hal-00772167, version 2 - 2 Feb 2013

Composantes PRV généralisées et chemins de Littelmann

Pierre-Louis Montagard *

Abstract

We give a sufficient condition for a Littelmann path to represent a vector of extremal weight of an integrable irreducible highest weight representation of a symmetrisable Kac-Moody algebra. Thanks to this condition we present, in a more general context, an alternative proof of a recent result by Boris Pasquier, Nicolas Ressayre and the author of this article on the existence of generalized PRV components.

Résumé

Nous présentons une condition suffisante pour qu'un chemin de Littelmann représente un vecteur de poids extrémal d'une représentation intégrable, irréductible et de plus haut poids d'une algèbre de Kac-Moody symétrisable. À l'aide de cette condition, nous donnons, dans un cadre plus général, une preuve alternative de résultats de Boris Pasquier, Nicolas Ressayre et l'auteur de cet article sur l'existence de composantes PRV généralisées.

0 Introduction

La conjecture PRV a été énoncée dans les années 60 dans [9] par Parthasarathy, Ranga Rao et Varadarajan : soient μ et ν deux poids dominants d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ et v, w deux éléments du groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$, alors si le poids $\lambda = v\mu + w\nu$ est dominant, la représentation irréductible $V(\lambda)$ est de multiplicité non nulle dans $V(\mu) \otimes V(\nu)$. Cette conjecture a été démontrée simultanément et de façon indépendante par Shrawan Kumar [2] et [3] et Olivier Mathieu [6] dans le contexte plus général des algèbres de

*Université Montpellier II - CC 51-Place Eugène Bataillon - 34095 Montpellier Cedex 5 - France - pierre-louis.montagard@math.univ-montp2.fr

hal-00772167, version 2 - 2 Feb 2013

Kac-Moody symétrisable. La géométrie, et notamment la géométrie des espaces de drapeaux du groupe algébrique G associé à $\mathfrak{g}$ intervient de façon essentielle dans ces deux preuves.
Au début des années 90, Peter Littelmann dans [4] et [5] a introduit la théorie des chemins qui généralise la règle de Littlewood-Richardson au cas des algèbres de Kac-Moody symétrisable. Une application remarquable de cette théorie est une preuve combinatoire et élémentaire de la conjecture PRV, voir [4].
Plus récemment dans [8] et [7], Nicolas Ressayre, Boris Pasquier et l'auteur de cette note, dans le contexte d'un groupe algébrique réductif G et en utilisant des outils géométriques, ont généralisé l'énoncé PRV. Dans ces travaux, à partir d'un couple de poids dominants (μ, ν), d'un couple d'éléments du groupe de Weyl et d'un ensemble de racines deux à deux orthogonales, il est défini un hyper-rectangle dans le réseau des poids de G. Il est montré que les représentations irréductibles associées aux poids dominants de cet hyper-rectangle sont des composantes du produit tensoriel $V(\mu) \otimes V(\nu)$ (voir le théorème 3.1 pour un énoncé précis). Les hyper-rectangles ainsi définis contenant strictement les poids dominants donnés par la conjecture originale PRV, les composantes obtenues sont appelées des composantes PRV généralisées.
Dans cette note, nous allons donner une preuve de l'existence des composantes PRV généralisées en utilisant la théorie des chemins de Littelmann dans le contexte plus général des algèbres de Kac-Moody symétrisable. Pour cela, nous rappelons les résultats essentiels de la théorie des chemins dans la partie 1. Puis dans la partie 2, nous donnons une condition suffisante pour qu'un chemin représente un vecteur de poids extrémal et en utilisant ce critère, nous démontrons l'existence de composantes PRV généralisées dans la partie 3.

1 Rappels

Pour fixer les notations nous allons rappeler brièvement les points principaux de la théorie des chemins de Littelmann. Nous renvoyons aux articles originaux de Peter Littelmann [4] et [5] pour les preuves et les détails. Dans tout cette article $\mathfrak{g}$ désignera une algèbre de Kac-Moody symétrisable. Nous utiliserons les notation suivantes concernant $\mathfrak{g}$:

- $\mathfrak{h}$: une sous-algèbre de Cartan ;
- X : le réseau des poids ;
- $X_{\mathbb{Q}} = X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et $X_{\mathbb{R}} = X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$;
- S : l'ensemble des racines simples ;

hal-00772167, version 2 - 2 Feb 2013

- W : le groupe de Weyl ;
- si β est une racine réelle, nous noterons $\beta^\vee \in X_\mathbb{R}^*$ la coracine associée et si $\chi \in X_\mathbb{R}$ nous noterons $\langle \chi, \beta^\vee \rangle$ l'évaluation $\beta^\vee(\chi)$;
- D désignera la chambre dominante et si $\lambda \in X \cap D$ nous noterons $V(\lambda)$ la représentation intégrable irréductible de plus haut poids λ ;
- si $\alpha \in S$, s_α désigne la réflexion sur $X_\mathbb{R}$ définie par $s_\alpha(\chi) = \chi - \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \alpha$.

