Test diagnostique sur le calcul littéral

E.Almanza

COMPTE RENDU D'EXPERIMENTATION

I . GRILLE DES REPONSES

Le test a été proposé dans une classe de quatrième, composée de 28 élèves.
Il a été passé dans une version différente que celle proposée dans la fiche élève qui a été améliorée après coup. Elle est donnée à la fin du compte rendu.

EXERCICE 1

1°)
a) Réponses attendues : x
x+5
3(x+5)

Réponses relevées :

JUSTE x x+5 3(x+5)	9	17	
JUSTE x x+5=z z×3	1		
JUSTE 3(x+5) pas de détail	7		
x x+5 x+5×3	4	7	Oubli de parenthèses ou mauvaise compréhension du « sens » des parenthèses.
x+5×3 pas de détail	2		
x+5×3=3(x+5)	1		
3(x+5)=15x	1	3	Confusion addition multiplication ou mauvaise priorité opératoire ou bien ces élèves transposent du numérique dans l'algébrique, l'idée qu'un résultat ne doit plus contenir de signe opératoire.
x+5=5x 5x×3=15x	1		
5x 5+5x=10x 10x×3=30x	1		
L'élève donne une valeur à x	1	1	L'élève retourne dans le cadre numérique, problème du sens de la lettre.

Test diagnostique sur le calcul littéral

E.Almanza

b) Réponses attendues : x
$4\times x$
4x+2

Réponses relevées :

Bonne réponse	15	23	
4x+2 pas de détail	8		
$x\times 4+2=6x$	2	3	Sens des opérations ou bien ces élèves transposent du numérique dans l'algébrique, l'idée qu'un résultat ne doit plus contenir de signe opératoire.
4x+2=(4x)2	1		
$x\times 4=12x$ 12x+2=14x	1	2	Priorité des opérations.
5x $5x\times 4=20x$ 20x+2=22x	1		

2°)

a) Réponse attendue : Choisir un nombre et l'appeler x
Le multiplier par deux.
Ajouter 1 au résultat obtenu.

Réponses relevées :

Bonne réponse.	22	22	
Choisir le nombre 2. Le multiplier par x. Ajouter 1 au résultat.	1	1	
Choisir x. Lui ajouter 1.	1	4	
2x+1=3x	1		Priorité opératoire.
Pas de réponse.	2		

b) Réponse attendue : Choisir un nombre et l'appeler x.
Lui soustraire 2.
Multiplier le résultat par 4.

Réponses relevées :

Bonne réponse.	23	23	
Choisir x. Lui soustraire 2.	1	5	

Test diagnostique sur le calcul littéral

E.Almanza

4(x-2)=8x	2		Il semble transposer du numérique dans l'algébrique, l'idée qu'un résultat ne doit plus contenir de signe opératoire.
N'a pas compris la consigne.	1		
Pas de réponse.	1		

3°)

Tout est juste.	9
Tout est juste mais rien n'est souligné.	1
Autres. (Faux ou incomplet).	18

ERREURS RENCONTREES

SOMME

$\underline{5}+\underline{3}\times 4$	4	13
$2\times\underline{6}+\underline{7}$	3	
$2\times(\underline{3}+\underline{4})$	3	
$5\times\underline{x}+\underline{3}\times x$	3	
$2\times(\underline{a}+\underline{4})+8a$	1	1

PRODUIT

$5+\underline{3}\times\underline{4}$	5	7
$\underline{5+3}\times\underline{4}$	1	
$5+3\times 4$	1	
$\underline{2}\times\underline{6}+7$	3	6
$\underline{2}\times\underline{6+7}$	2	
$2\times 6+7$	1	
$2\times(a+4)+8a$	4	5
$\underline{2}\times(\underline{a+4})+8a$	1	
$5\times x+3\times x$	2	2
$(\underline{3}+x)\times(\underline{5}-y)$	1	1

Les élèves ont un vrai problème à voir la globalité d'une expression que ce soit dans le numérique comme dans l'algébrique. Il y a donc à faire un gros travail de compréhension sur une écriture comprenant plusieurs opérations. Ce travail est un des objectifs central de la classe de cinquième et cela ne se limite pas seulement à opérer sur un calcul dans un certain

ordre, cela montre que le temps d'apprentissage pour les élèves sur ce sujet est long et que les obstacles sont importants.

