SFODEM	*Le problème des 5 plans* *Sommaire*	

Fiche de repérage

Fiche élève

Fiche prof :

- Eléments de recherche
- Eléments de solution

Fiche de repérage

Niveau : lycée, 2nde à terminale

Domaine : géométrie dans l'espace, dénombrement

Présentation : ce problème a été cherché par le groupe RCPO durant trois semaines avec mise des travaux sur un forum de la plate forme Pléiade. Il peut être donné comme problème ouvert à des élèves de lycée.
C'est un problème de géométrie qui travaille le régionement de l'espace par des plans.

Origine : L'énoncé du problème (lien avec le texte problème ouvert et débat) et sa solution sont tirés du livre de G. Polya "*Les mathématiques et le raisonnement plausible*".

Retour au sommaire

Fiche élève

Enoncé du problème

Dans l'espace, on considère 5 plans en position générale. Déterminer combien de régions ils délimitent.

Retour au sommaire

Fiche professeur

Eléments de recherche

L'énoncé du problème est volontairement vague. Que signifie “en position générale” ? Qu'est-ce qu'une région ?

La position générale. Intuitivement, cela signifie que l'on n'est pas dans un cas particulier. Mais qu'est-ce qu'un cas particulier ? Il peut être plus facile de comprendre l'expression “position générale” au sujet d'une famille de droites dans le plan. L'idée est que les propriétés auxquelles on s'intéresse, ici le nombre de régions découpées, devraient être invariantes par les petites perturbations de la famille. Naturellement, les élèves sont encouragés à se demander ce qui se passe lorsque les plans ne sont pas en position générale.

La notion de région. Elle a un contenu intuitif plus clair avec lequel les élèves peuvent immédiatement commencer à travailler. Mais il arrivera un moment où certaines propriétés cruciales des régions se manifesteront de manière plus ou moins subtile (la convexité, par exemple). Pour aller au-delà de l'évidence visuelle (“on voit bien que c'est ainsi”) il faudra alors revenir sur la définition même de ce qu'est une région. Remarquons aussi que certains font la différence entre les régions finies (bornées) et infinies (non bornées) ; on peut les encourager à faire cette distinction... et à chercher à compter les deux familles de régions.

Les dessins. Ils peuvent être d'une grande utilité pour commencer et prendre contact avec le problème, mais leur complexité grandissante révélera les limites de cette approche. Même avec 3 plans certains élèves ont des difficultés à trouver le nombre de régions.

Un problème analogue. On peut proposer aux élèves de chercher un problème analogue, plus facile. Le cas des droites dans le plan est souvent proposé. Si l'on attire l'attention sur la notion intuitive de dimension, on peut même amener les élèves au problème encore plus élémentaire des points sur une droite. La notion de position générale pourra être analysée dans ces trois situations ; on observe que le nombre de conditions pour assurer que la famille est en position générale augmente avec la dimension.

Compter le nombre de régions délimitées par des droites du plan ne présente pas de difficulté pour un petit nombre de droites, et une relation de récurrence simple entre le nombre de régions et le nombre de droites est rapidement observée par les élèves. On peut dresser un tableau à 3 colonnes représentant les nombres de régions suivant le nombre de points sur une droite (1ère colonne), le nombre de droites dans un plan (2ème colonne) et le nombre de plans dans l'espace (3ème colonne). La règle de formation des nombres de régions est alors assez évidente, et le nombre de régions pour 5 plans, à savoir 26, est facilement conjecturé.

Démonstration. L'intérêt d'avoir étudié un problème analogue est que, outre de proposer une conjecture, un schéma de démonstration par récurrence se révèle. Les idées sont assez faciles à comprendre dans le cas de droites dans le plan ; il reste (éventuellement) à les transcrire dans le cas des plans dans l'espace.

Eléments de solution

Une première observation doit être faite : l'énoncé le suggère implicitement, mais rien ne dit a priori que le nombre de régions ne dépend pas du choix de la configuration de 5 plans. Il est important de le noter si l'on veut rédiger une démonstration correcte du résultat ; il est également important d'attirer l'attention des élèves sur ce point à un moment ou à un autre de la recherche, éventuellement à la fin, pour leur faire prendre conscience de la part d'implicite qu'un énoncé véhicule et à l'importance d'une attitude critique de leur part.

