des résultats partiels sont avancés avec appel aux autres classes pour l'élaboration de démonstration.

Première semaine : Vendredi 31/01/2003

Questions posées par les élèves :

1) Pourquoi prendre la même unité de longueur pour la longueur et la largeur du rectangle à paver ?

2) Pourquoi prendre des carreaux blancs ?

3) Pourquoi ne pas découper les carreaux pour terminer le pavage ?

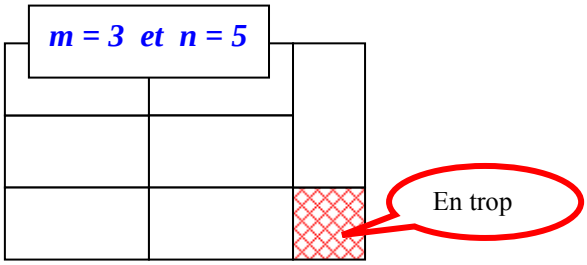
4) Etes-vous d'accord sur le fait que :

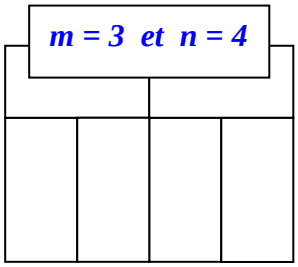
a) si le produit m x n est impair le pavage est impossible .

b) si le produit m x n est pair le pavage est toujours possible .

(Pour l'expliquer nous avons utilisé le fait que le pavé de base a pour aire 2 et que si l'aire du rectangle est paire on pourra y insérer un multiple de 2 de pavés de base alors que si l'aire du rectangle est impaire il restera toujours « 1 » de trop ….) .

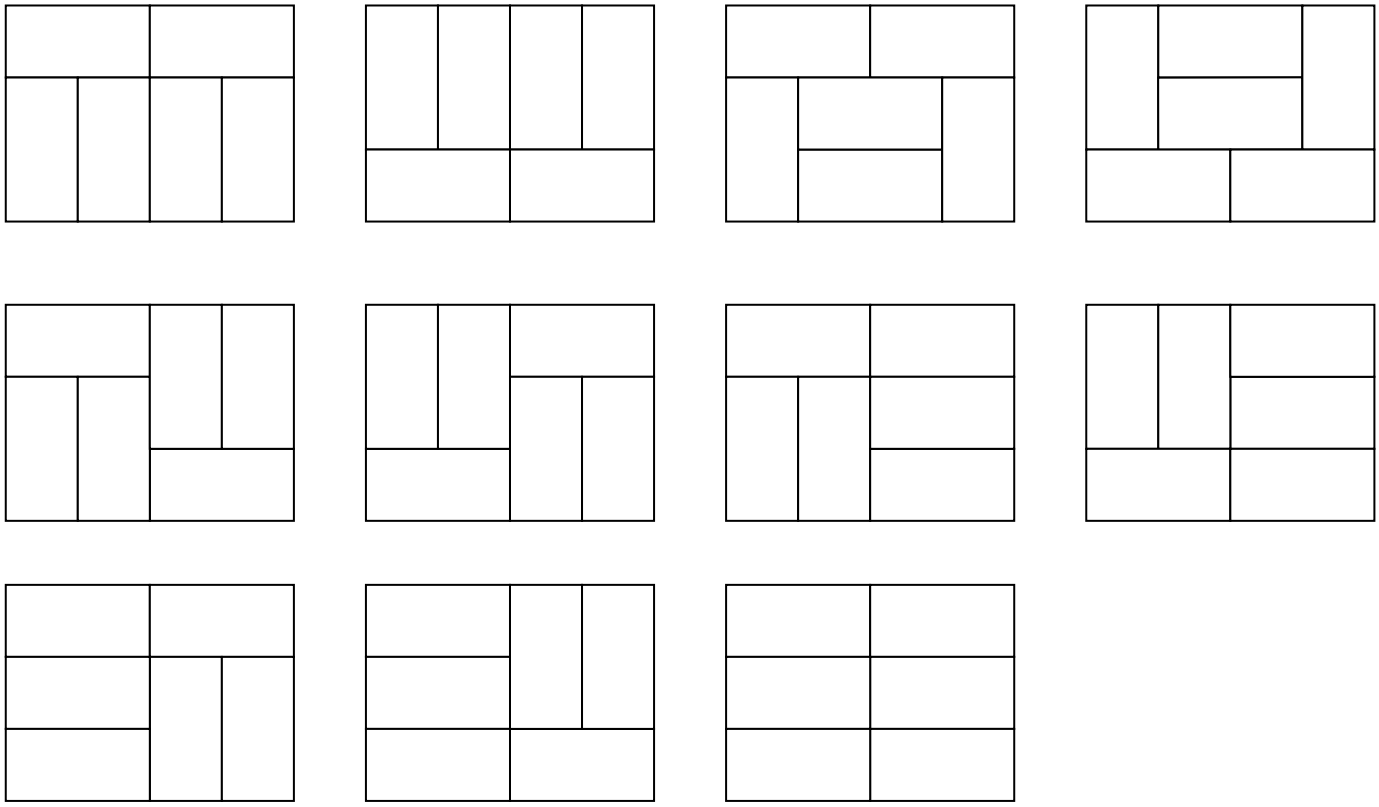
Exemples :





Dans le cas où le pavage est possible (cad si le produit m x n est pair) un groupe suggère qu'il y a m x n -1 pavages différents . Qu'en pensez-vous ?