Définition 1. Un chemin π est une application $\pi : [0,1] \to X_\mathbb{R}$ rectifiable telle que $\pi(0) = 0$ et $\pi(1) \in X$. On dit que deux chemins π et π' sont équivalent s'il existe une reparamétrisation $\phi : [0,1] \to [0,1]$ croissante, surjective et continue telle que $\pi = \pi' \circ \phi$. Nous considérerons l'ensemble Π des classes d'équivalences des chemins.

Exemples 1. 1. Soit $\chi \in X$, nous noterons π_χ le chemin défini par $\pi_\chi(t) = t\chi$.

2. Si π_1 et π_2 sont deux chemins, le chemin $\pi_1 * \pi_2$ est le chemin défini par :
$$\begin{aligned} \pi(t) &= \pi_1(2t) && \text{pour } t \leq 1/2 \ ; \\ &= \pi_1(1) + \pi_2(2t-1) && \text{pour } t > 1/2. \end{aligned}$$
3. Dans la suite, nous considérerons essentiellement des chemins affines par morceaux et tels que les changements de direction se font en des points rationnels. Un tel chemin π s'écrit $\pi = \pi_{\chi_1} * \pi_{\chi_2} * \cdots * \pi_{\chi_p}$ avec $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_p) \in X_\mathbb{Q}^p$.
4. Si π est un chemin, nous noterons π^* le chemin défini par $\pi^*(t) = \pi(1-t) - \pi(1)$.

Pour toute racine réelle α nous noterons la fonction : $H_\alpha^\pi(t) = \langle \pi(t), \alpha^\vee \rangle$. Soit m_α^π le minimum de cette fonction. Nous aurons également besoin des fonctions suivantes :

$$L_\alpha^\pi(t) = \min\{1, (H_\alpha^\pi(s) - m_\alpha^\pi)_{t \leq s \leq 1}\}$$

et

$$R_\alpha^\pi(t) = \max\{0, (m_\alpha^\pi - H_\alpha^\pi(s))_{0 \leq s \leq t}\}.$$

Définition 2. Soit $\pi \in \Pi$ et α une racine simple, alors si $L_\alpha^\pi(1) < 1$, $f_\alpha \pi$ n'est pas défini, sinon $f_\alpha \pi(t) := \pi(t) - L_\alpha^\pi(t)\alpha$.
De même si $R_\alpha^\pi(1) > 0$ alors $e_\alpha \pi$ n'est pas défini, sinon $e_\alpha \pi(t) := \pi(t) - R_\alpha^\pi(t)\alpha$.

Voici les propriétés élémentaires des opérateurs f_α et e_α :

Proposition 1.1. *Soit $\pi \in \Pi$ et α une racine simple ;*

hal-00772167, version 2 - 2 Feb 2013

1. *Si $f_\alpha\pi$ est défini alors $f_\alpha\pi(1) = \pi(1) - \alpha$. De même si $e_\alpha\pi$ est défini, alors $e_\alpha\pi(1) = \pi(1) + \alpha$.*
2. *Si $f_\alpha\pi$ est défini, alors $e_\alpha f_\alpha\pi$ est défini et $e_\alpha f_\alpha\pi = \pi$. De même, si $e_\alpha\pi$ est défini, alors $f_\alpha e_\alpha\pi$ est défini et $f_\alpha e_\alpha\pi = \pi$.*
3. *Si $e_\alpha\pi$ est défini, alors $f_\alpha\pi^*$ est défini et $f_\alpha\pi^* = (e_\alpha\pi)^*$. De même, si $f_\alpha\pi$ est défini, alors $e_\alpha\pi^*$ est défini et $e_\alpha\pi^* = (f_\alpha\pi)^*$.*
4. *Soit m (resp. n), maximal tel que $f_\alpha^m\pi$ (resp. $e_\alpha^n\pi$) soit défini, alors $n - m = \langle\pi(1), \alpha\rangle$, $m = \max\{a \in \mathbb{Z} \,|\, a \leq \langle\pi(1), \alpha^\vee\rangle - m_\alpha^\pi\}$ et $n = \max\{a \in \mathbb{Z} \,|\, a \leq |m_\alpha^\pi\}$.*
5. *Si $e_\alpha\pi$ (resp. $f_\alpha\pi$) est défini alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_\alpha^n(n\pi)$ (resp. $f_\alpha^n(n\pi)$) est défini et on a : $e_\alpha^n(n\pi) = ne_\alpha\pi$ (resp. $f_\alpha^n(n\pi) = nf_\alpha\pi$).*

Si $\pi \in \Pi$, nous noterons $B(\pi)$ l'ensemble des chemins obtenus en appliquant à π les opérateurs e_α et f_α (pour $\alpha \in S$). Si B est un sous-ensemble de Π, nous définirons $\mathrm{car\,B} = \sum_{\pi\in\mathrm{B}} \mathrm{e}^{\pi(1)}$; nous dirons que B est entier si pour tout $\pi \in B$ et pour toute racine $\alpha \in S$, le minimum m_α^π est un entier. Enfin nous dirons qu'un chemin π est dominant si son image est contenue dans la chambre dominante D et nous noterons Π^+ l'ensemble des chemins dominants.
Nous pouvons maintenant énoncer les résultats fondamentaux de P. Littelmann.