4°)

Réponses attendues :

$x+6\times4$
$6\times(x+4)$
$6\times x+4$

Réponses relevées:

Tout est juste.	22
Tout est faux.	1
Autres.	5

ERREURS RENCONTREES

La somme de x et du produit de six par quatre.	$(x+6)\times4$	2	3
	$(x+6)\times4= x+6\times4$	1	
Le produit de 6 par la somme de x et de quatre.	$6x+4$	2	2
La somme du produit de six par x et de quatre.	$6\times(x+4)$	2	4
	$x+6\times4$	1	
	$(x+6)\times4$	1	

EXERCICE 2

1°)

Tout est juste	1
Pas de réponse	2
Autres.	24

ERREURS RENCONTREES

2^k	$2^3=6$	1	1
$(-1)^k$	$(-1)^2=-1$	3	10
	$(-1)^2=2$	1	
	$(-1)^3=1$	3	
	$(-1)^3=-2$	1	
	$(-1)^3=-3$	1	
	$(-1)^3=-4$	1	
3^k	$3^2=6$	1	2

Test diagnostique sur le calcul littéral

E.Almanza

	$3^3=9$	1	
$(-3)^k$	$(-3)^2=-9$	6	13
	$(-3)^2=-6$	1	
	$(-3)^3=27$	5	
	$(-3)^3=-9$	1	

Il est normal que les élèves fassent faux pour les puissances d'un nombre négatif puisqu'ils ne les ont jamais rencontrées auparavant.
Mais on aurait pu attendre que les calculs de x^2 et x^3 pour x entier positif soient mieux réussis car ils ont du les rencontrer pour l'aire d'un carré ou le volume d'un cube.

2°)

Tout est juste.	11
Autres.	17

ERREURS RENCONTREES

Pour le B	« Oubli » de la parenthèse.	1
Pour le C	Premier c=5 Deuxième c=3	16

EXERCICE 3

3+5d=8d

Réponse attendue : FAUX avec un contre-exemple.
Réponses relevées :

FAUX avec un contre-exemple	11	11
FAUX il aurait fallu 3d+5d=8d	4	6
FAUX car la multiplication se fait en premier.	2	
FAUX mauvaise justification.	2	5
FAUX sans justification.	3	
VRAI	3	6
Pas de réponse.	3	

8x+5x=13x

Réponse attendue : VRAI car 8x+5x=(8+5)x=13x.
Réponses relevées :

Bonne réponse.	4	4
VRAI car 8 et 5 sont chacun multipliés par x.	1	1
VRAI sans justification.	7	17

Test diagnostique sur le calcul littéral

E.Almanza

VRAI avec un exemple.	**10**	
FAUX	2	6
Pas de réponse.	4	

7a+2a+3+a+5=2a+8+8a

Réponse attendue : VRAI car 7a+2a+3+a+5=10a+8 et 2a+8+8a=10a+8

Réponses relevées :

Bonne réponse.	2	2
VRAI sans justification.	1	7
VRAI avec un exemple.	**6**	
FAUX bonne démarche mais erreur de calcul.	4	10
FAUX sans justification.	3	
FAUX avec un contre-exemple !	3	
Pas de réponse.	9	9

Il est à remarquer que la rationalité mathématique est loin d'être acquise par ces élèves, c'est un gros travail transversal à partir du collège.