Exemples pour m=3 et n=4 : 4 x 3 - 1= 11 pavages « différents »



2eme semaine sur le problème de carrelages avec la 5e2 Collège du Salagou :

En réponse plus particulièrement à Jacou :

1) Les élèves sont d'accord sur les conjectures :

- Si l'aire est paire la salle est toujours carrelable
- Si la longueur est multiple de 2 et la largeur est multiple de 1 on peut toujours carreler

Pour eux et dans le cas présent c'est la même conjecture .
argumentation :
Si la longueur est multiple de 2 alors elle est paire donc l'aire l'est aussi ….

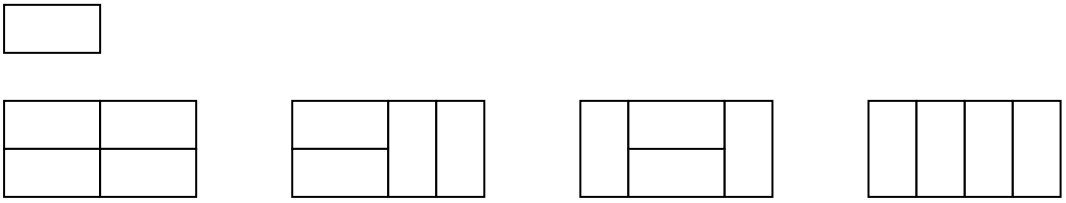
2) Par contre ils ne sont pas d'accord avec les hypothèses suivantes :

- Plus la salle est grande plus il y a de possibilités de carreler

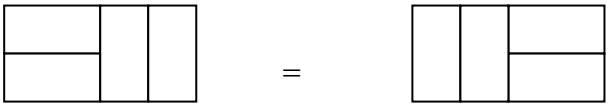
argumentation :
avec m = 4 et n = 1 il y a une possibilité
avec m = 6 et n = 1 il n'y a pas plus d'une possibilité bien que l'aire soit plus grande
mais ils pensent qu'en ne prenant pas la valeur 1 c'est sûrement vrai …

- Proportionnalité entre le nombre de possibilités et les dimensions de la salle

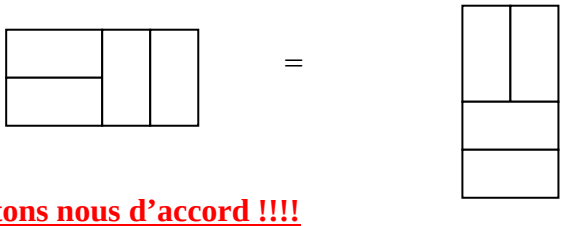
argumentation :
avec m = 2 et n = 1 il y a 1 possibilité
avec m = 4 et n = 2 il y a 4 possibilités et non 2 (dimensions doublées) !!!



Leur grande « question » est de savoir si à Jacou, Béziers , St Gély …..
vos élèves considèrent les pavages ci-dessous comme formant qu'un cas ou 2 ?



et



Urgent : Mettons nous d'accord !!!!

1

ou

+ = 2

Nous sommes en train de former des groupes qui répertorient le nombres de possibilités de carreler :

<u>1e groupe :</u> m=1 et n=2 ; m=1 et n=4 ; m=1 et n=6 ; m=1 et n=8 ; m=1 et n=10 …
<u>2e groupe :</u> m=2 et n=1 ; m=2 et n=2 ; m=2 et n=3 ; m=2 et n=4 ; m=2 et n=5 …
<u>3e groupe</u> : m=3 et n=2 ; m=3 et n=4 ; m=3 et n=6 ; m=3 et n=8 ; m=3 et n=10
<u>4e groupe :</u> m=4 et n=1 ; m=4 et n=2 ; m=4 et n=3 ; m=4 et n=4; m=4et n=5 …
<u>5e groupe :</u> m=5 et n=2 ; m=5et n=4 ; m=5 et n=6 ; m=5 et n=8 ; m=5 et n=10 …

Nous sommes maintenant prêts à collaborer avec Béziers ..

Evidemment nous cherchons une stratégie , une « formule » qui nous éviterait de chercher trop longtemps …

Amicalement A bientôt .

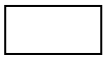
3eme semaine sur le problème de carrelages avec la 5e2 Collège du Salagou :

Les élèves ont successivement fixé la valeur de m et fait varier (sur 4 ou 5 valeurs) l'autre dimension du rectangle de façon à avoir l'aire paire et surtout pour trouver une relation , une formule .