Théorème 1.2. *Soit $\pi \in \Pi$ un chemin dominant, alors on a les résultats suivants :*
– *l'ensemble $B(\pi)$ est entier ;*
– *π est l'unique chemin dominant de $B(\pi)$;*
– $\mathrm{car\,B}(\pi) = \mathrm{car\,V}(\pi(1))$.

Si B et B' sont deux sous-ensemble de Π nous noterons $B * B'$ l'ensemble des concaténations

$$B * B' := \{\pi * \pi' \,|\pi \in B,\, \pi' \in B'\}.$$

Théorème 1.3. *Soit π et π' deux chemins dominants, alors l'ensemble $B(\pi) * B(\pi')$ est entier et se décompose en union disjointe :*

$$B(\pi) * B(\pi') = \bigcup_{\pi*\eta\in\Pi^+,\, \eta\in B(\pi')} B(\pi * \eta).$$

Enfin, on a la conséquence suivante qui permet de décomposer le produit tensoriel de deux représentations irréductibles de $\mathfrak{g}$.

hal-00772167, version 2 - 2 Feb 2013

Théorème 1.4. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody, μ et ν deux poids dominants. Soit π un chemin dominant (resp. π') tel que $\pi(1) = \mu$ (resp. $\pi'(1) = \nu$), alors on a la décomposition suivante comme $\mathfrak{g}$-module :*

$$V(\mu) \otimes V(\nu) = \bigoplus_{\pi * \eta \in \Pi^+,\, \eta \in B(\pi')} V(\mu + \eta(1)).$$

Pour finir cette partie, rappelons que les opérateurs e_α et f_α permettent de définir une action du groupe de Weyl sur Π. Pour cela définissons pour tout $\pi \in \Pi$ et pour toute racine simple $\alpha \in S$:

$$\tilde{s}_\alpha \pi := \begin{cases} f_\alpha^n(\pi);\ \text{si } n = \langle \pi(1), \alpha^\vee \rangle \geq 0 \\ e_\alpha^{-n}(\pi);\ \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 1.5. *L'application $s_\alpha \mapsto \tilde{s}_\alpha$ s'étend en une action de W sur Π.*

Pour pouvoir utiliser le théorème 1.4, il faut avoir une description explicite de $B(\pi)$. Pour $\pi = \pi_\lambda$ le chemin direct entre 0 et un poids dominant λ, les chemins de $B(\pi_\lambda)$ sont appelés chemins de Lakshmibai-Seshadri et admettent une description combinatoire explicite donnée par Littelmann [4]. Nous n'allons pas ici rappeler cette description, mais simplement remarquer la propriété élémentaire suivante qui nous sera utile dans la suite.

Proposition 1.6. *Soit λ un poids dominant et $w \in W$ un élément du groupe de Weyl, alors le chemins $\pi_{w\lambda}$ appartient à $B(\pi_\lambda)$.*

Preuve. On vérifie que si $\alpha \in S$ et $w \in W$, alors $\tilde{s}_\alpha \pi_{w\lambda} = \pi_{s_\alpha w\lambda}$. La proposition s'en déduit immédiatement. $\square$

2 Chemins extrémaux

Rappelons que si $V(\lambda)$ est une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$, alors pour tout $w \in W$, le poids $w\lambda$ est un poids de multiplicité un de $V(\lambda)$ appelé poids extrémal de $V(\lambda)$. Nous allons maintenant définir la notion de chemin extrémal.

Définition 3. Soit π un chemin, et soit η l'unique chemin dominant tel que $\pi \in B(\eta)$, on dit que π est un chemin extrémal si le poids $\pi(1)$ est un poids extrémal de la représentation irréductible $V(\eta(1))$.

Remarque. Si λ est un poids dominant, alors d'après la proposition 1.6, les chemins extrémaux de $B(\pi_\lambda)$ sont exactement les $\{\pi_{w\lambda} \,|\, w \in W\}$. Mais si π est un chemin dominant quelconque on ne sait pas, en général, déterminer les chemins extrémaux de $B(\pi)$.

Nous pouvons maintenant énoncer un critère qui assure qu'un chemin est extrémal. Rappelons que si β est une racine réelle, nous avons défini $H_\beta^\pi(t) = \langle \pi(t), \beta^\vee \rangle$.

Théorème 2.1. *Soit π un chemin tel que pour toute racine positive réelle β :*
– *si $H_\beta^\pi(1) \geq 0$ alors la fonction H_β^π est positive ;*
– *si $H_\beta^\pi(1) < 0$, alors il existe un réel $t_\beta^\pi \in [0,1[$ tel que la fonction H_β^π soit positive ou nulle pour $t \leq t_\beta^\pi$ et strictement négative et décroissante pour $t > t_\beta^\pi$,*
alors π est un chemin extrémal.

