Le problème des 5 plans : éléments de solution

L'énoncé du problème et sa solution sont tirées du livre de G. Polya "*Les mathématiques et le raisonnement plausible*".

Une première observation doit être faite : l'énoncé le suggère implicitement, mais rien ne dit a priori que le nombre de régions ne dépend pas du choix de la configuration de 5 plans. Il est important de le noter si l'on veut rédiger une démonstration correcte du résultat ; il est également important d'attirer l'attention des élèves sur ce point à un moment ou à un autre de la recherche, éventuellement à la fin, pour leur faire prendre conscience de la part d'implicite qu'un énoncé véhicule et à l'importance d'une attitude critique de leur part.

Le nombre de régions délimitées par 5 plans en position générale est **26**. On peut le démontrer par un argument de récurrence sur le nombre de plans. Cet argument peut être plus facile à comprendre et à visualiser dans le cas des droites du plans.

Le cas des droites dans le plan. L'argument géométrique qui suit prouve que le nombre de régions du plan délimitées par n droites en position générale ne dépend que de n, et pas du choix des droites.

- Cela est vrai pour n=1 droite : il y a toujours 2 régions (qui sont non bornées).
- Supposons que cette affirmation soit vraie pour l'entier n-1, et montrons qu'elle l'est alors pour l'entier n. Considérons n droites $D_{1,}\cdots,D_n$ en position générale, et choisissons l'une d'elles, disons D_n. Les n-1 premières droites sont en position générale, donc le nombre de régions du plan qu'elles délimitent ne dépend que de l'entier n-1. Appelons provisoirement k ce nombre, et $R_1,\cdots,R_k$ les régions délimitées. La n-ième droite D_n traverse un certain nombre de ces régions, que chacune elle découpe en deux exactement (cette affirmation mérite une démonstration... qui demande plus d'informations sur la notion même de région et ses propriétés). Il ne reste plus qu'à trouver le nombre de régions traversées par D_n. Pour cela, observons la trace sur D_n des n-1 premières droites : les droites étant en *position générale*, chaque droite $D_{1,}\cdots,D_{n-1}$ traverse D_n en un point, et l'on obtient ainsi sur D_n une famille de n-1 points *distincts*, toujours en raison de la position générale, qui découpent D_n en n régions (deux demi-droites et n-2 segments) ; chacune de ces régions de dimension un sur D_n est l'endroit où D_n traverse une des régions de dimension deux $R_{1,}\cdots,R_k$. On en déduit que le nombre de régions délimitées par les n droites $D_{1,}\cdots,D_n$ est égal à k+n. Comme k ne dépendait que de n-1, k+n ne dépend bien que de n. CQFD.
- On a donc prouvé par récurrence que le nombre de régions ne dépend que du nombre de droites. Appelons I_n ce nombre.

- L'argument géométrique précédent prouve de plus que l'on a la relation $I_n = I_{n-1} + n$. Etant donné que $I_1 = 2$, on en déduit que $I_n = 1 + n(n-1)/2$

Le cas des plans dans l'espace. L'argument géométrique qui suit prouve que le nombre de régions de l'espace délimitées par n plans en position générale ne dépend que de n, et pas du choix des plans.

- Cela est vrai pour n=1 plan : il y a toujours 2 régions (qui sont non bornées).
- Supposons que cette affirmation soit vraie pour l'entier n-1, et montrons qu'elle l'est alors pour l'entier n. Considérons n plans $P_1, \cdots, P_n$ en position générale, et choisissons l'un d'eux, disons P_n. Les n-1 premiers plans sont en position générale, donc le nombre de régions de l'espace qu'ils délimitent ne dépend que de l'entier n-1. Appelons provisoirement k ce nombre, et $R_1, \cdots, R_k$ les régions délimitées. Le n-ième plan P_n traverse un certain nombre de ces régions, que chacune il découpe en deux exactement (cette affirmation mérite une démonstration... qui demande à nouveau plus d'informations sur la notion de région et ses propriétés). Il ne reste plus qu'à trouver le nombre de régions traversées par P_n. Pour cela, observons la trace sur P_n des n-1 premiers plans : les plans étant en position générale, chaque plan $P_1, \cdots, P_{n-1}$ traverse P_n en une droite, et l'on obtient ainsi une famille de n-1 droites *en position générale* sur P_n. On sait que le nombre de régions I_{n-1} qu'elles découpent sur P_n ne dépend que de l'entier n. Par conséquent, le nombre de régions découpées par les n plans est égal à $k + I_{n-1}$, et ce nombre ne dépend effectivement que de l'entier n.
- On peut donc maintenant appeler J_n le nombre de régions de l'espace délimitées par n plans en position générale. L'argument précédent prouve que $J_n = J_{n-1} + I_{n-1}$, relation de récurrence qui permet de calculer J_n.