EXERCICE 4

1°)

A. Réponse attendue : $6\times x + 6\times 2 = 6\times(x+2)$

Réponses relevées :

Bonne réponse	14	14	
$6\times x\times 6\times 2$	2	3	L'élève change les signes + en signes × et vice-versa.
$6 + x\times 6\times 2$	1		
$6\times(x+6)\times 2$	2	3	L'élève ajoute ou déplace des parenthèses.
$x\times(6+6\times 2)$	1		
$6\times(2\times x)$	1	4	L'élève semble penser l'égalité comme " je calcule" et essayer de donner un résultat le plus conforme à ça.
$72x$	2		
$48\times 8x$	1		
Pas de réponse.	4	4	

B. Réponse attendue : 5x+10=5(x+2)

Réponses relevées :

Bonne réponse.	10	10	
$(5\times x)\times 10$	3	4	L'élève change les signes + en signes × et vice-versa.

Test diagnostique sur le calcul littéral

E.Almanza

5+x×10	1		
5×(x+10)	2	2	L'élève ajoute des parenthèses.
15x	2	2	L'élève semble penser l'égalité comme " je calcule" et essayer de donner un résultat le plus conforme à ça.
Pas de réponse.	10	10	

Si on regarde le nombre de bonnes réponses et le nombre de non-réponse, la disparition du signe × semble avoir posée problème.

C. Réponse attendue : 2× (x+4) + 3× (x+4) = (2+3) × (x+4)

Réponses relevées :

Bonne réponse	7	7	
x + 4×(2+3)	1	1	Oubli des parenthèses.
2 + (x+4) ×3×(x+4)	1	3	L'élève change les signes + en signes × et vice-versa.
2×(x×4) ×3×(x×4)	2		
2×(x+4+3) ×(x+4)	3	3	L'élève ajoute ou déplace des parenthèses.
4×(2+3×x)	1	14	
x×(2+3+4)	2		
$2(3+x^2)$	1		
5x×20	1		
Pas de réponse.	9		

Ici, le fait que le facteur commun soit une somme semble avoir été un facteur d'erreur pour les élèves, si on regarde le nombre de bonnes réponses et le nombre de non-réponse.

2°)

D. Réponse attendue : 6×(x+2)=6x+12

Réponses relevées :

Bonne réponse.	13	13	
6x+2	1	1	Non distribution du facteur commun à toues les termes
6+(x+2)	2	3	L'élève change les signes + en signes × et vice-versa.
6+(x×2)	1		
(6×x)+2	2	2	L'élève ajoute ou déplace des parenthèses.
Pas de réponse.	9	9	

On aurait pu s'attendre à une meilleure réussite, seulement 13 élèves sur 28 ont répondu juste, mais surtout, ça n'a rien rappelé à 9 élèves.

E. Réponse attendue : (a-b) ×3=3a-3b

Réponses relevées :

Bonne réponse.	11	11	
(a-b)+3	2	3	L'élève change les signes + en signes × et vice-versa.

Test diagnostique sur le calcul littéral

E.Almanza

(a×b)-3	1		
a-(b×3)	2	2	L'élève ajoute ou déplace des parenthèses.
3(-a)+3(-b)	1	2	Erreurs de calcul.
3a-b	1		
3a×3b	1	1	
Pas de réponse.	9	9	

F. Réponse attendue : $y\times(2y-5)=2y^2-5y$

Réponses relevées :

Bonne réponse.	9	9	
y+(2+y-5)	2	3	L'élève change les signes + en signes × et vice-versa.
y-(2y×5)	1		
(y×2×y)-5	2	3	L'élève ajoute ou déplace des parenthèses. Erreur de calcul…
y×2y+5	1		
3y-5	1	2	Erreurs de calcul.
y×(-2y)+y×(-5)	1		
Pas de réponse.	11	11	

G. Réponse attendue : 4(2m+1)=8m+4

Réponses relevées :

Bonne réponse.	11	11	
4+(2+m+1)	2	3	L'élève change les signes + en signes × et vice-versa.
4+(2m×1)	1		
(4×2×m)+1	2	2	L'élève ajoute ou déplace des parenthèses.
2m+4	1	1	Erreurs de calcul.
Pas de réponse.	11	11	

Dans ce sens, la disparition du signe multiplié ne semble pas avoir gêné les élèves.