Preuve. Soit π vérifiant l'hypothèse du théorème. Choisissons $w \in W$ tel que $w\pi(1)$ soit dominant et tel que la longueur de w soit minimale. Nous allons faire une récurrence sur la longueur de w pour montrer que μ est un poids extrémal. S'il existe w de longueur 0, alors $\pi(1)$ est un poids dominant. Par hypothèse, pour tout racine positive réelle β et pour tout $t \in [0,1]$, $H_\beta^\pi(t) \geq 0$, et π est un chemin dominant, donc extrémal.
Si $l(w) > 0$, alors il existe α une racine simple telle que $H_\alpha^\pi(1) < 0$; nous allons montrer que $\pi' = \tilde{s}_\alpha \pi$ vérifie l'hypothèse du théorème ce qui nous permettra de conclure puisque par construction $ws_\alpha\pi'(1)$ est dominant et $l(ws_\alpha) < l(w)$.
Quitte à reparamétriser π on peut supposer que $t_\alpha^\pi = 1/2$. Définissons $\pi_1(t) = \pi(t/2)$ et $\pi_2(t) = \pi((t+1)/2) - \pi(1/2)$. Par définition on a $\pi = \pi_1 * \pi_2$. On vérifie que $\tilde{s}_\alpha\pi = \pi_1 * s_\alpha(\pi_2)$. Si γ est une racine réelle, alors un simple calcul montre que :

$$\begin{array}{rcll} H_\gamma^{\tilde{s}_\alpha\pi}(t) & = & H_\gamma^\pi(t) & \text{si } t \leq 1/2 \text{ ;} \\ & = & H_{s_\alpha\gamma}^\pi(t) & \text{si } t \geq 1/2. \end{array}$$

Remarquons que les deux expressions ci-dessus coïncident en $t = 1/2$ puisque $H_\alpha^\pi(1/2) = 0$.
Soit γ une racine positive réelle telle que $H_\gamma^{\tilde{s}_\alpha\pi}(1) \geq 0$, alors ou bien $\gamma = \alpha$ et dans ce cas pour $t \leq 1/2$, on a $H_\alpha^{\tilde{s}_\alpha\pi}(t) = H_\alpha^\pi(t)$ qui est positive et pour $t > 1/2$, on a $H_\alpha^{\tilde{s}_\alpha\pi}(t) = -H_\alpha^\pi(t)$ qui est également positive.
Si $\gamma \neq \alpha$, alors il existe une racine positive réelle β telle que $s_\alpha(\beta) = \gamma$. Remarquons que comme $H_\beta^\pi(1) = H_{s_\alpha\beta}^{\tilde{s}_\alpha\pi}(1)$, pour tout $t \in [0,1]$ la fonction $H_\beta^\pi(t)$ est positive. Donc pour $t \geq 1/2$, $H_{s_\alpha\beta}^{\tilde{s}_\alpha\pi}(t) = H_\beta^\pi(t)$ est positive.
Si $t \leq 1/2$, alors

$$H_{s_\alpha\beta}^{\tilde{s}_\alpha\pi}(t) = H_{s_\alpha\beta}^\pi(t) = H_\beta^\pi(t) - H_\alpha^\pi(t)\langle \alpha, \beta^\vee \rangle.$$

Si $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \leq 0$, alors l'expression ci-dessus est bien positive pour $t \leq 1/2$.

hal-00772167, version 2 - 2 Feb 2013

Et si $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle > 0$, on vérifie que $\langle \pi(1), s_\alpha\beta \rangle$ est positif et donc par hypothèse, pour tout $t \in [0,1]$, $H^\pi_{s_\alpha\beta}(t) \geq 0$.
Soit γ une racine réelle et positive telle que $H^{\tilde{s}_\alpha\pi}_\gamma(1) < 0$. Alors il existe une racine réelle positive β telle que $s_\alpha\beta = \gamma$. Comme $H^\pi_\beta(1) = H^{\tilde{s}_\alpha\pi}_{s_\alpha\beta}(1)$, il existe t^π_β tel que pour $t \geq t^\pi_\beta$, $H^\pi_\beta(t)$ est décroissante et strictement négative. Si $H^\pi_{s_\alpha\beta}(1) \geq 0$, ou si $H^\pi_{s_\alpha\beta}(1) < 0$ et $t^\pi_{s_\alpha\beta} \geq 1/2$, alors $H^{\tilde{s}_\alpha\pi}_{s_\alpha\beta}(1/2) = H^\pi_{s_\alpha\beta}(1/2) = H^\pi_\beta(1/2) \geq 0$ et donc $t^\pi_\beta \geq 1/2$. Comme pour $t \leq 1/2$, $H^{\tilde{s}_\alpha\pi}_{s_\alpha\beta}(t) = H^\pi_{s_\alpha\beta}(t)$ et pour $t \geq 1/2$, $H^{\tilde{s}_\alpha\pi}_{s_\alpha\beta}(t) = H^\pi_\beta(t)$, on en déduit que $H^{\tilde{s}_\alpha\pi}_{s_\alpha\beta}(t)$ est positive ou nulle pour $t \leq t^\pi_\beta$ et décroissante et strictement négative pour $t > t^\pi_\beta$.
Si $t^\pi_{s_\alpha\beta} < 1/2$, alors on a $H^{\tilde{s}_\alpha\pi}_{s_\alpha\beta}(1/2) = H^{\tilde{s}_\alpha\pi}_{s_\alpha\beta}(1/2) = H^\pi_\beta(1/2) < 0$, et donc $t^\pi_\beta \leq 1/2$ et la fonction $H^{\tilde{s}_\alpha\pi}_{s_\alpha\beta}(t)$ est positive ou nulle pour $t \leq t^\pi_{s_\alpha\beta}$ et strictement négative et décroissante pour $t > t^\pi_{s_\alpha\beta}$. $\square$

Nous allons exprimer le critère ci-dessus lorsque π est un chemin affine par morceaux.