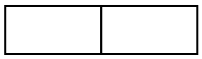
a) ***<u>Avec m =1</u>***

m	1	1	1	1	1	1
n	2	4	6	8	10	…
possiblités	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

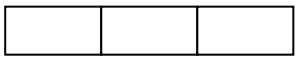
m = 1 et n = 2

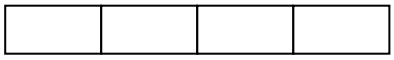


m = 1 et n = 4



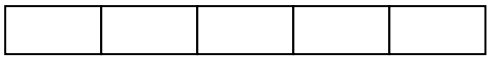
m = 1 et n = 6



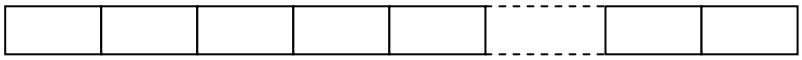


m = 1 et n = 8

m = 1 et n = 10



m = 1 et n = pair

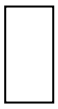


Conjecture : **Qu'une seule possibilité quelque soit la valeur paire prise par n .**

b) ***Avec m =2***

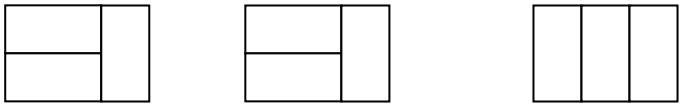
m	2	2	2	2	2	2	2
n	1	2	3	4	5	6	….
possiblités	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**….**

m = 2 et n = 1

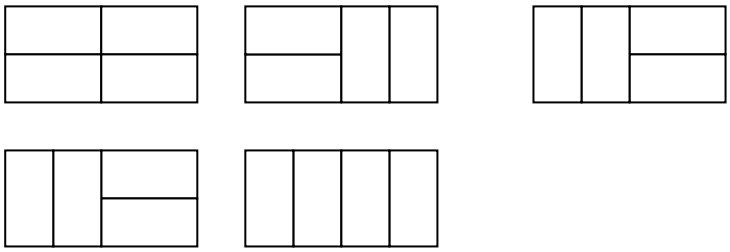


m = 2 et n = 2

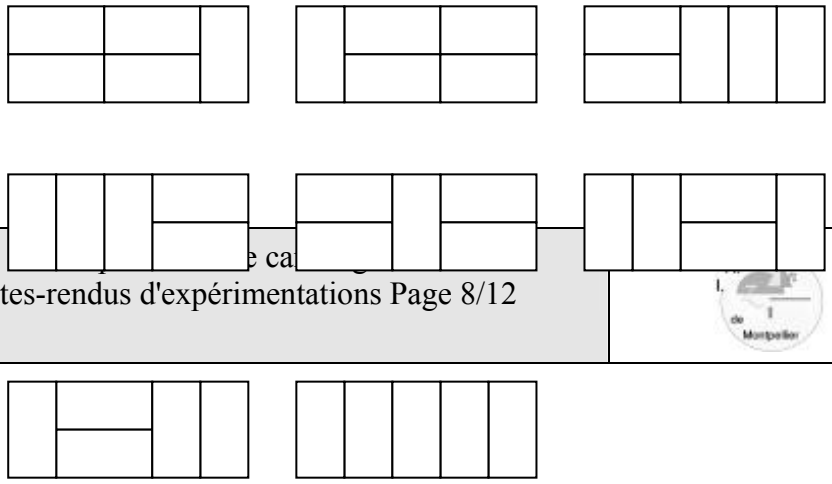
m = 2 et n = 3



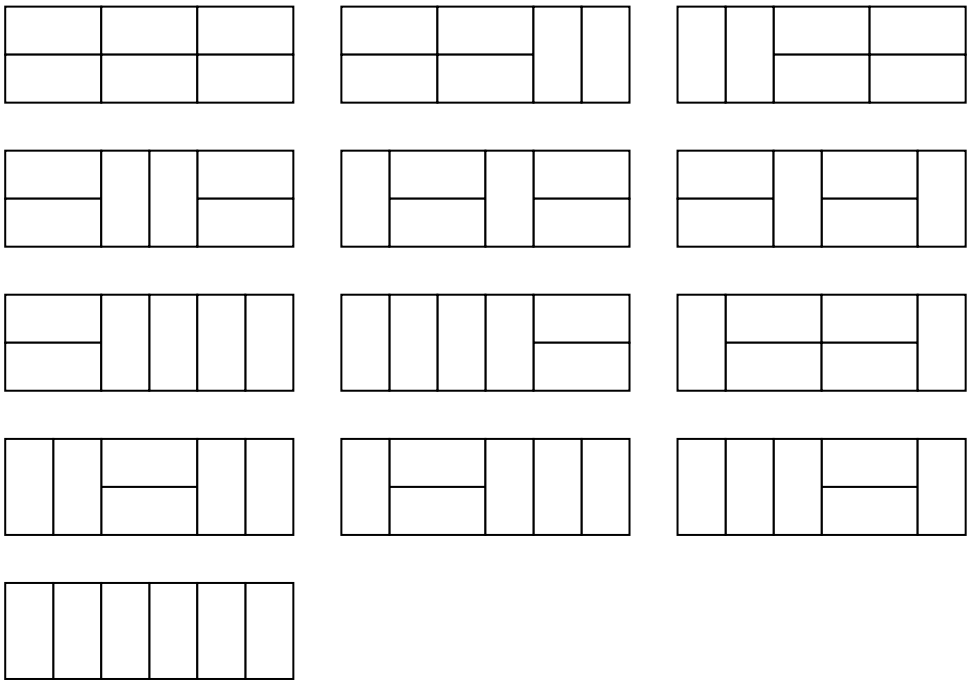
m = 2 et n = 4



m = 2 et n = 5



m = 2 et n = 6



Etc ……

Observation des résutats obtenus :

1 2 3 5 8 13 21 ? etc..

or 1 + 2 = 3
2 + 3 = 5
3 + 5 = 8
5 + 8 = 13

et sûrement 8 + 13 = 21 pour le cas suivant (m =2 et n = 7)

Conjecture : **On a le nombre de possibilités en ajoutant les résultats trouvés dans les 2 cas précédents .**

Qu'en pensez-vous ?