EXERCICE 5

Juste.	2
Faux (bonne démarche).	5
Faux (mauvaise démarche).	12
Pas de réponse.	9

Test diagnostique sur le calcul littéral

E.Almanza

II . Lecture de ces résultats à travers les interrogations détaillées dans la fiche professeur

EXERCICE 1

Est-ce que les difficultés des élèves sont différentes en fonction du sens de passage d'un registre à l'autre ? (Registre du langage naturel / registre du langage algébrique)

Question 1°)

Registre du langage naturel ⟹ Registre du langage algébrique

a) 17 bonnes réponses
b) 23 bonnes réponses

Question 2°)

Registre du langage algébrique ⟹ Registre du langage naturel

a) 22 bonnes réponses
b) 23 bonnes réponses

Le passage au registre algébrique semble plus délicat.

Question 4°)

Registre du langage naturel ⟺ Registre du langage algébrique

22 bonnes réponses.
Il y a une meilleure réussite dans ce travail, ce qui semble normal car les élèves n'ont pas à créer une réponse mais à les accorder ensemble.

Est-ce que le vocabulaire somme / produit/ terme/ facteur est acquis ?

- Difficultés à voir la « globalité » d'une expression, tant numérique qu'algébrique, et donc à reconnaître si c'est une somme ou un produit. Il y a donc un gros travail d'appréhension d'expressions contenant plusieurs opérations ou des parenthèses à approfondir à travers des exercices ciblés.
- Difficultés importantes sur le vocabulaire : « terme » et « facteur ».

Test diagnostique sur le calcul littéral

E.Almanza

Est-ce que les règles de priorité entre les opérations sont transposées dans l'algébrique ?
Question 1° et 2°

Des élèves oublient les parenthèses.
Des élèves font des erreurs dues à la priorité des opérations.
Certains élèves transposent du numérique dans l'algébrique, l'idée qu'un résultat ne doit plus contenir de signe opératoire.
Il semble que pour bien appliquer les priorités opératoires tant dans le numérique que dans l'algébrique, il faudrait, au préalable, que les élèves sachent lire, interpréter et donner du sens à une écriture plus complexe.

Est-ce qu'il y a reconnaissance de la forme d'une écriture algébrique ?

La question 3°) montre de réelles difficultés à percevoir la « globalité » d'une expression algébrique comme d'une écriture numérique complexe.

Y a-t-il des différences de traitement entre expressions numériques et expressions algébriques ?

Question 3°) : Il n'y a pas eu trop de différence de traitement, on retrouve les mêmes erreurs d'interprétation d'une écriture plus complexe en numérique comme en algébrique.
Certains élèves transposent du numérique dans l'algébrique, l'idée qu'un résultat ne doit plus contenir de signe opératoire.

EXERCICE 2

La définition des premières puissances est-elle acquise par les élèves ?

Il y a beaucoup d'erreurs sur les puissances de nombres négatifs.
10 erreurs pour $(-1)^k$.
13 erreurs pour $(-3)^k$.
Mais il y en a aussi avec des puissances d'entiers.
Ceci montre que les élèves ne transposent pas facilement des connaissances apprises dans un cadre (aire et volume) dans un autre (numérique) et que le passage ne va pas de soit pour eux, et qu'il doit être travaillé pour lui-même.

Y a-t-il eu respect des priorités opératoires dans des calculs numériques simples (ne comportant que deux opérations) ?
On peut voir dans la question 2° que les élèves substituent assez facilement une lettre par un nombre dans une expression et que les priorités opératoires, dans le numérique, sur des expressions simples, semble acquises.

La compréhension de 2a comme $2\times a$ n'a posé aucun problème aux élèves de cette classe.