Corollaire 2.2. *Soit π un chemin tel qu'il existe des poids $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_p) \in X^p_{\mathbb{Q}}$ tels que $\pi = \pi_{\chi_1} * \pi_{\chi_2} * \cdots * \pi_{\chi_p}$; si pour toute racine réelle positive β on a :*

$$\forall j \in \{1, \ldots, p-1\} \text{ tel que } \langle \chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_j, \beta^\vee \rangle < 0 \Rightarrow \langle \chi_{j+1}, \beta^\vee \rangle \leq 0,$$

alors π est extrémal.

Remarques.
1. Il est facile de vérifier que le critère du théorème 2.1 n'est pas une condition nécessaire pour qu'un chemin π soit extrémal. Nous donnons un exemple en type A_2 dans la figure 1 : π est extrémal puisque $\tilde{s}_{\alpha_1}\pi$ est un chemin dominant mais ne vérifie pas le critère du théorème 2.1 ; nous utilisons dans cette figure les notations et conventions de [1].
2. Il est également facile de vérifier que si π est extrémal alors π vérifie la condition suivante : pour toute racine réelle positive β,

   (a) si $H^\pi_\beta(1) \geq 0$ alors pour tout $t \in [0,1]$, $H^\pi_\beta(t) \geq 0$;
   (b) si $H^\pi_\beta(1) < 0$, alors pour tout $t \in [0,1]$, $H^\pi_\beta(t) \geq \langle \pi(1), \beta^\vee \rangle$.

   Mais cette condition n'est pas une condition suffisante, comme le montre l'exemple dans la figure 2 : π vérifie les conditions ci-dessus, mais n'est pas extrémal puisque $\tilde{s}_{\alpha_2}\pi$ n'est pas un chemin dominant, bien que le poids $\tilde{s}_{\alpha_2}\pi(1)$ soit dominant.
3. Dans un travail en cours de rédaction, nous donnons un critère d'extrémalité plus général que celui donné dans le théorème 2.1.

hal-00772167, version 2 - 2 Feb 2013

hal-00772167, version 2 - 2 Feb 2013

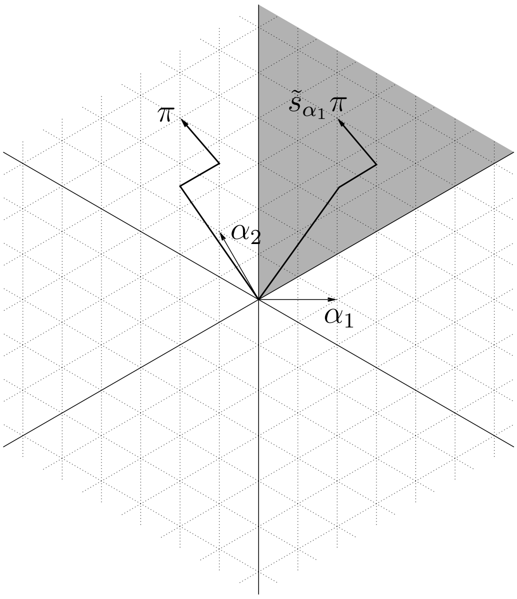

FIGURE 1 –

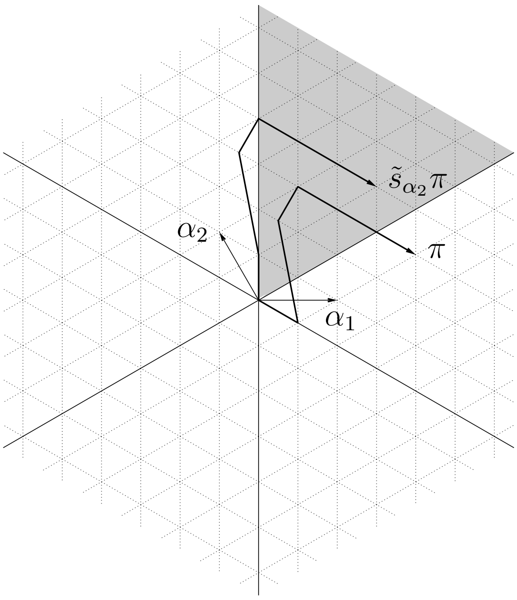

FIGURE 2 –

3 Les composantes PRV généralisées

Nous allons maintenant énoncer le résultat principal de cette note.