Nous pensons que pour le démontrer (si c'est vrai et on n'y est pas encore parvenu …) il faudrait peut-être ressortir l'idée du passage d'un cas à l'autre en rajoutant façon « puzzle » des pavés aux cas précédemment trouvés …

b) ***Avec m =3***

Nous continuons le recensement des possibilités mais il devient maintenant très difficile de les compter tellement il y a de possibilités ……

Démonstration algébrique sur la parité d'un produit

A la suite de l'envoi d'une classe du collège d'Anduze, on voit dans la réponse du collège de St Gély l'utilisation de l'outil algébrique pour démontrer un résultat

Premier envoi de la 4B du collège Florian d'Anduze Date: 28-01-03
Voilà ce qu'on vient de trouver au 1er contact :

1x1 c'est impossible
3x3 et 3x5 c'est impossible parce que les surfaces sont impaires alors que celle d'un carreau est paire et ce sera pareil pour toutes les surfaces impaires.

2x2 donne 2 façons
2x3 donne 3 façons
2x4 en donnerait 5 (à vérifier)
3x4 en donnerait 11 (à vérifier)
4x4 en donnerait 30 (à vérifier)

Deux questions semblent émerger : quelles formes sont impossibles à carreler à part les impaires ?
De combien de façons peut-on carreler une certaine surface.

La plupart ont compris qu'il fallait d'abord s'exercer sur de petites surfaces avant d'en imaginer de grandes.

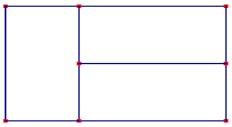
Réponse de la 3ième du collège du Pic St Loup à St Gély Date: 06-02-03
bonjour,
Nous avons travaillé sur vos conjectures aujourd'hui.
Mathilde nous a prouvé avec l'algèbre plusieurs propriétés.
Elle a appelé 2u un nombre pair et 2v un autre nombre pair.
2u x 2v = 2(u x 2 x v) donc ce résultat se divise par 2 donc pair x pair = pair
On a appelé u et v deux pairs, (u + 1) et (v + 1) sont impairs
(u + 1) x (v + 1) = uv + u + v + 1
uv est pair, u pair, v pair donc uv + u + v + 1 est impair

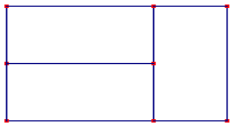
Mathide a aussi prouvé que la somme de deux pairs est paire:
2y + 2z = 2(y + z)
Donc impair x impair = impair
(u + 1) x v = uv + v
donc pair x impair = pair
On a vérifié vos conjectures concernant les différentes possibilités jusqu'à 3x4 et nous sommes d'accord avec vous.
Nous n'avons pas encore terminé pour le carré de 4 x 4. Nous essayons de trouver une stratégie pour ne pas en oublier.

Relance du chercheur à toutes les classes à la fin de la 2ième semaine

Le point sur certaines questions.

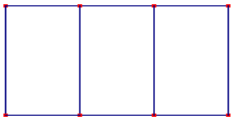
Comment compter les différentes manières possibles de carreler la forme rectangulaire ? Dans les problèmes de ce type, la question se pose toujours de savoir si on a le droit de tourner ou de





retourner la figure, par exemple :

Ces figures représentent-elles des manières différentes de carreler le même rectangle ? Il faut prendre une décision, si nous voulons tous réfléchir à la même chose... Nous décidons que **oui**. Par exemple : imaginez que cette zone rectangulaire est une partie d'un mur ; vous voulez la carreler, mais vous ne pouvez évidemment pas la tourner. Pour un tel rectangle, on a ainsi 3 manières différentes de carreler, la troisième étant :



- Le problème des unités. L'énoncé restait vague sur l'unité : s'agit-il du centimètre, du décimètre, du mètre, d'autre chose encore ? Mais vous avez souvent constaté ou imaginé que la réponse n'en dépend pas. Carreler un gros rectangle avec des gros carreaux revient à carreler un petit rectangle avec de petits carreaux !

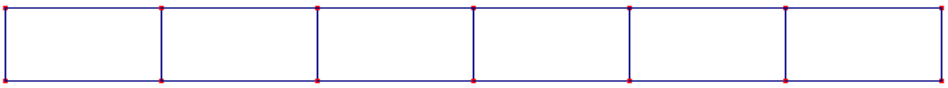
- Pair / impair. Vous avez presque tous reconnu que le problème ne peut avoir de solution que si l'une au moins des dimensions du rectangle est **paire**.

- Nombre de carreaux. Vous êtes nombreux à avoir eu l'idée que le **nombre de carreaux** devait être la moitié de l'aire du rectangle (voir point précédent).

- Stratégie pour compter les différents carrelages. Dès qu'on passe à des dimensions plus compliquées que le rectangle 2x3 ci-dessus, vous constatez qu'il y a beaucoup de possibilités. Comment les compter toutes, comment être sûr de ne pas en avoir oublié ? Quelle(s) **stratégie(s)** adopter ?

Proposition de travail.