Le nombre de régions délimitées par 5 plans en position générale est **26**. On peut le démontrer par un argument de récurrence sur le nombre de plans. Cet argument peut être plus facile à comprendre et à visualiser dans le cas des droites du plan.

Le cas des droites dans le plan. L'argument géométrique qui suit prouve que le nombre de régions du plan délimitées par n droites en position générale ne dépend que de n, et pas du choix des droites.

- Cela est vrai pour n=1 droite : il y a toujours 2 régions (qui sont non bornées).
- Supposons que cette affirmation soit vraie pour l'entier n-1, et montrons qu'elle l'est alors pour l'entier n. Considérons n droites $D_1, \dots, D_n$ en position générale, et choisissons l'une d'elles, disons D_n. Les n-1 premières droites sont en position générale, donc le nombre de régions du plan qu'elles délimitent ne dépend que de l'entier n-1. Appelons provisoirement k ce nombre, et $R_1, \dots, R_k$ les régions délimitées. La nième droite D_n traverse un certain nombre de ces régions, que chacune elle découpe en deux exactement (cette affirmation mérite une démonstration... qui demande plus d'informations sur la notion même de région et ses propriétés). Il ne reste plus qu'à trouver le nombre de régions traversées par D_n. Pour cela, observons la trace sur D_n des n-1 premières droites : les droites étant en *position générale*, chaque droite $D_1, \dots, D_{n-1}$ traverse D_n en un point, et l'on obtient ainsi sur D_n une famille de n-1 points *distincts*, toujours en raison de la position générale, qui découpent D_n en n régions (deux demi-droites et n-2 segments) ; chacune de ces régions de dimension un sur D_n est l'endroit où D_n traverse une des régions de dimension deux $R_1, \dots, R_k$. On en déduit que le nombre de régions délimitées par les n droites $D_1, \dots, D_n$ est égal à k+n. Comme k ne dépendait que de n-1, k+n ne dépend bien que de n. CQFD.
- On a donc prouvé par récurrence que le nombre de régions ne dépend que du nombre de droites. Appelons I_n ce nombre.
- L'argument géométrique précédent prouve de plus que l'on a la relation $I_n = I_{n-1} + n$. Etant donné que $I_1 = 2$, on en déduit que $I_n = 1 + n(n-1)/2$

Le cas des plans dans l'espace. L'argument géométrique qui suit prouve que le nombre de régions de l'espace délimitées par n plans en position générale ne dépend que de n, et pas du choix des plans.

- Cela est vrai pour n=1 plan : il y a toujours 2 régions (qui sont non bornées).
- Supposons que cette affirmation soit vraie pour l'entier n-1, et montrons qu'elle l'est alors pour l'entier n. Considérons n plans $P_1, \dots, P_n$ en position générale, et choisissons l'un

d'eux, disons P_n. Les n-1 premiers plans sont en position générale, donc le nombre de régions de l'espace qu'ils délimitent ne dépend que de l'entier n-1. Appelons provisoirement k ce nombre, et $R_{1,} \cdots, R_k$ les régions délimitées. Le nième plan P_n traverse un certain nombre de ces régions, que chacune il découpe en deux exactement (cette affirmation mérite une démonstration... qui demande à nouveau plus d'informations sur la notion de région et ses propriétés). Il ne reste plus qu'à trouver le nombre de régions traversées par P_n. Pour cela, observons la trace sur P_n des n-1 premiers plans : les plans étant en position générale, chaque plan $P_{1,} \cdots, P_{n-1}$ traverse P_n en une droite, et l'on obtient ainsi une famille de n-1 droites *en position générale* sur P_n. On sait que le nombre de régions I_{n-1} qu'elles découpent sur P_n ne dépend que de l'entier n. Par conséquent, le nombre de régions découpées par les n plans est égal à $k + I_{n-1}$, et ce nombre ne dépend effectivement que de l'entier n.

- On peut donc maintenant appeler J_n le nombre de régions de l'espace délimitées par n plans en position générale. L'argument précédent prouve que $J_n = J_{n-1} + I_{n-1}$, relation de récurrence qui permet de calculer J_n.

Retour au sommaire