Théorème 3.1. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody symétrisable, soient μ, ν*

hal-00772167, version 2 - 2 Feb 2013

deux poids dominants de $\mathfrak{g}$, $(v,w)\in W^2$, *et* $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_p)$, p *racines réelles orthogonales deux à deux. Supposons qu'il existe* $u\in\{v,w\}$ *tel que pour tout* $i\in\{1,2\ldots,p\}$, $u^{-1}\beta_i$ *soit simple ; pour* $i\in\{1,2,\ldots,p\}$ *soit*

$$K_i=\{0,1,\ldots,\min(\langle v\mu,\beta_i^\vee\rangle,\langle w\nu,\beta_i^\vee\rangle)\}$$

et soit R *l'hyper-rectangle*

$$R=\left\{\lambda\,|\,\exists(k_1,k_2,\ldots,k_p)\in\prod_{i=1}^p K_i\quad \lambda=v\mu+w\nu-\sum_{i=1}^p k_i\beta_i\right\}$$

alors si $\lambda\in R\cap D$, *la représentation* $V(\lambda)$ *est une composante de* $V(\mu)\otimes V(\nu)$.

Preuve. En permutant éventuellement les couples (v,μ) et (w,ν), on peut supposer que pour tout $i\in\{1,2,\ldots,p\}$, $\alpha_i=v^{-1}\beta_i$ est une racine simple. Soit λ un poids dominant appartenant à R ; alors pour $i\in\{1,2,\ldots,p\}$ il existe $k_i\in K_i$ tels que : $\lambda=v\mu+w\nu-\sum_{i=1}^p k_i\beta_i$. On peut en fait supposer que pour tout $i\in\{1,2,\ldots,p\}$, $k_i\le\frac{\langle v\mu,\beta_i^\vee\rangle}{2}$. En effet, si ce n'est pas le cas, en réordonnant $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_p)$, il existe $p'\in\{1,2,\ldots,p\}$ tels que pour tout $i\in\{1,2,\ldots,p'\}$, $k_i>\frac{\langle v\mu,\beta_i^\vee\rangle}{2}$. Comme les s_{α_i} commutent deux à deux, on peut alors écrire :

$$\lambda=vs_{\alpha_1}s_{\alpha_2}\ldots s_{\alpha'_p}\mu+w\nu+\sum_{i=1}^p k'_i\beta_i$$

avec $k'_i=\langle\mu,\alpha_i^\vee\rangle-k_i$ si $i\le p'$ et $k'_i=k_i$ sinon. Comme $k'_i\le k_i$ on a également $k'_i\le\langle w\nu,\beta_i^\vee\rangle$, et on est bien ramené au cas ou $k'_i\le\frac{\langle v\mu,\beta_i^\vee\rangle}{2}$.
D'après le théorème 1.4, pour compléter la preuve il suffit de construire un chemin de $B(\mu)*B(\nu)$ de poids $v^{-1}\lambda$ et extrémal.
Pour $i\in\{1,2,\ldots,p\}$ posons $l_i:=\langle w\nu,\beta_i^\vee\rangle=\langle v^{-1}w\nu,\alpha_i^\vee\rangle$. Pour tout $i\in\{1,2,\ldots,p\}$, on a $0\le k_i\le l_i$ et d'après le point 4 de la proposition 1.1 le chemin $f_\alpha^{k_i}\pi_{v^{-1}w\nu}$ est défini. Comme les $(\beta_i)_{1\le i\le p}$ sont deux à deux orthogonales, il en est de même des $(\alpha_i)_{1\le i\le p}$ et les opérateurs f_{α_i} commutent deux à deux. Le chemin $\pi:=f_{\alpha_1}^{k_1}f_{\alpha_2}^{k_2}\ldots f_{\alpha_s}^{k_s}\pi_{v^{-1}w\nu}$ est donc défini. Définissons $a_0=0, a_{s+1}=1$ et pour $i\in\{1,2,\ldots,p\}$, $a_i=\frac{k_i}{l_i}$. Si on suppose qu'on a ordonné les $(\beta_i)_{1\le i\le p}$ de sorte que : $a_1\le a_2\le\cdots\le a_p$, alors le chemin π s'écrit :

$$\pi_{a_1s_{\alpha_p}\ldots s_{\alpha_1}v^{-1}w\nu}*\pi_{(a_2-a_1)s_{\alpha_p}\ldots s_{\alpha_2}v^{-1}w\nu}*\cdots*\pi_{(a_p-a_{p-1})s_{\alpha_p}v^{-1}w\nu}*\pi_{(1-a_p)v^{-1}w\nu}.$$

Nous aurons besoin du calcul de $\pi(a_i)$ pour $i\in\{1,2,\ldots,p\}$.

hal-00772167, version 2 - 2 Feb 2013

$$\begin{array}{rcl}\pi(a_i) & = & \sum_{j=1}^{i}(a_j - a_{j-1})s_{\alpha_p}s_{\alpha_{p-1}}\dots s_{\alpha_j}v^{-1}w\nu \\ & = & \sum_{j=1}^{i}\sum_{m=j}^{p}(a_j - a_{j-1})v^{-1}w\nu - l_m\alpha_m \\ & = & a_iv^{-1}w\nu - (\sum_{j=1}^{i}\sum_{m=j}^{p} a_jl_m\alpha_m - \sum_{j=1}^{i}\sum_{m=j}^{p} a_{j-1}l_m\alpha_m) \\ & = & a_iv^{-1}w\nu - \sum_{j=1}^{i} a_jl_j\alpha_j - a_i\sum_{m=i+1}^{p} l_m\alpha_m \\ & = & a_i(v^{-1}w\nu - \sum_{j=i+1}^{p} l_j\alpha_j) - \sum_{j=1}^{i} k_j\alpha_j.\end{array}$$