Il est sans doute très difficile de trouver la réponse à notre problème pour un rectangle nxm quelconque... Peut-on au moins le faire pour des rectangles particuliers ? Quels sont les plus simples des rectangles, du point de vue de notre problème ? Certains ont étudié les carrés, par exemple, sans doute parce que ce sont des rectangles de forme symétrique. Mais il n'est pas si facile de les étudier dans notre problème ! Les rectangles les plus simples ici semblent être ceux dont la forme est la plus effilé, ceux qui laissent le moins de possibilités pour carreler. Parmi ceux-ci, le plus simple est, comme certains l'ont dit... le rectangle 1x2n ! On voit bien qu'il n'y a qu'une



manière de carreler, dans ce cas. Par exemple : le rectangle 1 x 12

Voici une proposition de travail pour le temps qui vous reste : trouvez de **combien** de manières différentes on peut carreler un rectangle 2x2, puis un rectangle 2x3, puis 2x4, 2x5, 2X6, etc... Observez-vous quelque chose ? Quelle est votre stratégie pour compter ? Comment pourriez-vous déterminer le nombre suivant ?

Cela vous donne-t-il des idées pour réfléchir au problème sur des rectangles de largeur 3 ?

Bonne recherche

Echanges questions - réponses

Les échanges questions-réponses entre les classes nécessitent une certaine organisation Entre les collèges de Jacou et Clermont l'Hérault l'organisation a été la suivante :

- *les élèves de Clermont l'Hérault ont envoyé leurs questions à ceux de Jacou*
- *l'enseignant de Jacou a recopié ces questions en laissant un espace entre-elles*
- *il a distribué dans sa classe, dans chaque groupe de recherche, ces questions ; les élèves ont écrit leurs réponses,*
- *puis un débat s'est instauré entre les groupes pour qu'il y ait accord de la classe sur une réponse unique envoyée à la classe de Clermont l'Hérault*
-

Réponses de la classe de 4^{E} du collège de Jacou Date: 06 - 02 -03

(Les questions sont en caractères gras et les réponses en italiques)

Nous avons étudié vos questions et voici nos réponses

1) Pourquoi prendre la même unité de longueur pour la longueur et la largeur du rectangle à paver ?

Oui, car dans l'énoncé la largeur et la longueur de la forme rectangle à carreler doivent être multiples entiers d'une même unité

2) Pourquoi prendre des carreaux blancs ?

Cela n'a pas d'importance

3) Pourquoi ne pas découper les carreaux pour terminer le pavage ?

Dans ce cas-là le problème n'est pas intéressant tous les cas sont possibles et la réponse est dans l'énoncé

4) Etes-vous d'accord sur le fait que :

c) **si le produit m x n est impair le pavage est impossible .:** *Oui*

d) **si le produit m x n est pair le pavage est toujours possible .** : *Oui*

5) Dans le cas où le pavage est possible (cad si le produit m x n est pair) un groupe suggère qu'il y a m x n -1 pavages différents .

Pour la formule mxn-1 nous ne sommes pas d'accord nous avons trouvé des contre-exemples :
si n=m=2 votre formule donne 3 et il y a 2 possibilités

si m=4 et n=2 il y a 5 façons et vous en trouveriez 7
Exemples pour m=3 et n=4 : 4 x 3-14= 11 pavages différents

Procédures élèves

- **Interrogation sur les unités**
- Dépendance ou indépendance des unités de mesure des carreaux et du rectangle

- **Procédures algébriques** :
  - Démonstration sur la parité d'un produit de nombres entiers
  - Formules algébriques pour généraliser des résultats numériques (ces formules sont souvent invalidées par des contre-exemples)
  - Reconnaissance de la suite de Fibonnachi (la démonstration n'est pas établie)