Test diagnostique sur le calcul littéral

E.Almanza

Dans un même calcul, peut-on remplacer une même lettre par deux valeurs différentes ?
16 élèves ont fait l'erreur, il y a donc des règles à expliciter.
Cette erreur aurait peut-être pu être évitée en écrivant : pour c=5 ; pour c=3, dans l'énoncé, comme il est proposé dans la dernière version de ce test.

EXERCICE 3

Quels sont les moyens de validation utilisés par les élèves pour montrer qu'une égalité est vraie ou non ?

3+5d=8d

11 élèves montrent que c'est faux à l'aide d'un contre-exemple, mais n'utilisent pas explicitement le mot contre-exemple. Ils sont donc presque dans la rationalité mathématique, car font-ils le lien avec l'universalité du théorème qui donne sens au contre-exemple ?

Mais que dire des réponses " *il aurait fallu 3d + 5d = 8d* " et " *la multiplication se fait en premier*" ? Ces deux élèves ont eu une lecture assez bonne de l'expression algébrique mais ils ne s'appuient sur aucune règle explicite pour justifier leur raisonnement. On a tendance à l'accepter car il y a un peu de vrai, mais le même type de justification avec beaucoup de faux sera rejeté par le professeur, et l'élève ne peut pas comprendre la différence de position et les vraies attentes mathématiques. C'est la référence à une règle qui valide une justification.

8x+5x=13x

4 élèves ont manipulé algébriquement l'expression.
10 élèves justifient à l'aide d'un exemple.
De la même façon, que précédemment, on peut se poser la question de la validité de la réponse suivante : "*car 8 et 5 sont chacun multiplié par x*".

7a+2a+3+a+5=2a+8+8a

2 élèves manipulent algébriquement les expressions.
6 élèves justifient à l'aide d'un exemple.
9 élèves ne donnent pas de réponse.

La rationalité mathématique semble donc en cours de construction et reste à travailler pour cette classe.

Test diagnostique sur le calcul littéral

E.Almanza

EXERCICE 4

Est-ce que les élèves ont acquis la distributivité rencontrée en 5ème ?

Question 1°) Sens : $k\times a + k\times b = k\times(a + b)$

A : 14 élèves n'ont pas acquis cette compétence.
B : 18 élèves n'ont pas acquis cette compétence.
C : 21 élèves n'ont pas acquis cette compétence.
La factorisation, même simple semble poser de gros problèmes.

Question 2°) Sens : $k\times(a + b)= k\times a + k\times b$

D : 15 élèves n'ont pas acquis cette compétence.
E : 17 élèves n'ont pas acquis cette compétence.
F : 19 élèves n'ont pas acquis cette compétence.
G : 17 élèves n'ont pas acquis cette compétence.
De manière surprenante, le développement ne semble pas mieux acquis.

Remarque : ces difficultés peuvent être liées à l'absence du mot « distributivité » dans l'énoncé. Mais, cette notion est à travailler à nouveau, comme on le retrouve dans les programmes de quatrième et troisième.

Quel est le statut du signe de l'égalité pour les élèves ?

Certains élèves semblent penser qu'après le signe "égale" il faut donner une réponse la plus concise possible pour se ramener, peut-être, à l'idée du primaire, qui montre le signe égal comme un déclencheur de "je calcule".
Beaucoup d'entre eux semblent percevoir, ici, que le signe "égale" est là pour déclencher l'écriture d'une expression différente de la première mais égale, mais ne sachant pas comment faire, ils se contentent d'essayer de préserver ce qui leur apparaît comme essentiel dans la première expression.