D'après la proposition 1.6, le chemin $\pi_\mu * \pi$ appartient à $B(\mu) * B(\nu)$, il reste donc à montrer que ce chemin est extrémal ; nous allons utiliser le corollaire 2.2. Les points de changements de direction de $\pi_\mu * \pi$ sont inclus dans l'ensemble : $\{\mu, \mu + \pi(a_1), \dots, \mu + \pi(a_s)\}$. Soit β une racine réelle positive ; remarquons d'abord que comme μ est dominant, on ne peut pas avoir $\langle \mu, \beta^\vee\rangle < 0$.
D'autre part, s'il existe $m \in \{1, 2, \dots, p\}$ tel que $\beta = \alpha_m$ alors $\langle \mu+\pi(a_i), \alpha_m\rangle \geq 0$. En effet si $m \leq i$ alors :

$$\langle \mu + \pi(a_i), \alpha_m\rangle = \langle \mu, \alpha_m^\vee\rangle + a_il_m - 2k_m = (\langle \mu, \alpha_m^\vee\rangle - k_m) + (a_il_m - k_m).$$

Les deux termes du membre de droite sont positifs : le premier par hypothèse et le deuxième car $a_i \geq a_m$. Si $m > i$, alors :

$$\langle \mu + \pi(a_i), \alpha_m\rangle = \langle \mu, \alpha_m^\vee\rangle + a_il_m - 2a_il_m \geq \langle \mu, \alpha_m^\vee\rangle - a_ml_m = \langle \mu, \alpha_m^\vee\rangle - k_m.$$

Ce dernier terme est bien positif par hypothèse.
Supposons maintenant que $\beta \notin \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$ et que $\langle \mu + \pi(a_i), \beta^\vee\rangle < 0$, soit

$$\langle \mu - \sum_{j=1}^{i} k_j\alpha_j, \beta^\vee\rangle + a_i\langle v^{-1}w\nu - \sum_{j=i+1}^{p} l_m\alpha_m, \beta^\vee\rangle < 0.$$

En utilisant que pour tout $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, $k_j \leq \langle v\mu, \beta\rangle/2 = \langle \mu, \alpha_j\rangle/2$, on vérifie que pour toutes racine simple α, on a $\langle \mu - \sum_{j=1}^{i} k_j\alpha_j, \alpha^\vee\rangle \geq 0$, et $\mu - \sum_{j=1}^{i} k_j\alpha_j$ est donc un poids dominant. On en déduit :

$$\langle v^{-1}w\nu - \sum_{j=i+1}^{p} l_m\alpha_m, \beta^\vee\rangle < 0.$$

or $v^{-1}w\nu - \sum_{j=i+1}^{s} l_m\alpha_m = s_{\alpha_p}s_{\alpha_{p-1}}\dots s_{\alpha_{i-1}v^{-1}w\nu}$ et le critère est vérifié. □

Remarques. 1. Nous n'obtenons pas complètement les résultats obtenus dans [7]. En effet dans le cadre des groupes algébriques, le théorème 3.1 est vrai également lorsque la famille $(\beta_i)_{1\leq i\leq p}$ est une famille de racines *simples* deux à deux orthogonales. Dans [7], il est montré que ce cas est équivalent au cas ou les $(v^{-1}\beta_i)_{1\leq i\leq p}$ sont simples mais la démonstration utilise l'existence d'un élément de plus grande longueur $w_0 \in W$. L'auteur ne sait pas si ce cas est vrai en général dans le contexte des algèbres de Kac-Moody.

2. Nous illustrons le théorème 2.1 dans un cas ou $\mathfrak{g}$ est de de type G_2. Nous reprenons les notations de [1]. En prenant $\mu = 2\varpi_2$, $\nu = 2(\varpi_1 + \varpi_2)$, v et w de sorte que $v^{-1}w\nu = -8\varpi_1 + 2\varpi_2$, $p = 1$, $\beta = 3\alpha_1 + \alpha_2$ et $k = 1$, on obtient $\lambda = \varpi_1 + \varpi_2$ et donc $V(\varpi_1 + \varpi_2)$ est une composante de $V(\mu)\otimes V(\nu)$. Sur la figure 3, nous avons représenté le chemin extrémal $\pi = \pi_\mu * f_{\alpha_2}\pi_{v^{-1}w\nu}$ ainsi que les chemins extrémaux intermédiaires entre π et le chemin dominant η tel que $\eta(1) = \lambda$.