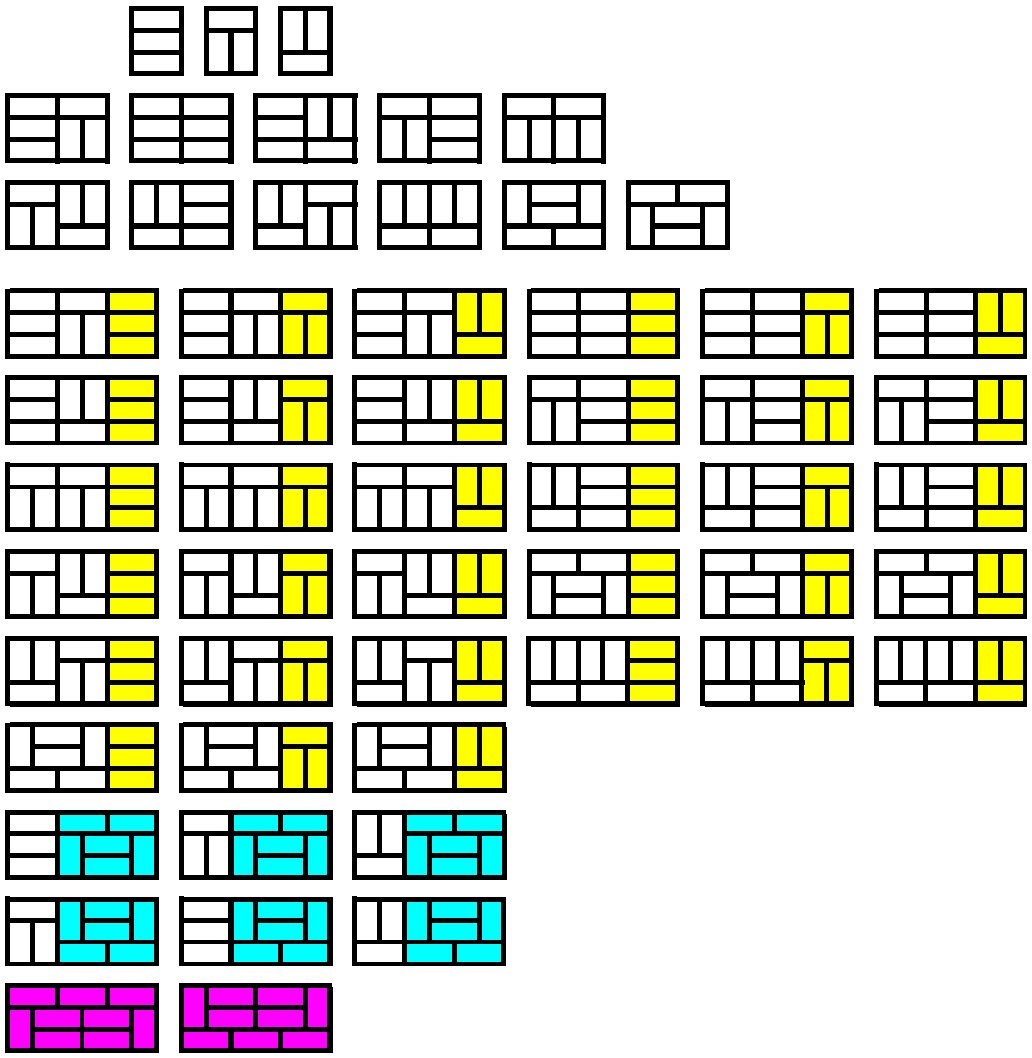
- **Procédures calculatoires**
  - Aire du rectangle
  - Nombre de carreaux nécéssaires pour le pavage d'un rectangle de dimensions fixées
  - Calculs du nombre de possibilités induits des résultats sur des cas particuliers

- **Procédures géométriques pour dessiner**
  - Transformations : symétries, rotations, translations
  - Pavages
  - Puzzle

- **Stratégies de dénombrements**
  - Induites par les constructions géométriques
  - Induites par des résultats numériques partiels

Recherches dans le cas des rectangles de largeurs 3 et 4

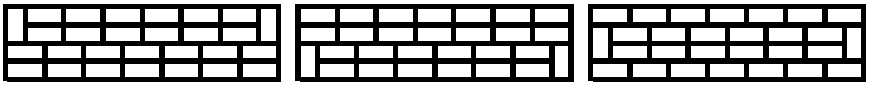
une solution dans le cas des rectangles 3 x 2n



n	u_n
2	3
4	3 x 3 + 2 = 11
6	11 x 3 + 3 x 2 + 2 = 41
8	41 x 3 + 11 x 2 + 3 x 2 + 2 = 153
10	153 x 3 + 41 x 2 + 11 x 2 + 3 x 2 + 2 = 571
12	571 x 3 + 153 x 2 + 41 x 2 + 11 x 2 + 3 x 2 + 2 = 2131

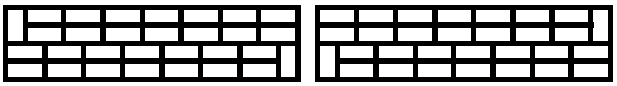
une solution dans le cas des rectangles 4 x n