- Ils vont donc conserver tous les nombres et toutes les lettres :

Par exemple, pour $6\times x + 6\times 2 =$, ils vont changer des signes opératoires, déplacer des nombres, des parenthèses comme le montrent les réponses suivantes : " $6\times x\times 6\times 2$" ; " $6 + x\times 6\times 2$" ; "$6\times(x+6)\times 2$" ; " $x\times(6+6\times 2)$"
Pour 5x+10 = ils répondent $(5\times x)\times 10$" ; " $5+x\times 10$" ; " $5\times(x+10)$"
Pour $2\times(x+4) + 3\times(x+4) =$ ils répondent : " $2 + (x+4)\times 3\times(x+4)$" ;
" $2\times(x\times 4)\times 3\times(x\times 4)$" ; " $2\times(x+4+3)\times(x+4)$" ;.

- Certains ne conservent les nombres et les lettres mais sans les réécrire plusieurs fois, par exemple :

Test diagnostique sur le calcul littéral

E.Almanza

Pour $2\times$ (x+4) + $3\times$ (x+4) = ils répondent : " $4\times(2+3\times x)$" ; " $x\times(2+3+4)$" ou éventuellement " $2(3+x^2)$"

Pour (a-b) $\times 3$= ils répondent : "3(-a)+3(-b)" ou " 3a-b"

SFODEM THEME 1

Test diagnostique sur le calcul littéral

E.Almanza

TEST DIAGNOSTIQUE (calcul littéral)
CLASSE DE 4e

EXERCICE 1

1°) Pour chaque phrase, écris le nombre obtenu en fonction de x.

Phrase	**Ecriture en fonction de** x
Choisir un nombre et l'appeler x. Lui ajouter 5. Multiplier par 3 le résultat obtenu.	
Choisir un nombre et l'appeler x. Le multiplier par 4. Ajoute 2 au nombre obtenu.	

2°) Traduis chaque expression algébrique par un programme de calcul (aide-toi du 1°)

Expression algébrique	**Phrase (programme de calcul)**
$2x+1$	
$4(x-2)$	

3°) Les expressions suivantes sont-elles des sommes ou des produits ? Classe-les dans le tableau, et souligne en rouge chaque terme (pour les sommes) et chaque facteur (pour les produits).

$5+3\times4$	$2\times6+7$	$2\times(3+4)$	$5\times x+3\times x$	$(3+x)\times(5-y)$	$2\times(a+4)+8a$	ab

SOMME	PRODUIT

Test diagnostique sur le calcul littéral

E.Almanza

4°) Complète le tableau en choisissant les réponses parmi les 4 expressions algébriques suivantes :

$6\times(x+4)$ $\quad$ $6x+4$ $\quad$ $(x+6)\times 4$ $\quad$ $x+6\times 4$

La somme de x et du produit de six par quatre.	
Le produit de 6 par la somme de x et de quatre.	
La somme du produit de six par x et de quatre.	

EXERCICE 2

1°) Remplis le tableau suivant.

x	2	-1	3	-3
x^2				
x^3				

2°) Calcule les expressions suivantes :

A= 2a + 5 pour a = 7

B= $5\times(2b+1)$ pour b = -2

C= $c^2 + 2c$ pour c = 5, c=3

D= 3+ 5d pour d = 2

EXERCICE 3

Les égalités suivantes sont-elles vraies ? (Une égalité est vraie si, pour n'importe quelle valeur prise par l'inconnue, elle est toujours vérifiée). **Justifie les réponses.**

EGALITE	VRAIE ?	JUSTIFICATIONS
3 + 5d = 8d		
$8x+5x=13x$		
$7a+2a+3+a+5=2a+8+8a$		

Test diagnostique sur le calcul littéral

E.Almanza

EXERCICE 4

1°) Réécris chaque somme sous la forme d'un produit:

A = $6\times x+6\times 2=$……

B= $5x+10$ = ……

C = $2\times(x+4)+3\times(x+4)=$ ……

2°) Réécris chaque produit sous la forme d'une somme :

D= $6\times(x+2)=$ ……

E = $(a-b)\times 3=$ ……

F= $y\times(2y-5)=$ ……

G= $4(2m+1)=$ ……

EXERCICE 5

Calculer, sans calculatrice, A = $76(z+5)+24z-38\times 10$ pour z = 453228999,27 .