hal-00772167, version 2 - 2 Feb 2013

hal-00772167, version 2 - 2 Feb 2013

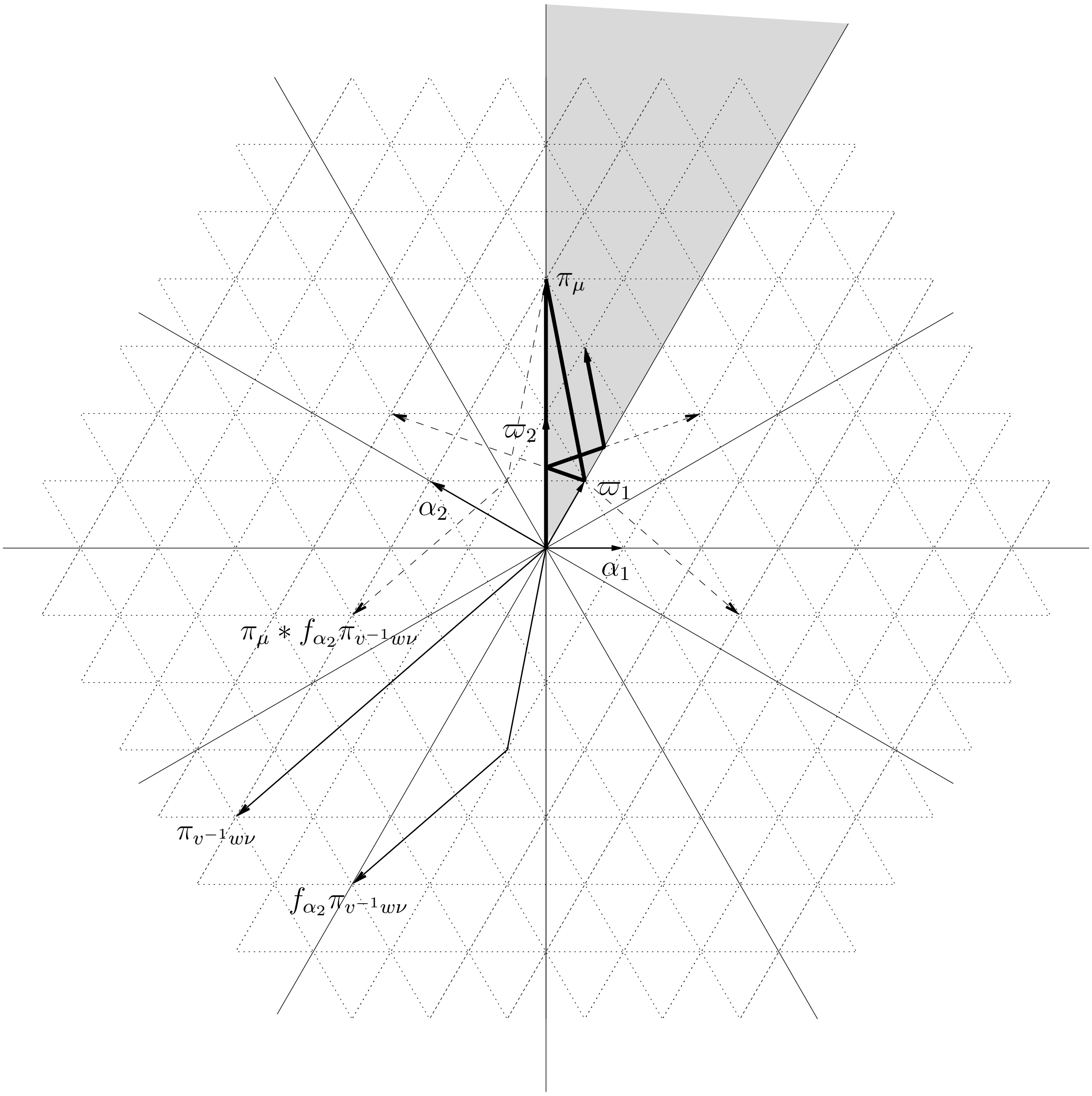

FIGURE 3 –

hal-00772167, version 2 - 2 Feb 2013

Références

[1] Nicolas Bourbaki. *Lie groups and Lie algebras. Chapters 4–6*. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 2002. Translated from the 1968 French original by Andrew Pressley.

[2] Shrawan Kumar. Proof of the Parthasarathy-Ranga Rao-Varadarajan conjecture. *Invent. Math.*, 93(1) :117–130, 1988.

[3] Shrawan Kumar. Existence of certain components in the tensor product of two integrable highest weight modules for Kac-Moody algebras. In *Infinite-dimensional Lie algebras and groups (Luminy-Marseille, 1988)*, volume 7 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pages 25–38. World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989.

[4] Peter Littelmann. A Littlewood-Richardson rule for symmetrizable Kac-Moody algebras. *Invent. Math.*, 116(1-3) :329–346, 1994.

[5] Peter Littelmann. Paths and root operators in representation theory. *Ann. of Math. (2)*, 142(3) :499–525, 1995.

[6] Olivier Mathieu. Construction d'un groupe de Kac-Moody et applications. *Compositio Math.*, 69(1) :37–60, 1989.

[7] P.-L. Montagard, B. Pasquier, and N. Ressayre. Generalizations of the PRV conjecture, II. *ArXiv e-prints*, October 2011.

[8] Pierre-Louis Montagard, Boris Pasquier, and Nicolas Ressayre. Two generalisations of the PRV conjecture. *Compositio Math.*, 147(4) :1321—1336, July 2011.

[9] K. R. Parthasarathy, R. Ranga Rao, and V. S. Varadarajan. Representations of complex semi-simple Lie groups and Lie algebras. *Ann. of Math. (2)*, 85 :383–429, 1967.