n pair > 2
3 solutions sans barre verticale



n impair>1

2 solutions sans barre verticale



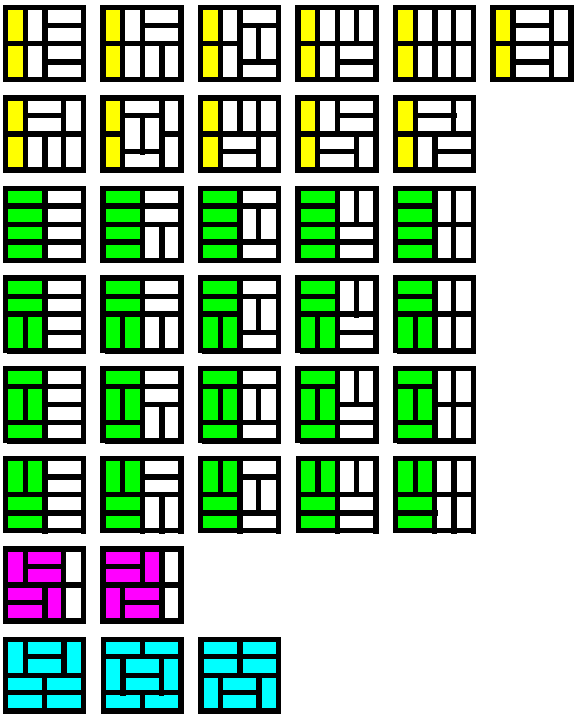
4x2

n = 2

4 solutions sans barre verticale

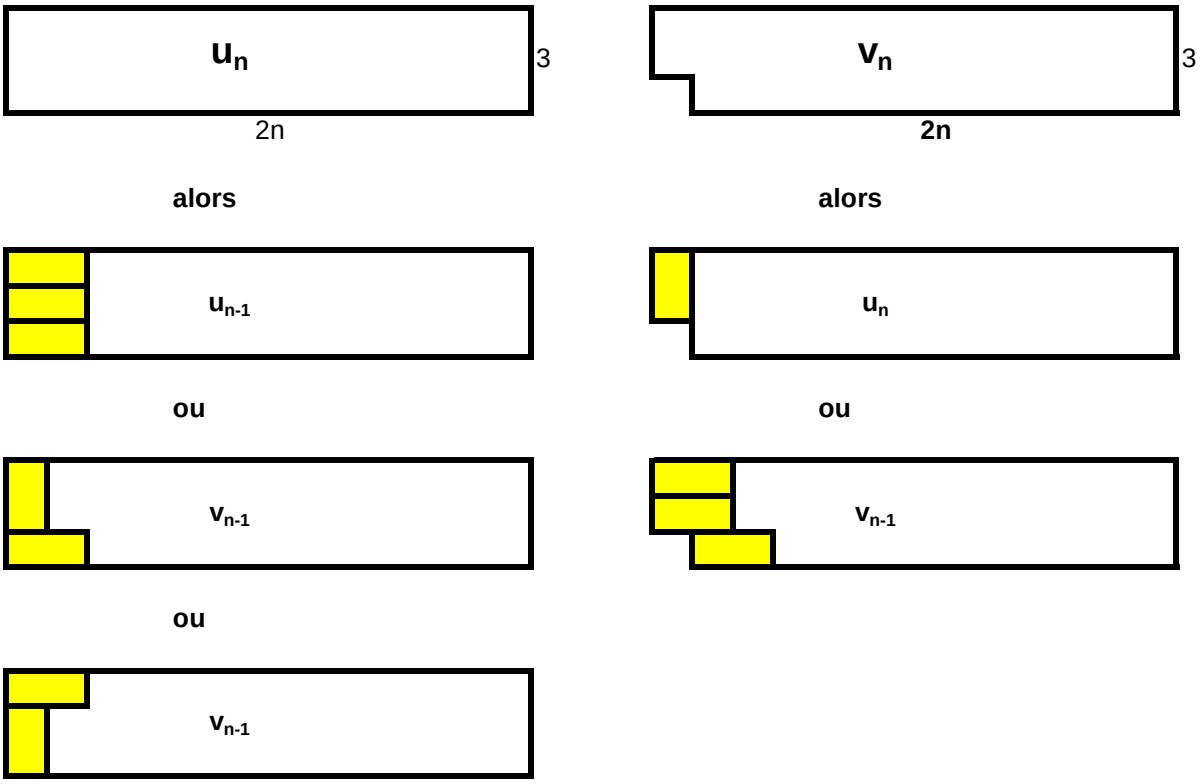
4x3

4x4



n	u_n
1	1
2	5
3	5 + 4 x 1 + 2 = 11
4	11 + 4 x 5 + 2 x 1 +3 = 36
5	36 + 4 x 11 + 2 x 5 + 3 x 1 + 2 = 95
6	95 + 4 x 36 + 2 x 11 + 3 x 5 + 2 x 1+ 3 = 281
7	281 + 4 x 95 + 2 x 36 + 3 x 11 + 2 x 5 + 3 x 1+ 2 = 781

Solution plus générale dans le cas d'un rectangle 3 x 2n



D'après les figures ci-contre, on a :

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + 2v_{n-1} \\ v_n = u_n + v_{n-1} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u_n = u_n - 1 + 2v_{n-1} \\ v_n = u_{n-1} + 3v_{n-1} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ pour n = 1, on a : $u_1 = 3$ et $v_1 = 4$

donc $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Il faut diagonaliser $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ car $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable : il existe P matrice inversible telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{i.e. } A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\text{d'où : } A^n = P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}}_{I} . P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1} . P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1} \ldots\ldots P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Il reste à trouver λ, μ et P (s'ils existent bien).

Les calculs donnent :

$\lambda = 2 + \sqrt{3}$ $\qquad$ $\mu = 2 - \sqrt{3}$

$$P = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} \\ -1 & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (2+\sqrt{3})^n & 0 \\ 0 & (2-\sqrt{3})^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} \\ -1 & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Formule générale pour un rectangle n × m avec n ou m pair :

$$2^{\frac{mn}{2}} \prod_{k=1}^{m} \prod_{l=1}^{n} \left(\cos^2 \frac{k\pi}{m} + \cos^2 \frac{l\pi}{n}\right)^{\frac{1}{4}}$$

1) COMPARAISON DES FORMULES PRECEDENTES

Pour un rectangle de largeur égale à 3 et de longueur 2 n

U_n étant le nombre de rectangle différents que l'on peut faire avec des pavés de 2 carreaux (hor. ou vert.)

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{n-1}$$

Avec la calculatrice TI 83 + , on trouve :

n	2	3	4	5
$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 \\ 15 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 41 \\ 56 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 153 \\ 209 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 571 \\ 780 \end{pmatrix}$

Qui s'avère vérifier les premières formules.

n	u_n
1	3
2	3 x 3 + 2 = 11
3	11 x 3 + 3 x 2 + 2 = 41
4	41 x 3 + 11 x 2 + 3 x 2 + 2 = 153
5	153 x 3 + 41 x 2 + 11 x 2 + 3 x 2 + 2 = 571
6	571 x 3 + 153 x 2 + 41 x 2 + 11 x 2 + 3 x 2 + 2 = 2131

2) Diagonalisation de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{n-1}$ **donnant** $\lambda = 2 + \sqrt{3}$ **et** $\mu = 2 - \sqrt{3}$

matrice caractéristique : $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

polynôme caractéristique : $p(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 1$

valeurs propres : Pour $p(\lambda) = 0$ on a

$\Delta = 12$ et

$\lambda' = 2 + \sqrt{3}$
$\lambda'' = \mu = 2 - \sqrt{3}$

la matrice diagonale sera $A_0 = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$

telle que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix} P^{-1}$

Recherchons la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} \overset{0}{X} & \overset{0}{Y} \end{pmatrix}$ où $\overset{0}{X}$ et $\overset{0}{Y}$ sont les vecteurs propres

2.1 **<u>Calcul du vecteur propre</u>** correspondant à la valeur propre $\lambda = 2 + \sqrt{3}$:

Soit $\overset{0}{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ce vecteur.

On a $(A - \lambda I)\overset{0}{X} = 0$

Soit $\begin{pmatrix} 1-(2+\sqrt{3}) & 2 \\ 1 & 3-(2+\sqrt{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

Ce qui donne le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} (-1-\sqrt{3})\,x + 2\,y = 0 \\ x + (1-\sqrt{3})\,y = 0 \end{cases}$$

Ces deux équations étant les mêmes on choisira donc par exemple $y = 1$ ce qui donne :

$x = -1 + \sqrt{3}$

d' où le vecteur propre : $\overset{0}{X} = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

2.2 **<u>Calcul du vecteur propre</u>** correspondant à la valeur propre $\mu = 2 - \sqrt{3}$:

Soit $\overset{0}{Y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ce vecteur.

On a $(A - \lambda I)\overset{0}{Y} = 0$

Soit $\begin{pmatrix} 1-(2-\sqrt{3}) & 2 \\ 1 & 3-(2-\sqrt{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

Ce qui donne le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} (-1+\sqrt{3})\,x + 2\,y = 0 \\ x + (1+\sqrt{3})\,y = 0 \end{cases}$$

Ces deux équations étant les mêmes on choisira donc par exemple $y = 1$ ce qui donne :

$x = -1 - \sqrt{3}$

d' où le vecteur propre : $\overset{0}{Y} = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc la matrice $P = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice inverse P^{-1} peut se vérifier à la calculatrice facilement.

$P^{-1} = (1/\det)\,(\text{matrice adjointe})^t$ avec det = par la règle de Sarrus

$= (-1+\sqrt{3}) \times 1 - 1 \times (-1-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

matrice adjointe = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1+\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$

matrice transposée de la matrice adjointe = $\begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} \\ -1 & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$

d'où $P^{-1} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} \\ -1 & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$

On peut vérifier que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix} \times \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} \\ -1 & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

et surtout que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (2+\sqrt{3})^{n-1} & 0 \\ 0 & (2-\sqrt{3})^{n-1} \end{pmatrix} \times \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} \\ -1 & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

SFODEM	Le problème de carrelage CV	

étape	date	réalisations	contributeurs
1	Mi janvier 2003	Répartition des classes en six groupes. Envoi de l'énoncé du problème aux enseignants (fiche élève).	Un formateur de l'équipe RCPO
2	dernière semaine janvier 2003	Lecture de l'énoncé, premières réflexions et envoi des questions aux autres classes du même groupe (germes de fiche compte rendu d'expérimentation).	Tous les enseignants du groupe RCPO et tous les élèves
3	première semaine février 2003	Prise connaissance des questions, travail dessus et envoi des réponses aux autres classes du même groupe (germes de fiche compte rendu d'expérimentation).	Tous les enseignants du groupe RCPO et tous les élèves
4	16 février 2003	Relance pour faire le point de toutes les questions et recentrer le problème: chaque enseignant transmet à ses classes ce qu'il juge bon pour l'avancée du problème (germe de fiche compte rendu d'expérimentation).	L'enseignant-chercheur de l'équipe RCPO
5	Fin février 2003	Envoi d'un questionnaire aux enseignants sur l'organisation du travail et de la communication (germes de fiche scénarios d'usage).	Un formateur de l'équipe RCPO.
6	Fin février début mars 2003	Poursuite du travail de recherche et des envois entre classes (germe de fiche compte rendu d'expérimentation).	Tous les enseignants du groupe RCPO et tous les élèves
7	14 mars 2003	En présentiel, une recherche entre enseignants s'est organisée pour trouver des solutions pour des rectangles 3x2n, des rectangles 3x4n, différentes solutions (particulières ou générales) ont été présentées . Puis débat sur les problèmes d'organisation et de communication et présentation des différents scénarios (fiche scénarios d'usage).	Tous les enseignants du groupe RCPO
8	Fin mars 2003	Bilan du travail réalisé en classe et présentation aux élèves de solutions évoquées en présentiel.	Tous les enseignants du groupe RCPO et tous les élèves
9	Avril à juin 2003	Finalisation de la ressource à partir des différents travaux et du forum.	L'équipe RCPO.
10	Décembre 2005	Réalisation du CV	Un formateur de l'équipe RCPO.